V. D. Lakhno, Translational-invariant bipolarons and superconductivity, *Keldysh Institute preprints*, 2020, 009

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 9 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лахно В.Д.

Трансляционно-инвариантные биполяроны и сверхпроводимость

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лахно В.Д. Трансляционно-инвариантные биполяроны и сверхпроводимость // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 9. 75 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-9
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-9

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.Д. Лахно

Трансляционно-инвариантные биполяроны и сверхпроводимость

Москва — 2020

В.Д. Лахно

Трансляционно-инвариантные биполяроны и сверхпроводимость

Излагается трансляционно-инвариантная (ТИ) биполяронная теория сверхпроводимости, основанная, как и теория Бардина-Купера-Шриффера, на гамильтониане Фрелиха. Роль куперовских образований в ней играют ТИ-биполяроны, представляющие собой связанные пары пространственно делокализованных электронов с малой корреляционной длиной связанного состояния. Наличие Ферми поверхности приводит к стабилизации вблизи нее таких состояний и возможности их бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК).

Теория приводит к естественному объяснению существования предшествующей сверхпроводимости псевдощелевой фазы и дает оценку температуры перехода T^* из нормального в псевдощелевое состояние.

Показано, что температура БЭК ТИ-биполяронов определяет температуру сверхпроводящего перехода T_c, которая зависит не от эффективной массы биполярона, а от обычной массы зонного электрона. Это снимает ограничение на верхний предел T_c для сильного электрон-фононного взаимодействия. Естественное объяснение получает угловая зависимость сверхпроводящей щели, которая определяется угловой зависимостью фононного спектра.

Показано, что большое число экспериментов по термодинамическим и транспортным характеристикам, джозефсоновскому туннелированию и фотоэмиссионной спектроскопии с угловым решением (ARPES) высокотемпературных сверхпроводников не противоречит концепции ТИ-биполяронного механизма сверхпроводимости в этих материалах. На основе изложенной теории обсуждаются возможные пути повышения T_c и создания комнатных сверхпроводников.

Ключевые слова: сжатый вакуум, спаривание, неидеальный бозе-газ, кроссовер, корреляционная длина, магнитное поле, купраты, кинки, преобразование Боголюбова.

V.D. Lakhno

Translational-invariant bipolarons and superconductivity

A translation-invariant bipolaron theory of superconductivity based, like Bardeen–Cooper–Schrieffer theory, on Fröhlich Hamiltonian is presented. Here the role of Cooper pairs belongs to TI bipolarons which are pairs of spatially delocalized electrons whose correlation length of a coupled state is small. The presence of Fermi surface leads to stabilization of such states in its vicinity and a possibility of their Bose-Einstein condensation (BEC).

The theory provides a natural explanation of the existence of a pseudogap phase preceding the superconductivity and enables one to estimate the temperature of a transition T^* from a normal state to a pseudogap one.

It is shown that the temperature of BEC of TI bipolarons determines the temperature of a superconducting transition T_c which depends not on the bipolaron effective mass but on the ordinary mass of a band electron. This removes restrictions on the upper limit of T_c for a strong electron-phonon interaction. A natural explanation is provided for the angular dependence of the superconducting gap which is determined by the angular dependence of the phonon spectrum.

It is demonstrated that a lot of experiments on thermodynamic and transport characteristics, Josephson tunneling and angle-resolved photoemission spectroscopy (ARPES) of high-temperature superconductors does not contradict the concept of a TI bipolaron mechanism of superconductivity in these materials. Possible ways of enhancing T_c and producing new room-temperature superconductors are discussed on the basis of the theory suggested

Key words: squeezed vacuum, pairing, nonideal bose-gas, crossover, correlation length, magnetic field, cuprates, kinks, transformation Bogolyubov.

Оглавление

§1 Введение

Теория сверхпроводимости для обычных металлов является одним из самых красивых и давно сформировавшихся разделов физики конденсированных сред, который включает в себя как макроскопическую, так и микроскопическую теории, а также вывод макроскопических уравнений теории из микроскопического описания [1]. В этом смысле теория в своей основе представлялась в законченном виде, и её дальнейшее развитие должно быть связано с детализацией и рассмотрением различных специальных случаев.

Ситуация изменилась после открытия высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) [2]. Неожиданным оказалось, что в оксидных керамиках корреляционная длина на несколько порядков меньше, чем в традиционных металлических сверхпроводниках, а ширина запрещённой щели намного больше температуры сверхпроводящего перехода [3]. С современным состоянием теории и эксперимента можно ознакомиться по книгам и обзорам [4]-[15].

На сегодняшний день основной вопрос связан с построением микроскопической теории, способной объяснить совокупность экспериментальных фактов, не укладывающихся в стандартную теорию Бардина, Купера, Шриффера (БКШ) [16].

При всей множественности современных версий микроскопического описания ВТСП: фононный, плазмонный, спиновый, экситонный и другие механизмы – центральным пунктом построения микроскопической теории является эффект спаривания электронов (эффект Купера). Такая «бозонизация» электронов далее лежит в основе описания их сверхпроводящего конденсата.

Явление спаривания в широком смысле есть образование биэлектронных состояний, а в узком смысле, если в основу описания положен фононный механизм, есть образование биполяронных состояний. В течение длительного времени такому представлению препятствовала большая корреляционная длина, другими словами, размер куперовских пар в теории БКШ. Эта же причина долгое время препятствовала представлению о сверхпроводимости как о бозонном конденсате (см. примечание на стр. 1177 работы [16]). В немалой степени такому непониманию способствовало и стандартное представление о биполяронах как об очень компактных образованиях.

Первое указание на ошибочность такой точки зрения было получено в работе [17], в которой при изучении свойств экситонного газа высокой плотности впервые была продемонстрирована аналогия между теорией БКШ и бозе-эйнштейновской конденсацией (БЭК). Результаты [17] послужили основой для развития идеи кроссовера – перехода от теории БКШ, которой соответствует предел слабого электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ), к теории БЭК, которой соответствует предел сильного ЭФВ [18-24]. Считалось, что дополнительным свидетельством правильности такого пути служит теория сильной связи Элиашберга [25]. Согласно [26], в пределе бесконечно сильного

ЭФВ эта теория приводит к режиму локальных пар, хотя и сильно отличному от режима БЭК [27].

Попытки построить теорию кроссовера между БКШ и БЭК столкнулись, однако, с непреодолимыми трудностями. Так, например, используя Т-матричный подход, предлагалось построить теорию, в которой бы Т-матрица исходной фермионной системы при увеличении силы ЭФВ переходила бы в Т-матрицу бозонной системы [28-33]. Такой переход, однако, оказалось невозможно осуществить даже в случае предельно разбавленных систем. Фактически речь идёт о том, что даже в пределе, когда система состоит только из двух фермионов, оказывается невозможным построить из них однобозонное состояние. В теории ЭФВ эта проблема известна как проблема биполярона.

Одна из причин неудачи теории кроссовера связана со следующим обстоятельством. Как и в теории биполярона, в теории БКШ исходным является гамильтониан Фрёлиха. Для этого гамильтониана доказана важная теорема об аналитичности энергии полярона и биполярона по константе ЭФВ [34]. В теории БКШ делается, однако, очень важное приближение: замена настоящего матричного элемента взаимодействия в гамильтониане Фрёлиха на модельную величину, обрезанный снизу и сверху по фононным импульсам матричный элемент. Эта процедура отнюдь не является безобидной. Как показано в [35], в теории биполярона это приводит к побочным эффектам – существованию локального уровня энергии, отделённого от квазинепрерывного спектра щелью (эффект Купера). Такое решение является изолированным и не обладает свойствами аналитичности по константе связи. В теории БКШ именно такое решение берётся за основу построения теории сверхпроводимости.

В результате, построенная теория и её аналитическое продолжение – теория Элиашберга, сильно искажают реальную картину, и, в частности, делают невозможным построение теории сверхпроводимости на основе БЭК. Замена истинного матричного элемента на модельный позволяет провести до конца аналитические вычисления. В частности, замена в БКШ истинного взаимодействия на локальное позволила провести вывод феноменологической модели Гинзбурга-Ландау, являющейся также локальной моделью [36]. В действительности, мощь такого подхода трудно переоценить, так как он позволил получить множество согласованных с экспериментом утверждений.

Другая, еще более важная причина неудачи теории кроссовера состоит в том, что вакуумы в теории полярона (биполярона) со спонтанно нарушенной симметрией и трансляционно-инвариантного (ТИ) полярона (ТИ-биполярона) в случае сильного взаимодействия различны, что делает невозможным переход теории Элиашберга к трансляционно-инвариантной биполяронной теории сильной связи. (§ 2).

В данном обзоре излагается теория сверхпроводимости (СП), основанная на электрон-фононном взаимодействии. В ней случаю БКШ соответствует предел слабого ЭФВ (§ 3), а случаю сильного ЭФВ соответствует ТИ-биполяронная теория сверхпроводимости, в которой СП фазе соответствует бозе-конденсат ТИ-биполяронов.

Актуальность написания обзора по биполяронному механизму сверхпроводимости обусловлена следующими обстоятельствами: 1) большинство обзоров по биполяронной СП посвящено поляронам малого радиуса (ПМР) [37], в то время как за прошедшее время, после критики теории СП на основе ПМР [38-41], интерес сместился к поляронам большого радиуса; 2) основная масса работ последних десятилетий была посвящена магнитно-флуктуационным механизмам СП, в то время как новейшие эксперименты, в которых получены рекордные T_c (под высоким давлением), были выполнены на сульфидах водорода и гидридах лантана, в которых магнитных взаимодействий нет, но есть сильное электрон-фононное взаимодействие; 3) решающим доказательством в пользу биполяронного механизма служат недавние эксперименты [42], доказывающие существование пар выше T_c; 4) важнейшим подтверждением биполяронного механизма СП служат эксперименты (Божовича и др. [43]), в которых продемонстрировано, что число спаренных состояний в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) много меньше общего числа носителей тока.

В обзоре кратко изложены основные представления о трансляционно-инвариантных (ТИ) поляронах и биполяронах в полярных кристаллах. Подробно эти представления изложены в обзоре [44]. Как и в теории Бардина-Купера-Шриффера, в основу описания газа ТИ-биполяронов положены электрон-фононное взаимодействие и гамильтониан Фрелиха. В отличие от теории БКШ, в которой корреляционная длина намного превышает среднее расстояние между парами, в предлагаемом обзоре подробно рассматривается противоположный случай, когда корреляционная длина много меньше расстояния между парами.

Дается обзор термодинамических свойств трехмерного бозе-конденсата ТИ-биполяронов. Обсуждаются критическая температура перехода, энергия, теплоемкость и теплота перехода газа ТИ-биполяронов.

Рассмотрено влияние на термодинамические характеристики газа ТИ-биполяронов внешнего магнитного поля. Дается сравнение с экспериментом таких характеристик, как максимальная величина напряженности магнитного поля, при которой возможно существование конденсата ТИ-биполяронов, лондоновская длина проникновения и температурная зависимость этих величин. Полученные результаты используются для объяснения экспериментов по высокотемпературным сверхпроводникам.

Особое внимание в обзоре уделено тому факту что, согласно ТИ-биполяроной теории ВТСП, разные типы экспериментов в качестве СП щели измеряют различные величины. Будет показано, что с помощью туннельных экспериментов определяется энергия биполяронов, в то время как в методе фотоэмиссионной спектроскопии углового разрешения ARPES измеряется фононная частота, для которой ЭФВ является максимальным. Согласно ТИ-биполяронной теории СП естественное объяснение получают такие явления, как наличие кинков в спектральных измерениях щели, угловая зависимость щели, наличие псевдощели и др.

§2 Полярон и фундаментальные проблемы нерелятивистской квантовой теории поля

В основе теории полярона лежит гамильтониан Фрелиха, описывающий взаимодействие электрона с фононным полем:

$$H = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \sum_k \hbar\omega(k)\, a_k^+ a_k + \sum_k V_k \left[a_k e^{ikr} + a_k e^{-ikr}\right], \tag{1}$$

где **r** – радиус-вектор электрона, а $\hat{\boldsymbol{p}}$ – его импульс; m – эффективная масса электрона; a_k^+, a_k – операторы рождения и уничтожения квантов поля с энергией $\hbar\omega(k)$, V_k – матричный элемент взаимодействия электрона с фононным полем.

В физике конденсированных сред теория полярона представляет собой обширную область, которая включает в себя описание электронных свойств ионных кристаллов [45]-[49], полярных полупроводников [50], [51], проводящих полимеров [52]-[54], биополимеров [55], [56], высокотемпературных сверхпроводников [57]-[59], магнитных полупроводников [60] и других важных объектов конденсированной материи.

Причина такого широкого использования модели полярона в самых разных областях связана с ее универсальностью. С фундаментальной точки зрения, в основе описания всех явлений в физике лежит ее квантово-полевая формулировка. В нерелятивистской физике ее простейшая реализация основана на использовании гамильтониана Фрелиха (1).

Различные выражения для V_k и ω(к) в случае ионных кристаллов, пьезоэлектриков, сверхпроводников, ядерной материи, плазмы вырожденных полупроводников приведены в [61]. В последнее время гамильтониан (1) стал использоваться при описании примесных атомов, помещенных в конденсат Бозе-Эйнштейна из ультрахолодных атомов [62], электронов в низкоразмерных системах [59], [63] и т.д.

Относительно простой вид гамильтониана (1) побуждал исследователей найти точное решение задачи о поляроне. В стационарном случае точное решение давало бы спектр гамильтониана (1) и, как следствие, решение широкого круга задач в физике конденсированного состояния. Задача, однако, оказалась гораздо сложнее, чем казалась. На ней были опробованы различные методы и техники квантовой теории поля, включая метод функций Грина, диаграммную технику, метод интегралов по траекториям, метод ренормгруппы, квантовый метод Монте-Карло, диаграммный метод Монте-Карло и другие. Различные вариационные подходы, из которых наиболее эффективным оказался метод интегралов по траекториям Фейнмана, позволили определить примерную зависимость энергии основного состояния полярона во всем диапазоне изменения константы электрон-фононного взаимодействия α.

Перечисленные подходы, однако, оказались не в состоянии определить спектр гамильтониана (1) даже в пределе слабой связи [64].

В пределе сильной связи для исследования свойств гамильтониана (1), начиная с основополагающих работ Пекара [45], было использовано каноническое преобразование:

$$a_k \to a_k - V_k \rho_k^* / \hbar\omega(k), \tag{2}$$

где ρ_k – Фурье-компонента плотности распределения электрона. Преобразование (2) выделяет из квантового поля классическую составляющую (второе слагаемое в правой части (2)), которая, по предположению, должна давать основной вклад в пределе сильной связи. Начиная с работы Либа [65] (см. также [66] и цитированные в ней работы) доказательству того, что функционал полной энергии Пекара для основного состояния полярона, к которому приводит (2), является асимптотически точным в пределе сильной связи, было посвящено много работ. Другими словами, утверждалось, что выбор вариационной волновой функции основного состояния в виде:

$$|\Psi\rangle = \varphi(r) \exp \sum_k V_k \frac{\rho^*}{\hbar\omega(k)} (a_k - a_k^+) |0\rangle, \tag{3}$$

где $\varphi(r)$ – волновая функция электрона, который приводит для полной энергии основного состояния полярона $E = \langle\Psi|H|\Psi\rangle$ к пекаровскому функционалу сильной связи:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla\Psi|^2 \, d^3r - \sum_k \frac{V_k^2}{\hbar\omega(k)} \rho_k^* \rho_k, \tag{4}$$

дает точное решение в пределе сильной связи.

В этом случае речь о спектре возбужденных состояний полярона шла только для случая покоящегося полярона P=0, где P – импульс полярона. Вариация (4) по Ψ^* приводит к нелинейному уравнению Шредингера для волновой функции Ψ, имеющему вид уравнения Хартри. Численное интегрирование этого уравнения было осуществлено в [67], и несколько возбужденных поляронных состояний и соответствующих этим состояниям перенормированных фононных мод было найдено (см., например, обзор [61]).

Таким образом, подавляющее большинство работ по теории полярона в пределе сильной связи представляет собой реализацию метода квантования в окрестности классического решения, в настоящее время широко используемого в непертурбативной квантовой теории поля [68].

С фундаментальной точки зрения такой подход представлялся неудовлетворительным уже на самых ранних этапах развития теории полярона. Действительно, если в пределе сильной связи поле поляризации можно считать классическим и отличным от нуля, то становится непонятным, как такое макроскопическое состояние может удерживаться одним электроном. Это возможно только в одном случае: если поле равно нулю почти всюду за исключением небольшой области, в которой локализуется электрон, образуя с полем самосогласованное состояние. При этом исходная трансляционная симметрия системы оказывается нарушенной: поляризационная потенциальная яма спонтанным образом может образоваться с равной вероятностью в любой области пространства. Все попытки построить трансляционно-инвариантную теорию на основе такой физической картины приводили к тем же результатам, что и исходная полуклассическая теория сильной связи, разработанная Пекаром [45].

Ситуация радикально поменялась после публикации работ [35], [69]-[71] в которых был рассмотрен принципиально иной тип движения электрона в полярном кристалле. Согласно [69]-[71], при движении по кристаллу электрон не только смещает равновесные состояния атомов, но и изменяет профиль их потенциальной энергии в кристалле, что эквивалентно образованию их сжатых колебательных состояний [72]-[74]. Для ТИ-полярона средние (т.е. классические) смещения атомов из равновесных положений, в отличие от полярона Пекара, равны нулю. Соответственно, равна нулю поляризация кристалла, так как ТИ-полярон делокализован в пространстве. Однако средние числа заполнения фононов в поляронном состоянии не равны нулю. Этот парадокс разрешается тем, что неравное нулю среднее число фононов обусловлено наличием возбужденных электроном сжатых (т.е. неклассических) состояний.

Сжатие фононных состояний, индуцируемых движением электрона по кристаллу, приводит к новому типу связанного состояния электрон-фононной системы, которое описывается единой волновой функцией, представляющей новый тип анзаца, которую невозможно представить в виде факторизованного анзаца, образованного по отдельности электронной и фононной частями.

Применение теории сжатых состояний в теории полярона было впервые осуществлено в теории Тулуба [75]. В силу неоптимального выбора вариационной волновой функции в работе [75] для энергии основного состояния получились результаты, фактически воспроизводящие полученные Пекаром. Это намного задержало их использование в теории полярона. По этой причине интенсивное развитие теории сжатых состояний началось гораздо позже – после работы Глаубера [76], обратившего внимание на их важную роль для понимания принципа неопределенности и принципа суперпозиции в квантовой механике.

В настоящее время сжатые состояния имеют широкую область применения: в оптике они используются для подавления собственных шумов света, в вычислительной технике – для создания оптических компьютеров и линий связи, в прецензионных измерениях они используются в интерференционных антеннах гравитационных волн и т.д. (см., например, книги и обзоры [77-79]).

В теории полярона метод сжатых состояний после пионерской работы Тулуба [75] был использован в работах [80-84] для дискретной модели холстейновского полярона [85] и в работах [86-93] для фрелиховского полярона. В работах [80-84] были получены очень важные результаты: во-первых, энергия основного состояния полярона для сжатых состояний оказалась ниже, чем во всех работах по полярону Холстейна, использующих обычный вакуум, и, во-вторых, эффективная масса холстейновского полярона, вычисленная для сжатых состояний, оказалась намного меньше, чем ее величина, полученная Холстейном в [85].

Этого нельзя сказать о работах [86-93], в которых теория сжатых состояний применялась к гамильтониану Фрелиха. Несмотря на то что в них отмечалось значительное усиление поляронных эффектов при использовании сжатых состояний, в целом эти работы не меняли результатов, полученных Пекаром [45]. Как уже было сказано выше, прорывные результаты были получены в работах [35], [69-71], в которых для гамильтониана Пекара–Фрелиха было показано, что энергия основного состояния полярона и биполярона на сжатых состояниях оказывается ниже, чем в теории Пекара.

Наиболее важным приложением теории поляронов и биполяронов является сверхпроводимость. По-видимому, построение теории сверхпроводимости является самой трудной проблемой физики конденсированного состояния, поскольку требует решения многочастичной задачи. Такая задача на основе гамильтониана Фрелиха (1) была в пределе слабого взаимодействия решена Бардиным, Купером и Шриффером [16] (§3). На ее основе удалось объяснить ряд свойств обычных сверхпроводников.

Открытие высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) показало, что теория БКШ к ним, по-видимому, неприменима, поскольку взаимодействие электронов с фононами в ВТСП материалах нельзя считать слабым. В настоящее время для описания этого случая прибегают к использованию теории Элиашберга [25,94,95], поскольку последняя была построена для случая сильного электрон-фононного взаимодействия и в пределе слабого взаимодействия совпадает с теорией БКШ. Применение теории Элиашберга к ВТСП, однако, имело ограниченный успех. Это обстоятельство породило большое число теорий, в которых за основу брался не гамильтониан электрон-фононного взаимодействия (1), а другие типы взаимодействий, отличные от ЭФВ. Эти работы в конечном счете столкнулись с теми же проблемами, что и теория сильного взаимодействия Элиашберга.

В теории Элиашберга малым параметром является отношение ω/E_F, где ω – фононная частота, E_F – энергия Ферми. Если $\omega/E_F \to 0$, то константа электрон-фононного взаимодействия $\alpha \sim \omega^{-1/2} \to \infty$. Теория возмущений по этому параметру построена для обычных вакуумных фононных функций $|\,0>$, которые берутся в качестве нулевого приближения. Но при $\alpha \to \infty$ правильным выбором нулевого приближения будет выбор функции $\hat{\Lambda}_0 \mid 0 >$

$$\hat{\Lambda}_0 = \mathrm{c}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,k'} a_k^+ A_{kk'} a_{k'}^+\right\}, \tag{5}$$

где $\hat{\Lambda}_0$ – оператор сжатого состояния [44], [75], [96], [97]. Таким образом, теория Элиашберга, построенная для обычного вакуума, будет давать совсем другие результаты, чем теория, построенная для сжатого вакуума. Разумеется, в пределе слабой связи, когда $\alpha \to 0$, результаты двух теорий будут совпадать. Однако с увеличением α будет развиваться нестабильность бозонного вакуума, определяемого вакуумной функцией | 0 >, и при определенном критическом значении α_c образуется новый бозонный вакуум, определяемый функцией $\hat{\Lambda}_0|0>$, который является более низкоэнергетическим состоянием. По-видимому, впервые на возможность нарушения теоремы Мигдала обратил внимание Александров [37], который применительно к теории сверхпроводимости на основе теории поляронов малого радиуса указал, что выбранный на основе теоремы Мигдала вакуум «ничего не знает» о другом вакууме, который представляет собой поляронное сужение зоны проводимости и образование ПМР в новом вакууме сжатых состояний [80-84]. По этой причине теория Элиашберга может быть мало пригодной для объяснения ВТСП.

Идейная основа сверхтекучести была заложена в работах Лондона и Тиссы [98], [99], впервые связавших фундаментальное явление конденсации Бозе-Эйнштейна со сверхтекучестью. Идея же сверхпроводимости, трактуемой как сверхтекучесть электронной жидкости, была высказана Ландау в работе [100]. В этой работе был впервые введен спектр элементарных возбуждений сверхтекучей жидкости, который был назван ротонным и который позволил построить статистическую механику сверхтекучего состояния. Для Ландау перенос идей своей работы по сверхтекучести на сверхпроводимость был запрещен различием статистик: Ферми-статистики для электронов в металлах и Бозе-статистики для атомов гелия в жидком гелии II. Ускорить построение теории сверхпроводимости на основе бозе-конденсата могла бы работа Боголюбова по сверхтекучести [101], которая связала явление бозе-конденсата со сверхтекучестью, однако в то время не существовало примера бозе-газа, состоящего из заряженных бозонов, необходимого для сверхпроводимости.

Хорошо известен дальнейший ход событий: в 1950 г. Гинзбургом и Ландау была построена феноменологическая теория сверхпроводимости [102], в которой микроскопический механизм сверхпроводимости не обсуждался, поскольку возможная его природа была неизвестна.

Наконец, в работе Бардина, Купера, Шриффера (БКШ) [16] микроскопический механизм сверхпроводимости был найден – это механизм куперовского спаривания электронов. Куперовские пары, являясь бозонами, казалось бы, могли выполнить роль частиц, из которых состоит бозе-газ, и тем самым объединить теории сверхтекучести и сверхпроводимости. Этого, однако, не случилось. Ответ был дан в самой теории БКШ – размер куперовских пар в металлах оказался так огромен, что в каждой паре содержался миллион других пар. На этом основании аналогия между конденсатом Бозе-Эйнштейна и сверхпроводимостью была в работе [16] отвергнута. Интерес к ней возродился только в 1986 г. после открытия Мюллером и Беднорцем высокотемпературной сверхпроводимости.

Справедливости ради важно подчеркнуть, что возможность образования такого сингулярного квантового состояния, как бозе-конденсат, была предсказана Эйнштейном на основе его обобщения статистики Бозе на случай конечной массы бозе-частицы. Вплоть до работы БКШ в физике конденсированного состояния не было примера заряженного бозона с конечной массой. Первым примером возможного существования таких квазичастиц была куперовская пара, что и дало возможность БКШ построить теорию сверхпроводимости. Куперовская пара, как было отмечено выше, в силу ее перекрытия с другими не могла быть настоящей квазичастицей. По этой же причине как в теории БКШ, так и в теории Боголюбова [103] фигурирует только одноэлектронный спектр возбуждений фермиевского типа. Таким образом, в рамках теории БКШ, как это и было указано ее авторами, теорию бозе-конденсата построить нельзя.

В 70–80-х годах прошлого века в качестве квазичастицы, имеющей свойства заряженного бозона, обладающей массой и способной образовывать бозе-конденсат в узкозонных кристаллах, был рассмотрен биполярон малого радиуса (БПМР) [104].

Работы по сверхпроводимости, основанные на идее бозе-конденсации БПМР, в течение длительного времени развивались Александровым и группой его коллег [37], [58], [40], [105].

Ввиду большой массы ПМР и БПМР температура СП перехода, определяемая температурой образования БЭК, должна быть низкой. На это обстоятельство было обращено внимание в статьях [38], [39], [41], критикующих теорию СП, основанную на ПМР.

После открытия высокотемпературной сверхпроводимости развивались и другие подходы, из которых наибольшую популярность получила теория резонирующих валентных связей (RVB)Андерсона и t-j модель [106, 107].

Несмотря на большую привлекательность этих моделей с точки зрения теории, например возможности на основе одного простого гамильтониана описать как проводящие, так и магнитные свойства кристаллов, для объяснения ВТСП они оказались малоэффективны, в частности, сам факт возможности существования СП фазы в этих моделях не получил надежного доказательства.

Ввиду того, что новейшие эксперименты [42, 43] свидетельствуют о фононной природе механизма сверхпроводимости в ВТСП с рекордными T_c, дальнейшее изложение основано на ЭФВ. Будучи общими, рассматриваемые теоретические подходы могут быть применимы и для других типов взаимодействия, отличных от ЭФВ.

§3 Случай слабого ЭФВ. Теория БКШ

В БКШ решается многоэлектронная задача в предположении, что электроны взаимодействуют только с фононным полем и не взаимодействуют друг с другом. Таким образом, рассматривается ансамбль независимых электронов в фононном поле. Такая картина БКШ обосновывается ферми-жидкостной моделью металла, согласно которой вместо сильно взаимодействующих друг с другом электронов можно рассматривать невзаимодействующие квазичастицы, то есть идеальный ферми-газ в фононном поле. Одноэлектронный гамильтониан Фрелиха (1) в этом случае можно записать в виде, пригодном для описания любого числа электронов:

$$H = \sum_{p,s} \varepsilon_p c^+_{p,s}\, c_{p,s} + \sum_q \omega(q) a^+_q\, a_q + \sum_{\substack{p,q,s \\ p'-p=q}} V_q\, c^+_{p,s} c_{p's} a^+_q + H.c., \qquad (6)$$

$$\varepsilon_p = p^2/2m - E_F\,,\ \omega(q) = s_0 q\ ,$$

где $c^+_{p,s}$, $c_{p,s}$ – операторы рождения и уничтожения электронов с импульсом p и спином s, s_0 – скорость звука. В (6) энергия электронных состояний отсчитывается от уровня Ферми E_F.

В случае металлов, для которых используется БКШ:

$$V_q = G(\omega(q)/2V)^{1/2}\ ,$$

G – константа взаимодействия. Для слабого ЭФВ с использованием теории возмущений операторы фононов a^+_q, a_q можно исключить и получить вместо (6) гамильтониан:

$$H = \sum_{p,s} \varepsilon_p\, c^+_{p,s} c_{ps} + \sum_{p,p',k,s,s'} V_k^2 \frac{\hbar\omega(k)}{\left(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_k\right)^2 - \hbar^2\omega^2(k)}\ c^+_{p+k,s} c^+_{p'-k,s'} c_{p',s'} c_{p,s} \qquad (7)$$

В теории БКШ делается важное приближение: считается, что основной вклад во взаимодействие вносят только процессы в интервале энергий $\left|\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}\right| < \hbar\omega_D$ вблизи уровня Ферми, где ω_D – дебаевская частота фонона. В этом интервале энергий коэффициент перед электронными операторами в члене взаимодействия заменяется константой g.

Теория БКШ основана на выборе пробной функции в виде суперпозиции куперовских пар с $p = -p', s = -s'$. Таким образом, в БКШ вместо (7) рассматривается гамильтониан:

$$H = \sum_{p,s} \varepsilon_p \, c_{p,s}^+ c_{ps} - g \sum_{p,k} c_{p+k,\uparrow}^+ c_{-p-k,\downarrow}^+ c_{-p\downarrow} \, c_{p\uparrow} =$$

$$\sum_{p,s} \varepsilon_p \, c_{p,s}^+ c_{p,s} - g \sum_p c_{p\uparrow}^+ \, c_{-p\downarrow}^+ \sum_{p'} c_{-p'\downarrow} c_{p'\uparrow}. \quad (8)$$

Гамильтониан (8) можно диагонализовать посредством канонического преобразования:

$$c_{p\uparrow} = u_p \xi_{p\uparrow} + v_p \xi_{-p,\downarrow}^+, \;\; c_{-p\downarrow} = u_p \xi_{-p\downarrow} - v_p \xi_{p\uparrow}^+ \, ,$$

$$c_{p\uparrow}^+ = u_p \xi_{p\uparrow}^+ + v_p \xi_{-p\downarrow} \, , \;\; c_{-p\downarrow}^+ = u_p \xi_{-p,\downarrow}^+ - v_p \xi_{p,\uparrow} \, . \quad (9)$$

В результате для гамильтониана (8) получается:

$$H = E_0 + \sum_p E_p \left(\xi_{p\uparrow}^+ \xi_{p\uparrow} + \xi_{-p\downarrow}^+ \xi_{-p\downarrow} \right), \quad (10)$$

$$E_p = \sqrt{(\frac{p^2}{2m} - E_F)^2 + \Delta^2} \, , \qquad \Delta = 2g \, {\sum_p}' u_p \, v_p,$$

$$u_p^2 = 1 - v_p^2 = (1 + \varepsilon_p / E_p)/2,$$

где штрих в выражении для Δ означает, что суммирование ведется по состояниям, лежащим в тонком слое поверхности Ферми, где взаимодействие отлично от нуля, $|v_p|^2$ дает вероятность того, что состояние (p↑, - p↓) занято, а $|u_p|^2$ – вероятность того, что оно свободно.

Полученные результаты отвечают случаю T=0. В частности, энергия основного состояния рассматриваемой системы, отсчитываемая от энергии системы в нормальном состоянии (т.е. с Δ=0), равна:

$$E = <\Psi|\mathrm{H}|\Psi> = -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2, \qquad \Delta = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)g}\right),$$

$$|\Psi> = \prod_{p_1 \dots p_N} (u_p + v_p c_{p\uparrow}^+ c_{-p\downarrow}^+)|0> \, , \quad (11)$$

где N(0) – плотность электронов на уровне Ферми в нормальной фазе, N – число электронов.

Таким образом, образование спаренных состояний приводит к понижению энергии системы на величину $N(0)\Delta^2/2$ и возникновению сверхпроводимости. Из (10) следует, что плотность элементарных возбуждений $\rho(E_p) \to \infty$ при $E_p \to$

Δ. В ТИ-биполяронной теории СП это соответствует образованию бозе-конденсата спаренных электронов с бесконечной плотностью состояний при энергии, равной энергии биполярона, которая отделена щелью от непрерывного спектра возбуждений.

Вопрос о числе спаренных электронов, то есть куперовских пар, в теории БКШ в разных источниках трактуется по-разному. Так, например, часто утверждается (см., например, [108]), что электроны спарены только в узком слое поверхности Ферми так, что их число N_S равно $N_S = \frac{\Delta}{E_F} N$. При $\Delta / E_F \simeq 10^{-4}$ спаренными оказывается лишь небольшая доля электронов.

Теория БКШ, однако, дает однозначный ответ: при T=0 $N_S = \frac{N}{2}$ (что непосредственно следует из выражения для волновой функции (11)), то есть все электроны находятся в спаренном состоянии.

Чтобы разрешить это противоречие, рассмотрим вклад w_p в полную энергию сверхпроводника, который вносит пара в состоянии (p↑, - p↓):

$$w_p = \mathcal{E}_p - E_p \tag{12}$$

Из (12) следует, что $w_{p_F} = -\Delta$. В нормальном состоянии (Δ=0) такая пара вносила бы энергию $w_{p_F}^N = 0$, то есть $\delta w_{p_F} = w_{p_F}^s - w_{p_F}^N = -\Delta$. Соответственно, на дне зоны проводимости, то есть при p=0 из (12) получим: $w_0^s = -2E_F - \Delta^2 / 2E_F$. В нормальном состоянии такая пара вносила бы энергию $w_0^N = -2E_F$. Соответственно, $\delta w_0 = w_0^s - w_0^N = -\Delta^2 / 2E_F$. Отсюда следует, что пары, находящиеся в глубине под поверхностью Ферми вне слоя шириной Δ, в приближении БКШ вносят очень маленький вклад в энергию СП порядка $\delta w_0 / \delta w_{P_F} = \Delta / 2E_F \sim 10^{-4}$ от того вклада, который вносят пары в слое Δ. Таким образом, хотя все электроны в БКШ спарены, их вклад в зависимости от энергии пары будет разным – отличным от нуля он будет только в тонком слое поверхности Ферми. Этим и разрешается указанное выше противоречие: хотя все электроны спарены, вклад в энергию дает только небольшое число пар: $N_S = N\Delta / E_F$, которое и называют «числом пар» в СП.

По этой причине, чтобы не совершить ошибки при расчете какой-либо из характеристик СП, когда ответ неочевиден, следует включать в расчет все спаренные состояния электронов.

Например, при расчете лондоновской глубины проникновения магнитного поля в СП в теории БКШ, в ее расчет следует включать все спаренные состояния электронов, а при расчете критического магнитного поля, при котором происходит разрушение СП, достаточно их оценки в слое Δ.

Отметим, что в недавних экспериментах Божовича [43] было показано, что вклад в лондоновскую глубину проникновения в ВТСП дает только небольшая доля полного числа электронов. Это означает, что теория БКШ к ним неприменима и взаимодействие нельзя считать слабым. Этот вопрос мы рассмотрим в § 11.

§4 Гамильтониан Пекара-Фрёлиха. Канонические преобразования

Прежде чем перейти к изложению теории СП в пределе сильного ЭФВ, дадим краткий обзор результатов теории ТИ-биполяронов.

При описании биполяронов, следуя [69-71], [109], будем исходить из гамильтониана Пекара-Фрёлиха в магнитном поле:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\boldsymbol{p}}_1 - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\widehat{\boldsymbol{p}}_2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}_2\right)^2 + \sum_k \hbar\omega_k^0\, a_k^+ a_k + \qquad (13)$$

$$\sum_k \left(V_k e^{ikr_1}\, a_k + V_k e^{ikr_2} a_k + H.c.\right) + U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|),$$

$$U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) = \frac{e^2}{\epsilon_\infty |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|},$$

где $\widehat{\boldsymbol{p}}_1, \boldsymbol{r}_1, \widehat{\boldsymbol{p}}_2, \boldsymbol{r}_2$ – импульсы и координаты первого и второго электрона, $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)$, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)$ – вектор-потенциал внешнего магнитного поля в точках нахождения первого и второго электронов соответственно; величина U описывает кулоновское отталкивание между электронами. Мы записали Гамильтониан (13) в общем виде. В случае ВТСП, которые являются ионными кристаллами, V_k – функция волнового вектора k, соответствующая взаимодействию электронов с оптическими фононами:

$$V_k = \frac{e}{k}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{\tilde{\epsilon}V}} = \frac{\hbar\omega_0}{ku^{1/2}}\left(\frac{4\pi\alpha}{V}\right)^{1/2}, \qquad u = \left(\frac{2m\omega_0}{\hbar}\right)^{1/2}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}\frac{e^2 u}{\hbar\omega_0\tilde{\epsilon}}, \qquad (14)$$

$$\tilde{\epsilon}^{-1} = \epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_0^{-1}, \quad \omega_k^0 = \omega_0,$$

где e – заряд электрона; ϵ_∞ и ϵ_0 – высокочастотная и статическая диэлектрические проницаемости; α – константа электрон-фононного взаимодействия; V – объем системы, ω_0 – частота оптического фонона.

Ось z выбрана вдоль направления индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$, и используется симметричная калибровка

$$\boldsymbol{A}_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}_j$$

для j = 1.2. Для рассматриваемого ниже синглетного состояния биполярона вклад от спинового слагаемого равен нулю.

В системе центра масс гамильтониан (13) примет вид:

$$H = \frac{1}{2M_e}(\widehat{\boldsymbol{p}}_R - \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}_R)^2 + \frac{1}{2\mu_e}(\widehat{\boldsymbol{p}}_r - \frac{e}{2c}\boldsymbol{A}_r)^2 + \sum_k \hbar\omega_k^0 a_k^+ a_k + \tag{15}$$

$$\sum_k 2V_k \cos\frac{\boldsymbol{kr}}{2}\left(a_k e^{ikR} + H.c.\right) + U(|\boldsymbol{r}|),$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \quad M_e = 2m, \ \mu_e = m/2,$$

$$\boldsymbol{A}_r = \frac{1}{2}B(-y, x, 0), \qquad \boldsymbol{A}_R = \frac{1}{2}\,B(-Y, X, 0),$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_R = \widehat{\boldsymbol{p}}_1 + \widehat{\boldsymbol{p}}_2 = -i\hbar\nabla_{\boldsymbol{R}}, \qquad \widehat{\boldsymbol{p}}_r = \frac{\widehat{\boldsymbol{p}}_1 - \widehat{\mathbf{p}}_2}{2} = -i\hbar\nabla_{\boldsymbol{r}},$$

где x; y и X; Y – компоненты векторов $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ соответственно.

Подвергнем гамильтониан H каноническому преобразованию Гейзенберга [110], [111]:

$$S_1 = \exp i\left(\boldsymbol{G} - \sum_k \boldsymbol{k}\, a_k^+ a_k\right)\boldsymbol{R}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{G} = \widehat{\boldsymbol{P}}_R + \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}_R, \ \ \widehat{\boldsymbol{P}}_R = \widehat{\boldsymbol{p}}_R + \sum_k \hbar\boldsymbol{k} a_k^+ a_k, \tag{17}$$

где $\boldsymbol{G}$ – величина, коммутирующая с гамильтонианом и поэтому являющаяся сохраняющейся величиной, т.е. c-числом, $\widehat{\boldsymbol{P}}_R$ – полный импульс в отсутствие магнитного поля.

В результате действия S_1на оператор поля получим:

$$S_1^{-1} a_k S_1 = a_k e^{-ikR}, \qquad S_1^{-1} a_k^+ S_1 = a_k^+ e^{ikR}. \tag{18}$$

Соответственно, преобразованный гамильтониан $\widetilde{H} = S_1^{-1} H S_1$ примет вид:

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2M_e}(\boldsymbol{G} - \sum_k \hbar\boldsymbol{k} a_k^+ a_k - \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}_R)^2 + \frac{1}{2\mu_e}(\widehat{\boldsymbol{p}}_r - \frac{e}{2c}\boldsymbol{A}_r)^2 + \tag{19}$$

$$\sum_k \hbar\omega_k^0 a_k^0 a_k + \sum_k 2V_k \cos\frac{\boldsymbol{kr}}{2}(a_k + a_k^+) + U(|\boldsymbol{r}|).$$

В дальнейшем будем полагать

$$\boldsymbol{G} = 0. \tag{20}$$

Физический смысл условия (20) состоит в равенстве нулю полного импульса (т.е. отсутствие тока) в объеме образца. Это требование вытекает из эффекта Мейснера, согласно которому ток в объеме СП должен быть равен нулю. Мы используем этот факт в разделе 8 при определении лондоновской глубины проникновения λ.

Будем искать решение стационарного уравнения Шрёдингера, соответствующего гамильтониану (19), в виде:

$$\Psi_H(r,R,\{a_k\}) = \phi(R)\Psi_{H=0}(r,R,\{a_k\}), \tag{21}$$

$$\phi(R) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{2e}{\hbar c}\int_0^{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_{R'}\, d\boldsymbol{R}'\right),$$
$$\Psi_{H=0}(r,R,\{a_k\}) = \psi(r)\Theta(R,\{a_k\}),$$

где $\Psi_{H=0}(r,R,\{a_k\})$ – волновая функция биполярона в отсутствие магнитного поля.

Явный вид функций $\psi\,(r)$ и $\Theta(R,\{a_k\})$ приведён в [44],[69-71].

Усреднение $\widetilde{H}$ по волновым функциям $\phi(R)$ и $\psi(r)$ даёт:

$$\bar{\widetilde{H}} = \frac{1}{2M_e}(\sum_k \hbar \boldsymbol{k} a_k^+ a_k)^2 + \sum_k \hbar\widetilde{\omega}_k\, a_k^+ a_k + \sum_k \bar{V}_k(a_k + a_k^+) + \bar{T} + \bar{U} + \bar{\Pi}, \tag{22}$$

где

$$\bar{T} = \frac{1}{2\mu_e}\langle\psi\left|\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{r}} - \frac{e}{2c}\boldsymbol{A}_r\right)^2\right|\psi\rangle, \qquad \bar{U} = \langle\psi|U(r)|\psi\rangle, \tag{23}$$

$$\hbar\widetilde{\omega}_k = \hbar\omega_k^0 + \frac{2\hbar e}{M_e c}\langle\phi|\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_R|\phi\rangle.$$

В дальнейшем в этом разделе будем полагать ħ=1, $\omega_k^0 = \omega_0 = 1, M_e = 1$. Из (22) следует, что биполяронный гамильтониан отличается от поляронного гамильтониана заменой в последнем величины V_k на $\bar{V}_k$ и добавлением к поляронному гамильтониану $\bar{T}, \bar{U}, \bar{\Pi}$.

С использованием канонического преобразования Ли, Лоу и Пайнса:

$$S_2 = \exp\left\{\sum_k f_k(a_k^+ - a_k)\right\}, \tag{24}$$

где f_k – вариационные параметры, имеющие смысл величины смещения осцилляторов поля из своих равновесных положений:

$$S_2^{-1} a_k S_2 = a_k + f_k, \qquad S_2^{-1} a_k^+ S_2 = a_k^+ + f_k, \tag{25}$$

для гамильтониана $\bar{\bar{\widetilde{H}}}$:

$$\tilde{\tilde{H}} = S_2^{-1} \tilde{H} S_2, \qquad (26)$$

$$\tilde{\tilde{H}} = H_0 + H_1,$$

получим:

$$H_0 = 2\sum_k \bar{V}_k f_k + \sum_k f_k^2 \widetilde{\omega}_k + \frac{1}{2}\left(\sum_k \boldsymbol{k} f_k^2\right)^2 + \mathcal{H}_0 + \bar{T} + \bar{U} + \bar{\Pi},$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_k \omega_k \, a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\sum_{k,k'} \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}' \, f_k f_{k'} \left(a_k a_{k'} + a_k^+ a_{k'}^+ + a_k^+ a_{k'} + a_{k'}^+ a_k\right), \qquad (27)$$

где

$$\omega_k = \widetilde{\omega}_k + \frac{k^2}{2} + \boldsymbol{k} \sum_{k'} \boldsymbol{k}' \, f_{k'}^2. \qquad (28)$$

Гамильтониан H_1 содержит линейные, тройные и четверные по операторам рождения и уничтожения члены. Его явный вид приведён в [44], [75] (см. Приложение).

Далее, как показано в [44], [75], использование канонического преобразования Боголюбова–Тябликова [112] для перехода от операторов a_k^+, a_k к новым операторам α_k^+, α_k:

$$a_k = \sum_{k'} M_{1kk'} \, \alpha_{k'} + \sum_{k'} M_{2kk'}^* \alpha_{k'}^+$$

$$a_k^+ = \sum_{k'} M_{1kk'}^* \alpha_{k'}^+ + \sum_{k'} M_{2kk'} \alpha_{k'}, \qquad (29)$$

в которых $\mathcal{H}_0$ – диагональный оператор, обращает в ноль математическое ожидание H_1 в отсутствие внешнего магнитного поля (см. Приложение). Вклад H_1 в спектр преобразованного гамильтониана, когда магнитное поле отлично от нуля, обсуждается в §5.

В новых операторах α_k^+, α_k гамильтониан (27) примет вид:

$$\tilde{\tilde{\tilde{H}}} = E_{bp} + \sum_k v_k \, \alpha_k^+ \alpha_k,$$

$$E_{bp} = \triangle E_r + 2\sum_k \bar{V}_k \, f_k + \sum_k \widetilde{\omega}_k f_k^2 + \bar{T} + \bar{U} + \bar{\Pi}, \qquad (30)$$

где $\triangle E_r$ – так называемая "энергия отдачи". Общее выражение для $\triangle E_r = \triangle E_r\{f_k\}$ было получено в [75]. Конкретный расчёт энергии основного состояния E_{bp} осуществляется посредством минимизации (30) по f_k и ψ и в отсутствие магнитного поля был проведён в [69-71].

Заметим, что в теории полярона с нарушенной симметрией диагональный электрон-фононный гамильтониан имеет вид (30) [113]. Этот гамильтониан может быть интерпретирован как гамильтониан полярона и системы связанных с ним перенормированных реальных фононов или как гамильтониан, который обладает спектром квазичастичных возбуждений, определяемым (30) [114]. В последнем случае возбуждённые состояния полярона представляют собой фермиевские квазичастицы.

В случае биполярона ситуация становится качественно отличной, поскольку биполярон является бозе-частицей, чей спектр определяется (30). Очевидно, газ из таких частиц может испытывать конденсацию Бозе-Эйнштейна. Трактовка (30) как биполярона и связанных с ним перенормированных фононов не препятствует их БЭК, поскольку требуемое для БЭК постоянство частиц автоматически выполняется ввиду коммутации полного числа перенормированных фононов с гамильтонианом (30).

Входящие в (30) перенормированные частоты v_k, согласно [44], [75], [115], определяются секулярным уравнением для величины s:

$$1 = \frac{2}{3}\sum_k \frac{k^2 f_k^2 \omega_k}{s - \omega_k^2}, \tag{31}$$

решения которого дают спектр значений $s = \{v_k^2\}$.

§ 5 Энергетический спектр ТИ-биполярона

Гамильтониан (30) удобно представить в виде:

$$\tilde{\tilde{\tilde{H}}} = \sum_{n=0,1,2\dots} E_n \alpha_n^+ \alpha_n, \tag{32}$$

$$E_n = \begin{Bmatrix} E_{bp}, \; n = 0; \\ v_n = E_{bp} + \omega_{k_n}, \; n \neq 0; \end{Bmatrix}, \tag{33}$$

где в случае трёхмерного ионного кристалла $\boldsymbol{k}_n$ – вектор с компонентами

$$k_{n_i} = \pm\frac{2\pi(n_i - 1)}{N_{a_i}}, \qquad n_i = 1,2,\dots,\frac{N_{a_i}}{2} + 1, \qquad i = x, y, z, \tag{34}$$

N_{a_i} – число атомов вдоль -ой кристаллографической оси. Докажем справедливость выражения для спектра (32), (33). Поскольку операторы α_n^+, α_n подчиняются бозевским перестановочным соотношениям:

$$\left[\alpha_n, \alpha_{n'}^+\right] = \alpha_n \alpha_{n'}^+ - \alpha_{n'}^+ \alpha_n = \delta_{n,n'}, \qquad (35)$$

то их можно считать операторами рождения и уничтожения ТИ-биполяронов. Энергетический спектр ТИ-биполяронов, согласно (31), определяется уравнением

$$F(s) = 1, \qquad (36)$$

где

$$F(s) = \frac{2}{3} \sum_n \frac{k_n^2 f_{k_n}^2 \omega_{k_n}^2}{s - \omega_{k_n}^2}.$$

Уравнение (36) удобно решать графически (Рис.1):

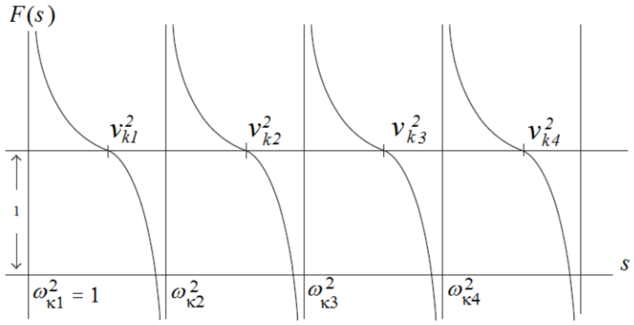


Рис.1. Графическое решение уравнения (36).

Из рис. 1 следует, что частоты v_{k_n} лежат между частотами ω_{k_n} и $\omega_{k_{n+1}}$. Таким образом, спектр v_{k_n}, как и спектр ω_{k_n}, является квазинепрерывным: $v_{k_n} - \omega_{k_n} = 0(N^{-1})$, что и доказывает справедливость (32), (33).

Отсюда следует, что спектр ТИ-биполярона имеет щель между основным состоянием E_{bp} и квазинепрерывным спектром, равную ω_0.

В отсутствие внешнего магнитного поля входящие в выражение для ω_k (28) функции f_k не зависят от направления волнового вектора $\boldsymbol{k}$. При наличии внешнего магнитного поля f_k нельзя считать изотропной величиной, соответственно, нельзя полагать равным нулю последний член в выражении (28) для ω_k. Кроме того, угловая зависимость в спектре ω_k в магнитном поле содержится и в члене $\widetilde{\omega}_k$, входящем в величину ω_k. В силу того что в рассматриваемой изотропной системе имеется только одно выделенное направление, задаваемое вектором $\boldsymbol{B}$, для ω_k из (28) получим:

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M_e} + \frac{\eta}{M_e}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}_n), \tag{37}$$

где η – некоторая скалярная величина. Заметим, что вклад H_1 в спектр (37) приводит к зависимости η от $|\boldsymbol{k}|$ и $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{B})$. Для слабого магнитного поля в длинноволновом пределе (когда применим гамильтониан Фрелиха) мы можем пренебречь такой зависимостью и считать η постоянной величиной.

Для магнитного поля, направленного вдоль оси z, выражение (37) можно представить в виде:

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2M_e}(k_{zn} + k_z^0)^2 + \frac{\hbar^2}{2M_e}\left(k_{xn}^2 + k_{yn}^2\right) - \frac{\eta^2 B^2}{2\hbar^2 M_e}. \tag{38}$$

Отметим, что формулу (38) можно обобщить на актуальный в дальнейшем анизотропный случай, когда в направлениях k_x и k_y: $M_{ex} = M_{ey} = M_{||}$, а в направлении k_z: $M_{ez} = M_{\perp}$ (§8).

Формула (38) в этом случае примет вид:

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2M_{\perp}}(k_{zn} + k_z^0)^2 + \frac{\hbar^2}{2M_{||}}\left(k_{xn}^2 + k_{yn}^2\right) - \frac{\eta^2 B^2}{2\hbar^2 M_{\perp}}, \tag{38$'$}$$

если магнитное поле направлено вдоль оси z, и

$$\omega_{k_n} = \omega_0 + \frac{\hbar^2}{2M_{\perp}}k_{zn}^2 + \frac{\hbar^2}{2M_{||}}(k_{xn} + k_x^0)^2 - \frac{\hbar^2}{2M_{||}}\,k_{yn}^2 - \frac{\eta^2 B^2}{2\hbar^2 M_{||}}\,, \tag{38$''$}$$

если магнитное поле направлено по оси x.

Ниже мы рассмотрим случай низкой концентрации ТИ-биполяронов в кристалле. В этом случае, как будет показано в следующем разделе, с хорошей точностью можно рассматривать их как идеальный бозе-газ, свойства которого определяются гамильтонианом (32).

§ 6 Неидеальный газ ТИ-биполяронов

Будучи заряженным, газ из ТИ-биполяронов никак не может быть идеальным, поскольку между биполяронами должно существовать кулоновское взаимодействие. Из теории неидеального газа известно, что учёт взаимодействия между частицами приводит к качественным изменениям в его спектральных свойствах. Согласно [101], даже в случае короткодействующего взаимодействия учёт последнего приводит к появлению в спектре щели, отсутствующей в идеальном газе. Ещё более значительных изменений можно ожидать при наличии дальнодействующего кулоновского взаимодействия. В этом разделе мы ограничимся отсутствием магнитного поля.

Логическая схема развиваемого ниже подхода такова:

а) вначале рассматривается частный случай, когда имеются только два электрона, взаимодействующих с фононным полем. Это классическая задача о биполяроне [44];

б) затем рассматривается многоэлектронная задача, приводящая к представлению о ферми-жидкости. Для этой многоэлектронной задачи рассматривается случай двух дополнительных электронов, находящихся над поверхностью Ферми (вблизи поверхности) связанных ЭФВ (задача Купера) [116];

в) далее считается, что почти все электроны, лежащие в энергетическом слое $\left[E_F + E_{pol}, E_F\right]$, где E_F – энергия Ферми, E_{pol} – энергия полярона, находятся в ТИ-поляронном состоянии; соответственно, все электроны в узком слое $\left[E_F + E_{bp}/2 - \delta E, E_F + E_{bp}/2 + \delta E\right]$, $\delta E \to 0$, находятся в ТИ-биполяронном состоянии, где E_{bp} – энергия ТИ-биполярона. Сконденсированный биполяронный газ приводит к бесконечной плотности электронных состояний в этом слое;

г) биполяроны рассматриваются как заряженные бозоны, помещённые в электронную ферми-жидкость (поляронный газ), экранирующую взаимодействие между биполяронами, и задача сводится к задаче о неидеальном заряженном бозе-газе;

д) найденный спектр такой задачи используется для расчёта статистических свойств газа из ТИ-биполяронов.

Чтобы построить теорию неидеального газа ТИ-биполяронов, необходимо знать спектр состояний отдельного ТИ-биполярона в полярной среде. Этот вопрос был подробно рассмотрен в [117, 118] (§5). Как показано в [116], этот спектр состояний будет тем же самым, что и ТИ-биполяронов, образующихся вблизи поверхности Ферми. Таким образом, ТИ-биполяроны в слое $[E_F + E_{bp}/2, E_F]$ можно рассматривать как ТИ-биполяронный бозе-газ, находящийся в поляронном газе [119]. Если считать, что ТИ-биполяроны не взаимодействуют друг с другом, то такой газ можно считать идеальным. Его свойства будут полностью определены, если известен спектр отдельного ТИ-биполярона.

При рассмотрении теории идеального газа и сверхпроводимости на основе бозе-частиц из ТИ-биполяронов кулоновское взаимодействие между электронами учитывается только в парах, т.е. при рассмотрении задачи об отдельном биполяроне. Гамильтониан такой системы согласно [44], [118] имеет вид:

$$H_0 = \sum_k \varepsilon_k \alpha_k^+ \alpha_k, \tag{39}$$

$$\varepsilon_k = E_{bp}\Delta_{k,0} + \left(\omega_0 + E_{bp} + k^2/2M_e\right)\left(1 - \Delta_{k,0}\right), \tag{40}$$

где α_k^+, α_k – операторы рождения и уничтожения ТИ-биполяронов: ε_k – спектр ТИ-биполяронов, полученный в §5; $\omega_0(\boldsymbol{k}) = \omega_0$ энергия оптического фонона;

$\Delta_{k,0}$= 1 для k = 0 и $\Delta_{k,0}$= 0 для $k \neq 0$. Выражение (39), (40) можно переписать в виде:

$$H_0 = E_{bp}\alpha_0^+\alpha_0 + \sum_k{}' \left(\omega_0 + E_{bp} + k^2/2M_e\right)\alpha_k^+ \alpha_k, \tag{41}$$

где штрих в сумме в правой части (41) означает, что в суммировании отсутствует член с k = 0. Выделение в (41) члена с k = 0 соответствует выделению бозе-конденсата, где:

$$\alpha_0 = \sqrt{N_0}\ , \tag{42}$$

N_0 – число ТИ-биполяронов в конденсатном состоянии. Таким образом, в теории идеального газа из ТИ-биполяронов первый член есть просто $E_{bp}N_0$. При построении теории неидеального бозе-газа ТИ-биполяронов будем исходить из гамильтониана:

$$H = E_{bp}N_0. + \sum_k{}' \left(\omega_0 + E_{bp}\right)\alpha_k^+ \alpha_k + \sum_k{}' t_k\alpha_k^+ \alpha_k$$
$$+ 1/2V \sum_k{}' V_k\alpha_{k''-k}^+\alpha_{k'+k}^+\alpha_{k''}\alpha_{k'},$$
$$t_k = k^2/2M_e\ , \tag{43}$$

в котором к гамильтониану H_0 (41) добавлен последний член, описывающий взаимодействие биполяронов, V_k– матричный элемент взаимодействия биполяронов. Последние два члена в (43) в точности соответствуют гамильтониану заряженного бозе-газа [120]. Следуя стандартной процедуре выделения бозе-конденсата, получим из (43) гамильтониан:

$$H = E_{bp}N_0 + \sum_k{}' \left(\omega_0 + E_{bp}\right)\alpha_k^+\alpha_k + \tag{44}$$
$$\sum_k{}' [(t_k + n_0V_k)\alpha_k^+\alpha_k + 1/2n_0V_k(\alpha_k\alpha_{-k} + \alpha_k^+\alpha_{-k}^+)],$$

где $n_0 = N_0/V$ – плотность частиц в бозе-конденсате.

Далее, с использованием преобразования Боголюбова:

$$\alpha_k = u_kb_k - v_kb_{-k}^+, \tag{45}$$
$$u_k = [(t_k + n_0V_k + \epsilon_k)/2\epsilon_k]^{1/2},$$
$$v_k = [(t_k + n_0V_k - \epsilon_k)/2\epsilon_k]^{1/2}, \qquad \epsilon_k = [2n_0V_kt_k + t_k^2]^{1/2}$$

в новых операторах получим гамильтониан

$$H = E_{bp}N_0 + U_0 + \sum_k{}' \left(\omega_0 + E_{bp} + \epsilon_k\right) b_k^+ b_k, \qquad (46)$$

$$U_0 = \sum_k{}' (\epsilon_k - t_k - n_0 V_k),$$

где U_0– энергия основного состояния заряженного бозе-газа без учёта его взаимодействия с поляризацией кристалла. Таким образом, спектр возбуждений неидеального газа ТИ-биполяронов имеет вид:

$$E_k = E_{bp} + u_0 + \left(\omega_0(\boldsymbol{k}) + \sqrt{k^4/4M_e^2 + k^2 V_k n_0/M_e}\right)\left(1 - \Delta_{k,0}\right), \qquad (47)$$

где $u_0 = U_n/N$, N – полное число частиц. Если отсчитывать энергию возбуждений от энергии основного состояния биполярона в неидеальном газе, полагая $\Delta_k = E_k - \left(E_{bp} + u_0\right)$, то для Δ_k при $k \neq 0$ получим:

$$\Delta_k = \omega_0(\boldsymbol{k}) + \sqrt{k^4/4M_e^2 + k^2 V_k n_0/M_e}. \qquad (48)$$

Полученный спектр означает, что ТИ-биполяронный газ имеет в спектре щель Δ_k между основным и возбуждёнными состояниями, т.е. обладает сверхтекучестью. Будучи заряженным, такой газ автоматически будет сверхпроводящим. Для определения конкретного вида спектра необходимо знать величину V_k. Если бы мы рассматривали только заряженный бозе-газ с положительным однородным фоном, создаваемым жёстким ионным остовом, то входящая в (47) величина V_k в отсутствие экранировки была бы равна $V_k = 4\pi e_B^2/k^2$, соответственно, второй член в подкоренном выражении (47) был бы равен $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e_B^2/M_e$, где ω_p – плазменная частота бозонного газа, e_B – заряд бозона ($2e$ – для ТИ-биполярона). В действительности, если учесть экранировку, то V_k примет вид $V_k = 4\pi e^2/k^2\epsilon_B(k)$, где $\epsilon_B(k)$ – диэлектрическая проницаемость заряженного бозе-газа, которая была вычислена в [121], [122]. Полученное для $\epsilon_B(k)$ в [121], [122] выражение слишком громоздко и здесь не приводится. В рассматриваемом нами случае бозе-газа ТИ-биполяронов такая модификация V_k, однако, недостаточна. Как было показано в [116] (§7), биполяроны составляют лишь небольшую часть заряженных частиц в системе. Их основная доля приходится на электронный газ, в который погружены биполяроны. Именно электронный газ даёт основной вклад в экранировку взаимодействия между биполяронами. Для учёта такой экранировки для V_k нужно использовать выражение $V_k = 4\pi e^2/k^2\epsilon_B(k)\epsilon_e(k)$, где $\epsilon_e(k)$ – диэлектрическая проницаемость электронного газа. Наконец, если учесть подвижность ионного остова, то окончательно величина V_k примет вид: $V_k = 4\pi e^2/k^2\epsilon_B(k)\epsilon_e(k)\epsilon_\infty\epsilon_0$, где $\epsilon_\infty, \epsilon_0$ – высокочастотная и статическая диэлектрические постоянные.

В результате для Δ_k получим:

$$\Delta_k = \omega_0(\boldsymbol{k}) + k^2/2M_e\sqrt{1+\chi(k)}, \quad (49)$$

$$\chi(k) = \left(2M_e\omega_p\right)^2/k^4\epsilon_B(k)\epsilon_e(k)\epsilon_\infty\epsilon_0. \quad (50)$$

Для оценки величины $\chi(k)$ в (49) рассмотрим длинноволновый предел. В этом пределе $\epsilon_e(k)$ имеет томас-фермиевский вид: $\epsilon_e(k) = 1 + \varkappa^2/k^2$, где $\varkappa = 0{,}815k_F(r_s/a_B)^{1/2}, a_B = \hbar^2/M_e e_B^2,\ r_s = (3/4\pi n_0)^{1/3}$, соответственно, согласно [121], [122], величина $\epsilon_B(k)$ равна: $\epsilon_B(k) = 1 + q_s^4/k^4, q_s = \sqrt{2M_e\omega_p}$.

Учитывая, что при вычислении термодинамических функций основной вклад дают значения k: $k^2/2M_e \approx T$, где T – температура, для величины $\chi(k)$ получим оценку $\chi \sim T/E_F\epsilon_\infty\epsilon_0$ где E_F –энергия Ферми. Таким образом, спектр экранированного ТИ-биполяронного газа мало отличается от спектра идеального газа ТИ-биполяронов (40). Заметим, что в силу экранировки величина корреляционной энергии u_0 в (48) оказывается много меньше, чем вычисленная без учёта экранировки в [120] и, для реальных значений параметров, много меньше, чем энергия биполярона $|E_{bp}|$. Отметим также, что в силу экранировки газ из ТИ-биполяронов не переходит в вигнеровский кристалл при сколь угодно малой плотности биполяронов.

§7 Статистическая термодинамика газа ТИ-биполяронов низкой плотности

В соответствии с результатом предыдущего раздела рассмотрим идеальный бозе-газ ТИ-биполяронов, представляющий собой систему из N-частиц, находящихся в объёме V [117, 118]. Обозначим через N_0 число частиц в нижнем одночастичном состоянии, а через N' – число частиц в более высоких состояниях. Тогда:

$$N = \sum_{n=0,1,2,\ldots} \bar{m}_n = \sum_n \frac{1}{e^{(E_n-\mu)/T}-1}, \quad (51)$$

или:

$$N = N_0 + N',\ \ N_0 = \frac{1}{e^{\frac{(E_{bp}-\mu)}{T}}-1},$$

$$N' = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{e^{(E_n-\mu)/T}-1}\ . \quad (52)$$

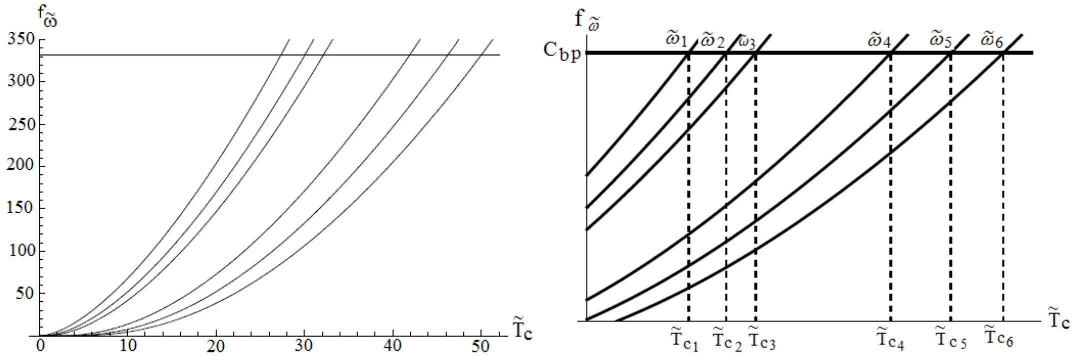


Рис. 2. Решение уравнения (53) с $C_{bp} = 331.3$ и $\tilde{\omega}_i = \{0.2; 1; 2; 10; 15; 20\}$, которым соответствует $\tilde{T}_{c_i}$: $\tilde{T}_{c_1} = 27.3$; $\tilde{T}_{c_2} = 30$; $\tilde{T}_{c_3} = 32$; $\tilde{T}_{c_4} = 42$; $\tilde{T}_{c_5} = 46.2$; $\tilde{T}_{c_6} = 50$.

Заменяя в выражении для N' (52) суммирование на интегрирование по квазинепрерывному спектру (32), (33), (38) и полагая в (52) $\mu = E_{bp}$, получим из (51), (52) уравнение для определения критической температуры бозе-конденсации T_c:

$$C_{bp} = f_{\tilde{\omega}_H}(\tilde{T}_c), \tag{53}$$

$$f_{\tilde{\omega}_H}(\tilde{T}_c) = \tilde{T}_c^{3/2} F_{3/2}(\tilde{\omega}_H/\tilde{T}_c), \qquad F_{3/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{x+\alpha} - 1},$$

$$C_{bp} = \left(\frac{n^{2/3} 2\pi\hbar^2}{M_e \omega^*}\right)^{3/2}, \tilde{\omega}_H = \frac{\omega_0 - \eta^2 H^2/2M_e}{\omega^*}, \qquad \tilde{T}_c = \frac{T_c}{\omega^*},$$

где n=N/V. В этом разделе мы рассмотрим случай отсутствия магнитного поля: H=0. На рис. 2 приведено графическое решение уравнения (53) для значений параметров $M_e = 2m = 2m_0$, где m_0 – масса свободного электрона в вакууме, $\omega^* = 5$мэВ$(\approx 58$К$), n = 10^{21}$см$^{-3}$ и значений: $\tilde{\omega}_1 = 0.2$; $\tilde{\omega}_2 = 1$; $\tilde{\omega}_3 = 2$; $\tilde{\omega}_4 = 10$; $\tilde{\omega}_5 = 15$; $\tilde{\omega}_6 = 20$; $\tilde{\omega}_H = \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0/\omega^*, \omega_{H_{cr}} = \omega_H$ для $\tilde{T} = \tilde{T}_C$.

Из рис. 2 следует, что критическая температура растёт с ростом фононной частоты $\tilde{\omega}_0$. Соответствующие выбранным значениям параметров отношения критических температур T_{ci}/ω_{0i} приведены в таблице I. Из таблицы I следует вывод о том, что критическая температура ТИ-биполяронного газа всегда выше, чем в случае идеального бозе-газа (ИБГ). Из рис. 2 также следует, что увеличение концентрации ТИ-биполяронов n будет приводить к увеличению критической температуры, а увеличение массы электрона m – к её снижению.

При $\tilde{\omega} = 0$ результаты переходят в известный предел ИБГ. В частности, из (53) при $\tilde{\omega} = 0$ следует выражение для критической температуры ИБГ:

$$T_c = 3.31\hbar^2 n^{2/3}/M_e. \tag{54}$$

Таблица 1. Рассчитанные значения характеристик бозе-газа ТИ-биполяронов с концентрацией $n = 10^{21}\text{см}^{-3}$. $\widetilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega^*}, \omega^* = 5\text{мэВ}, \omega_i$ — энергия оптического фонона; T_{c_i} — критическая температура перехода, q_i – скрытая теплота перехода из конденсатного в надконденсатное состояние; $-\Delta(\partial C_{vi}/\partial \tilde{T}) = \partial C_{vi}/\partial \tilde{T}|_{\tilde{T}=T_{c_i}+0} - \partial C_{vi}/\partial \tilde{T}|_{\tilde{T}=T_{c_i}-0}$ — скачок теплоемкости при СП переходе, $\widetilde{T} = T/\omega^*$; $C_{v,i}(T_c - 0)$ — теплоемкость в фазе СП в критической точке; $C_s = C_v(T_c - 0)$, $C_n = C_v(T_c + 0)$. Расчеты проведены для концентрации ТИ-биполяронов $n = 10^{21}\text{см}^{-3}$ и эффективной массы зонного электрона $m = m_0$. В таблице приведены также значения концентраций ТИ-биполяронов n_{bpi} для ВТСП $YBa_2Cu_3O_7$ исходя из экспериментального значения температуры перехода T_c= 93*K*.

i	0	1	2	3	4	5	6
$\widetilde{\omega}_i$	0	0.2	1	2	10	15	20
T_{ci}/ω_{0i}	∞	136.6	30	16	4.2	3	2.5
q_i/T_{ci}	1.3	1.44	1.64	1.8	2.5	2.8	3
$-\Delta(\partial C_{vi}/\partial \tilde{T})$	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.15	0.15
$C_{vi}(T_c - 0)$	1.9	2.16	2.46	2.7	3.74	4.2	1,6
$(C_s - C_n)/C_n$	0	0.16	0.36	0.52	1.23	1.53	1.8
$n_{bp_i}.cm^3$	$16 \cdot 10^{19}$	$9.4 \cdot 10^{18}$	$4.2 \cdot 10^{18}$	$2.0 \cdot 10^{18}$	$1.2 \cdot 10^{17}$	$5.2 \cdot 10^{14}$	$2.3 \cdot 10^{13}$

Подчеркнём, однако, что в (54) входит $M_e = 2m$, а не масса биполярона. Это снимает проблему низкой температуры конденсации, возникающей как в теории ПМР, так и в теории ПБР, в которых в выражении (54) фигурирует масса биполярона [37], [58], [123-128]. Другой важный результат состоит в том, что критическая температура T_c для выбранных значений параметров значительно превосходит энергию щели ω_0.

Из (51), (52) следует, что:

$$\frac{N'(\widetilde{\omega})}{N} = \frac{\tilde{T}^{\frac{3}{2}}}{C_{bp}} F_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\tilde{T}}\right), \tag{55}$$

$$\frac{N_0(\widetilde{\omega})}{N} = 1 - \frac{N'(\widetilde{\omega})}{N}. \tag{56}$$

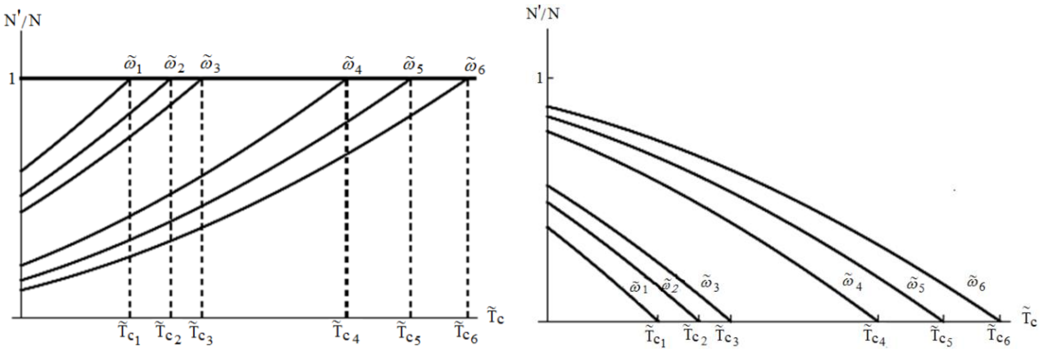


Рис. 3. Температурные зависимости относительного числа надконденсатных частиц N'/N и частиц, находящихся в конденсате $N_0/N = 1 - N'/N,$ для значений параметров $\widetilde{\omega}_i$, приведённых на рис. 2.

На рис. 3 приведены температурные зависимости числа надконденсатных частиц N' и числа частиц, находящихся в конденсате N_0 для вышеуказанных значений параметров $\widetilde{\omega}_i$.

Из рис. 3 следует, что, как и следовало ожидать, число частиц в конденсате растёт с увеличением щели $\widetilde{\omega}_i$.

Энергия ТИ-биполяронного газа E определяется выражением

$$E = \sum_{n=0,1,2\ldots} \bar{m}_n E_n = E_{bp} N_0 + \sum_{n \neq 0} \bar{m}_n E_{n.} \quad (57)$$

С использованием (32), (33) для удельной энергии (т.е. энергии, приходящейся на один ТИ-биполярон) $\tilde{E}(\tilde{T}) = E/N\omega^*$, $\tilde{E}_{bp} = E_{bp}/\omega^*$ из (57) получим:

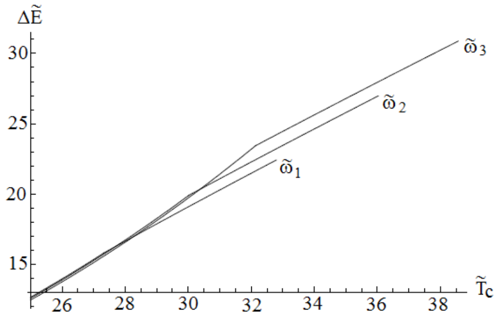
$$\tilde{E}(\tilde{T}) = \tilde{E}_{bp} + \frac{\tilde{T}^{5/2}}{C_{bp}} F_{3/2}\left(\frac{\widetilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}}\right)\left[\frac{\widetilde{\omega}}{\tilde{T}} + \frac{F_{5/2}\left(\frac{\widetilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}}\right)}{F_{3/2}\left(\frac{\widetilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}}\right)}\right], \quad (58)$$

$$F_{5/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{x+\alpha} - 1},$$

где $\tilde{\mu}$ определяется из уравнения:

$$\tilde{T}^{3/2} F_{3/2}\left(\frac{\widetilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}}\right) = C_{bp}\ , \quad (59)$$

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} 0, & \tilde{T} \leq \tilde{T}_c; \\ \tilde{\mu}(\tilde{T}), & \tilde{T} \geq \tilde{T}_c \end{cases}.$$



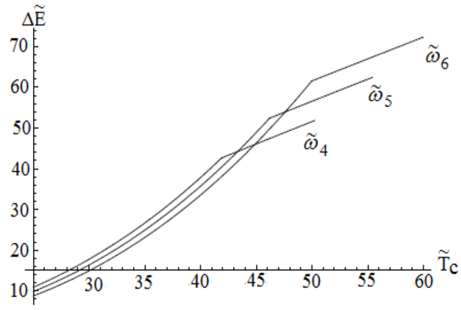


Рис. 4. Температурные зависимости $\Delta\tilde{E}(\tilde{T}) = \tilde{E}(\tilde{T}) - \tilde{E}_{bp}$ для значений параметров $\widetilde{\omega}_i$, приведённых на рис. 2,3.

Связь $\tilde{\mu}$ с химическим потенциалом системы μ даётся соотношением $\tilde{\mu} = (\mu - E_{bp})/\omega^*$. Из (58)-(59) также следуют выражения для свободной энергии: $F = -2E/3$ и энтропии $S = -\partial F/\partial T$.

На рис. 4 приведены температурные зависимости $\Delta\tilde{E} = \tilde{E} - \tilde{E}_{bp}$ для вышеуказанных значений параметров $\widetilde{\omega}_i$. Точки излома на кривых $\Delta\tilde{E}_i(\tilde{T})$ соответствуют значениям критических температур T_{ci}.

Полученные зависимости позволяют найти теплоёмкость ТИ-биполяроного газа: $C_v(\tilde{T}) = d\tilde{E}/d\tilde{T}$. Из (27) для $C_v(\tilde{T})$ при $\tilde{T} \le \tilde{T}_c$ получим:

$$C_v(\tilde{T}) = \frac{\tilde{T}^{3/2}}{2C_{bp}}\left[\frac{\widetilde{\omega}^2}{\tilde{T}^2}F_{1/2}\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\tilde{T}}\right) + 6\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\tilde{T}}\right)F_{3/2}\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\tilde{T}}\right) + 5F_{5/2}\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\tilde{T}}\right)\right], \qquad (60)$$

$$F_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dx}{e^{x+\alpha} - 1}.$$

Из (60) следует известная экспоненциальная зависимость теплоёмкости при низких температурах $C_v \sim \exp(-\omega_0/T)$, обусловленная наличием энергетической щели ω_0.

На рис. 5 приведены температурные зависимости теплоёмкости $C_v(\tilde{T})$ для вышеуказанных значений параметров $\widetilde{\omega}_i$. В таблице 1 для значений параметров $\widetilde{\omega}_i$ приведены величины скачков теплоёмкости:

$$\Delta\frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial\tilde{T}} = \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial\tilde{T}}\Big|_{\tilde{T}=\tilde{T}_c+0} - \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial\tilde{T}}\Big|_{\tilde{T}=\tilde{T}_c-0} \qquad (61)$$

в точках перехода.

Полученные зависимости позволяют найти скрытую теплоту перехода q=TS, S − энтропия надконденсатных частиц. В точке перехода эта величина равна $q = 2T_cC_v(T_C - 0)/3$, где $C_v(T)$ определяется формулой (60) и для вышеуказанных значений параметров $\widetilde{\omega}_i$ приведена в Таблице 1.

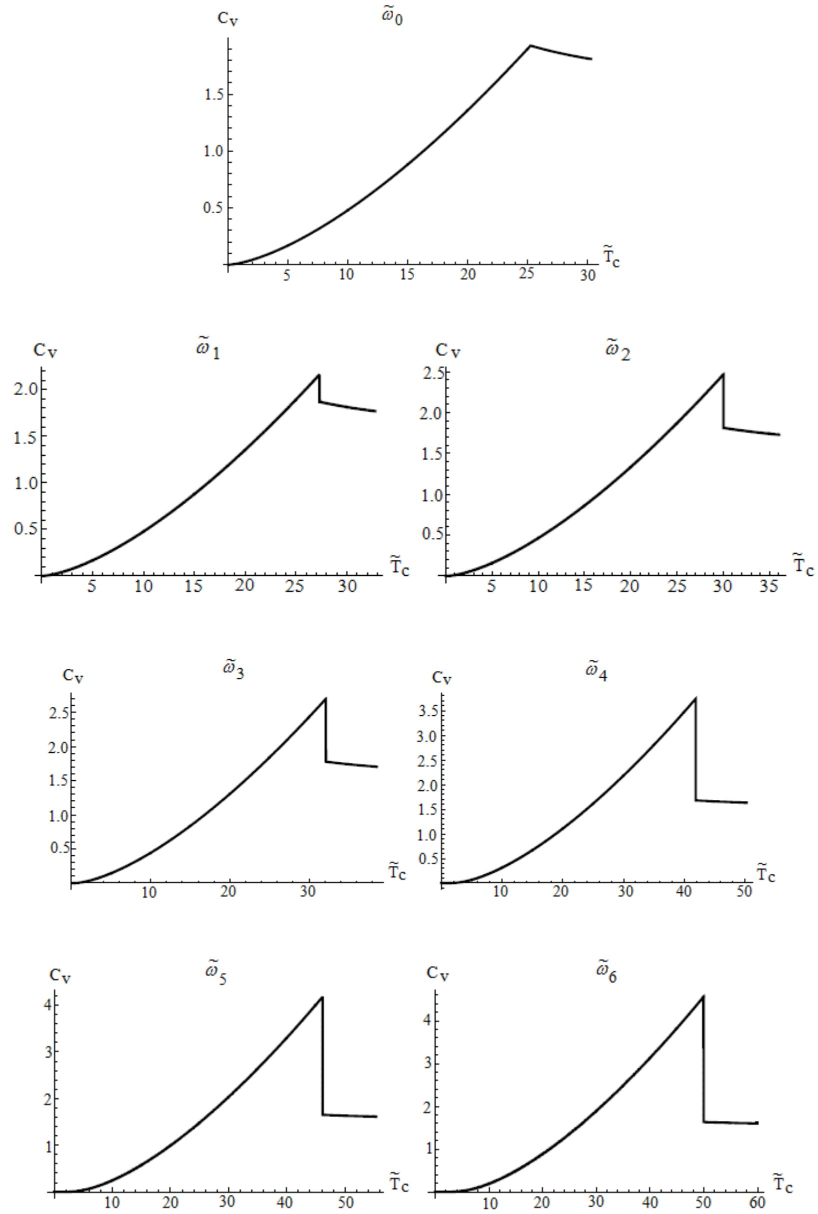


Рис. 5. Температурные зависимости теплоёмкости для различных значений параметров $\tilde{\omega}_i$: ω_0=0; $\tilde{T}_C = 25.2$; $C_v(\tilde{T}_{c0}) = 2$;

$$\omega_1 = 0.2;\ \tilde{T}_{c_1} = 27.3;\ C_v(\tilde{T}_{c1} - 0) = 2.16;\ C_v(\tilde{T}_{c1} + 0) = 1.9;$$

$$\omega_2 = 1;\ \tilde{T}_{c_2} = 30;\ C_v(\tilde{T}_{c2} - 0) = 2.46;\ C_v(\tilde{T}_{c2} + 0) = 1.8;$$

$$\omega_3 = 2;\ \tilde{T}_{c_3} = 32.1;\ C_v(\tilde{T}_{c3} - 0) = 2.7;\ C_v(\tilde{T}_{c3} + 0) = 1.78;$$

$$\omega_4 = 10;\ \tilde{T}_{c_4} = 41.9;\ C_v(\tilde{T}_{c4} - 0) = 3.7;\ C_v(\tilde{T}_{c4} + 0) = 1.7;$$

$$\omega_5 = 15;\ \tilde{T}_{c_5} = 46.2;\ C_v(\tilde{T}_{c5} - 0) = 4.2;\ C_v(\tilde{T}_{c5} + 0) = 1.65;$$

$$\omega_6 = 20;\ \tilde{T}_{c_6} = 50;\ C_v(\tilde{T}_{c6} - 0) = 4.6;\ C_v(\tilde{T}_{c6} + 0) = 1.6.$$

§8 Токовые состояния ТИ-биполяронного газа

Как известно, отсутствие магнитного поля в объёме сверхпроводника обусловлено существованием компенсирующих это поле поверхностных токов. Так, из условия (20) следует, что:

$$\boldsymbol{P}_R = -\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}_R, \tag{62}$$

т.е. в сверхпроводнике существует незатухающий ток $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{j} = 2en_0\boldsymbol{P}_R/M_e^* = -\frac{4e^2n_0}{M_e^*c}\boldsymbol{A}_R \tag{63}$$

(где M_e^* − эффективная масса биполярона), приводящий к эффекту Мейснера, где n_0 – концентрация сверхпроводящих носителей тока: $n_0 = N_0/V$. Сравнивая (63) с известным феноменологическим выражением для поверхностного тока $\boldsymbol{j}_S$ [129]:

$$\boldsymbol{j}_S = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\boldsymbol{A}, \tag{64}$$

и полагая $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_R$, из равенства $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_S$ из (63), (64) получим известное выражение для лондоновской глубины проникновения λ:

$$\lambda = \left(\frac{M_e^*c^2}{16\pi e^2 n_0}\right)^{1/2}. \tag{65}$$

Равенство «микроскопического» выражения для тока (63) его «макроскопическому» значению не может быть точным. Соответственно, равенство $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_R$ также является приближённым, так как $\boldsymbol{A}_R$ представляет собой вектор-потенциал в точке, где находится центр масс двух электронов, в то время как в теории Лондонов $\boldsymbol{A}_R$ – это вектор-потенциал в точке, где находится частица. По этой причине более реальным было бы считать рассматриваемые величины пропорциональными. В этом случае выражение для глубины проникновения имеет вид:

$$\lambda = \mathrm{const}\left(\frac{M_e^*c^2}{16\pi e^2 n_0}\right)^{1/2}, \tag{65$'$}$$

где постоянный множитель (порядка 1) в $(65')$ должен определяться из сравнения с экспериментом.

Выражение (62) было получено в случае изотропной эффективной массы носителей тока. В действительности оно имеет более общий характер и не изменяется при учёте анизотропии эффективных масс. Так, например, в слоистых ВТСП материалах кинетическая энергия носителей тока в гамильтониане (13) должна быть заменена выражением:

$$T_a = \frac{1}{2m_{||}^*}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{1||} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}_1\right)^2 + \frac{1}{2m_{||}^*}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{2||} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}_2\right)^2 + \tag{66}$$

$$\frac{1}{2m_{\perp}^*}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{1\perp} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}_{1z}\right)^2 + \frac{1}{2m_{\perp}^*}\left(\hat{\boldsymbol{p}}_{2\perp} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}_{1z}\right)^2,$$

где $\hat{\boldsymbol{p}}_{1,2||}, \boldsymbol{A}_{1,2||}$ – операторы импульса и вектора-потенциала в плоскостях слоёв (ав–плоскостях); $\hat{\boldsymbol{p}}_{1,2\perp}$, $\boldsymbol{A}_{1,2\perp}$ – соответствующие величины в перпендикулярном плоскостям направлении (вдоль оси с); $m_{||}^*, m_{\perp}^*$ – эффективные массы в плоскостях и в перпендикулярном направлении.

В результате преобразования:

$$\tilde{x} = x,\quad \tilde{y} = y,\quad \tilde{z} = \gamma z \tag{67}$$

$$\tilde{A}_{\tilde{x}} = A_x,\quad \tilde{A}_{\tilde{y}} = A_y,\quad \tilde{A}_{\tilde{z}} = \gamma^{-1} A_z,$$

$$\tilde{p}_{\tilde{x}} = p_x,\quad \tilde{p}_{\tilde{y}} = p_y,\quad \tilde{p}_{\tilde{z}} = \gamma^{-1} p_z,$$

где $\gamma^2 = m_{\perp}^*/m_{||}^*$, γ – параметр анизотропии, кинетическая энергия $\tilde{T}_a$ оказывается изотропной. Отсюда следует, что: $\widetilde{\boldsymbol{P}}_R + (2e/c)\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tilde{R}} = 0$. Тогда из (67) следует, что соотношение (62) оказывается справедливым и в анизотропном случае. Из сказанного следует, что:

$$\boldsymbol{P}_{R||} = -\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}_{R||},\quad \boldsymbol{P}_{R\perp} = -\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}_{\perp},$$

$$\boldsymbol{j}_{||} = 2en_0\boldsymbol{P}_{R||}/M_{e||}^*,\qquad \boldsymbol{j}_{\perp} = 2en_0\boldsymbol{P}_{R\perp}/M_{e\perp}^*. \tag{68}$$

Магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости слоёв, будет индуцировать токи, текущие в плоскости слоёв. При проникновении в образец такое поле будет затухать вдоль плоскости слоёв. Обозначим лондоновскую длину проникновения для магнитного поля перпендикулярного плоскости слоёв ($H_{\perp}$) через $\lambda_{\perp}$, а для магнитного поля, параллельного плоскости слоёв ($H_{||}$), через $\lambda_{||}$.

Отсюда вытекают выражения для лондоновских длин проникновения магнитного поля в образец:

$$\lambda_{\perp} = \left(\frac{M_{e\perp}^* c^2}{16\pi e^2 n_0}\right)^{1/2},\qquad \lambda_{||} = \left(\frac{M_{e||}^* c^2}{16\pi e^2 n_0}\right)^{1/2}. \tag{69}$$

Для $\lambda_{||}$ и $\lambda_{\perp}$ часто используют также обозначения λ_{ab} и λ_c соответственно. Из (69) следует, что :

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{||}} = \left(\frac{M^*_{e\perp}}{M^*_{e||}}\right)^{1/2} = \gamma^*. \tag{70}$$

Из (69) также следует, что лондоновская длина проникновения зависит от температуры:

$$\lambda^2(0)/\lambda^2(T) = n_0(T)/n_0(0). \tag{71}$$

В частности, при ω=0 с использованием (54) получим: $\lambda(T)$=λ(0) $\left(1-(T/T_C)^{3/2}\right)^{-1/2}$. Сравнение полученной зависимости с другими подходами даётся в §11.

Обычно считается, что бозе-система становится сверхпроводящей вследствие взаимодействия между частицами. Существование щели в спектре ТИ-биполяронов может приводить к их конденсации даже в отсутствие взаимодействия между частицами, и критерий сверхтекучести Ландау

$$v = \hbar\omega_0/\text{Ƥ} \tag{72}$$

где Ƥ – удельный импульс биполяронного конденсата, может выполняться даже для невзаимодействующих частиц. Из условия (72) вытекает выражение для максимальной величины плотности тока $j_{\max} = env_{\max}$:

$$j_{\max} = en_0\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{M^*_e}}. \tag{73}$$

В заключение этого раздела отметим, что все сказанное относилось к локальной электродинамике. Соответственно, выражения, полученные для λ, справедливы только при условии λ $>>\xi$, где ξ – корреляционная длина, определяющая характерный размер пары, т.е. характерный масштаб изменения волновой функции ψ(r) в (21). Это условие, как правило, выполняется в ВТСП материалах. В обычных сверхпроводниках выполняется обратное неравенство. Нелокальное обобщение электродинамики сверхпроводников было сделано Пиппардом [130], согласно которому связь между $\boldsymbol{j_S}$ и $\boldsymbol{A}$ в выражении (64) может быть записана в виде:

$$\boldsymbol{j}_S = \int Q(r-r')\boldsymbol{A}(r')d\boldsymbol{r}', \tag{74}$$

где Q – некоторый оператор, радиус действия которого обычно полагается равным ξ . В пределе ξ >>λ это приводит к увеличению абсолютного значения длины проникновения магнитного поля в сверхпроводник, которое становится равным $(\lambda^2\xi)^{1/3}$ [130].

§ 9 Термодинамические свойства ТИ-биполяронного газа в магнитном поле

То, что бозе-конденсация идеального бозе-газа в магнитном поле невозможна [131], не означает, что механизм БЭК нельзя использовать при описании сверхпроводимости в магнитном поле. Это следует из того факта, что в объёме сверхпроводника магнитное поле тождественно равно нулю. В то же время, отвлекаясь от проблемы сверхпроводимости, нет никаких препятствий рассматривать бозе-газ помещённым в магнитное поле. Представляет интерес исследовать этот вопрос применительно к газу из ТИ-биполяронов.

Прежде всего отметим, что из выражения для $\widetilde{\omega}_H$, даваемого (53), следует, что при $\omega_0 = 0$ бозе-конденсация ТИ-биполяронов оказывается невозможной, если $H \neq 0$. Для обычного идеального заряженного бозе-газа этот вывод был впервые сделан в [131]. Вследствие того что в спектре ТИ-биполяронов имеется щель между основным и возбуждёнными состояниями (§5), для газа ТИ-биполяронов этот вывод при $\omega_0 \neq 0$ становится несправедлив.

Из выражения для $\widetilde{\omega}_H$ (53) следует, что существует максимальная величина магнитного поля H_{max}, равная:

$$H_{max}^2 = \frac{2\omega_0 \hbar^2 M_e}{\eta^2}. \qquad (75)$$

При $H > H_{max}$ однородное сверхпроводящее состояние невозможно. Как это следует из (23), (28), величина η состоит из двух частей: $\eta = \eta' + \eta''$. Величина η' опеределяется интегралом, входящим в выражение для $\widetilde{\omega}_k$ (28). По этой причине η' зависит от формы поверхности образца. Величина η'' определяется суммой, входящей в выражение для $\widetilde{\omega}_k$ (28), и слабо зависит от формы поверхности образца. Отсюда следует, что величина η может меняться при изменении формы поверхности образца и тем самым приводить к изменению величины H_{max}. С использованием (75) для $\widetilde{\omega}_H$, определяемой (53), получим:

$$\widetilde{\omega}_H = \widetilde{\omega}(1 - H^2/H_{max}^2). \qquad (76)$$

Для заданной температуры Т обозначим H_{cr}(Т) величину магнитного поля, при которой сверхпроводимость исчезает. Этому значению поля, согласно (76), соответствует $\widetilde{\omega}_{H_{cr}}$:

$$\widetilde{\omega}_{H_{cr}}(T) = \widetilde{\omega}(1 - H_{cr}^2(T)/H_{max}^2). \qquad (77)$$

Температурная зависимость величины $\widetilde{\omega}_{H_{cr}}(T)$ может быть найдена из уравнения (53):

$$C_{bp} = \tilde{T}^{\frac{3}{2}} F_{\frac{3}{2}}\big(\widetilde{\omega}_{H_{cr}}(\tilde{T})/\tilde{T}\big).$$

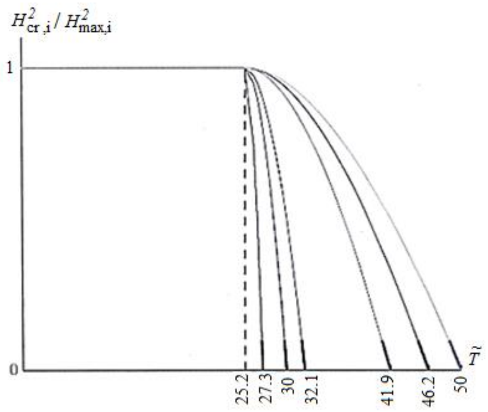


Рис. 6. Температурная зависимость $H^2_{cr,i}/H^2_{max,i}$ на интервале $\left[0;T_{c,i}\right]$ для значений параметров $\widetilde{\omega}_i$, данных на рис. 2.

Она имеет вид, приведённый на рис. 2.

С использованием (75) и температурной зависимости, приведённой на рис. 2, можно найти температурную зависимость $H_{cr}(\tilde{T})$:

$$\frac{H^2_{cr}(\tilde{T})}{H^2_{max}} = 1 - \omega_{H_{cr}}(\tilde{T})/\widetilde{\omega}. \qquad (78)$$

Для $\tilde{T} \leq \tilde{T}_{ci}$ эти зависимости приведены на рис. 6.

Согласно рис. 6, $H_{cr}(\tilde{T})$ достигает своего максимума при конечной температуре $\tilde{T}_c(\widetilde{\omega} = 0) \leq \tilde{T}_c(\omega_{0i})$. Из рис. 6 следует, что при температуре ниже чем $\tilde{T}_c(\widetilde{\omega} = 0) = 25.24$ дальнейшее понижение температуры уже не изменяет величины критического поля $H_{cr}(\tilde{T})$ независимо от величины щели $\widetilde{\omega}$.

Введём также понятие температуры перехода $T_c(H)$ в магнитном поле H. На рис. 7 приведены зависимости $T_c(H)$, вытекающие из рис. 6 и определяемые соотношениями:

$$C_{bp} = \tilde{T}^{3/2}_{c,i}(H)F_{3/2}\left(\widetilde{\omega}_{H,i}/\tilde{T}_{c,i}(H)\right),\ \ \widetilde{\omega}_{H,i} = \widetilde{\omega}_{H=0,i}\left[1 - H^2/H^2_{max,i}\right].$$

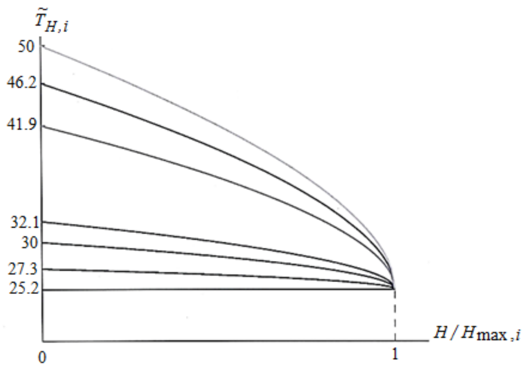


Рис. 7. Зависимость критической температуры перехода $\tilde{T}_{H,i}$ от магнитного поля H для значений параметров $\widetilde{\omega}_i$, используемых для рис. 2.

Из рис. 7 следует, что критическая температура перехода $\tilde{T}_c(H)$ изменяется скачком при достижении магнитным полем значения $H_{max,i}$.

Для решения вопроса о типе фазового перехода в магнитном поле будем исходить из известного соотношения, связывающего свободные энергии в сверхпроводящем и нормальном состояниях:

$$F_s + \frac{H^2}{8\pi} = F_{N,} \qquad 79)$$

где F_s и F_N – свободные энергии единицы объёма сверхпроводящего и нормального состояний соответственно:

$$F_s = \frac{N}{V} E_{bp}(H = 0) - \frac{2}{3} \Delta E(\omega_{H=0}) \frac{N}{V},$$

$$F_N = \frac{N}{V} E_{bp}(H) - \frac{2}{3} \Delta E(\omega_H) \frac{N}{V},$$

где $\Delta E = E - E_{bp}$, $E = \omega^* \tilde{E}$, где $\tilde{E}$ определяется формулой (58). Дифференцируя (79) по температуре и учитывая, что $S = -\partial F/\partial T$, для теплоты перехода q получим:

$$q = T(S_N - S_S) = -T\partial(F_N - F_S)/\partial T = -T \frac{H_{cr}}{4\pi} \frac{\partial H_{cr}}{\partial T}. \qquad (80)$$

Соответственно, для разности энтропий $S_S - S_N$ получим:

$$S_S - S_N = \frac{H_{cr}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T} \right) = \frac{H_{max}^2}{8\pi\omega^*} (\tilde{S}_S - \tilde{S}_N). \qquad (81)$$

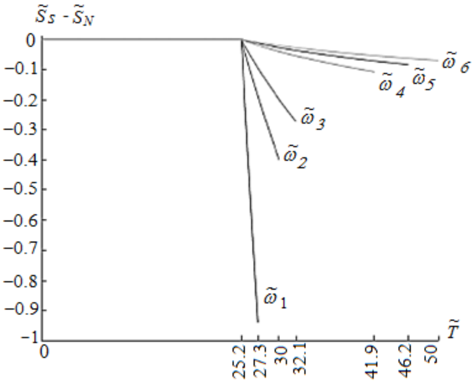


Рис. 8. Температурные зависимости разностей энтропий в сверхпроводящем и нормальном состояниях для параметров $\tilde{\omega}_i$, используемых для рис. 6,7.

На рис. 8 показана зависимость разности энтропий (81) от температуры для различных значений критических температур $T_c(\tilde{\omega}_i)$, приведённых на рис. 2.

Представленные на рис. 8 зависимости могут показаться странными по крайней мере в двух отношениях:

1. В БКШ и теории Гинзбурга–Ландау в самой критической точке T_c разность энтропий обращается в ноль в соответствии с формулой Рутгерса. На рис. 8 энтропия является монотонной функцией $\tilde{T}$ и не обращается в ноль при T=T_c.

2. Во-вторых, по абсолютной величине разность $\left|\tilde{S}_S - \tilde{S}_N\right|$ при приближении к предельной точке $\tilde{T}_c = 25.2$, которая соответствует значению $\widetilde{\omega} = 0$, казалось бы, должна не возрастать, а уменьшаться, обращаясь в ноль при $\widetilde{\omega} = 0$.

Что касается второго пункта, то это действительно имеет место для $\left|\tilde{S}_S - \tilde{S}_N\right|$, поскольку величина максимального поля H_{max} и, соответственно, множителя $H_{max}/8\pi$, связывающего величины $S_S - S_N$ и $\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$, при $\widetilde{\omega} = 0$ обращается в ноль.

Что касается первого пункта, то, как будет показано ниже, формула Рутгерса для бозе-конденсата ТИ-биполяронов оказывается неприменимой.

В Таблице 2 приводятся значения величины $\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$ для значений критических температур, соответствующих различным значениям $\widetilde{\omega}_{H_{cr,i}}$.

Полученные результаты приводят к ряду фундаментальных следствий:

1. Кривая зависимости $H_{cr}(T)$ (рис. 6) имеет нулевую производную, $dH_{cr}(T)/dT = 0$ при T=0. Этот результат находится в соответствии с теоремой Нернста, согласно которой энтропия, определяемая (80) при T=0, равна нулю.

2. Согласно рис. 6, $H_{cr}(T)$ – это монотонно спадающая с увеличением T кривая при $T > T_c(\widetilde{\omega} = 0)$, а при $T \leq T_c(\widetilde{\omega} = 0)$ – постоянная величина. Отсюда следует, что $\partial H_{cr}(T)/\partial T < 0$ при $T > T_c(\widetilde{\omega} = 0)$. Следовательно, в интервале температур $[T_c(\widetilde{\omega} = 0), T_c(\widetilde{\omega})]$ $S_S < S_N$, а в интервале $[0, T_c(\widetilde{\omega} = 0)]$ $S_S = S_N$.

Отсюда следуют важные выводы:

1. Переход в интервале $[0, T_c(\widetilde{\omega} = 0)]$ происходит без поглощения или выделения скрытой теплоты, т.к. в этом случае $S_S = S_N$. То есть экспериментально он будет виден как фазовый переход второго рода. В действительности, в области $[0, T_c(\widetilde{\omega} = 0)]$ фазовый переход в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом бесконечного рода, поскольку в этой области производные любого порядка от разности свободных энергий $F_s - F_N$, согласно (79) и рис. 6, обращаются в ноль.

2. Переход в магнитном поле из сверхпроводящего в нормальном состояние в интервале $[T_c(\widetilde{\omega} = 0), T_c(\widetilde{\omega})]$, которому соответствует $S_S < S_N$, происходит с поглощением скрытой теплоты. Наоборот, при переходе в этом интервале из нормального в сверхпроводящее состояние скрытая теплота выделяется. Фазовый же переход в интервале $[0, T_c(\widetilde{\omega} = 0)]$ не сопровождается поглощением или выделением скрытой теплоты, являясь фазовым переходом бесконечного рода.

С учётом того, что удельная теплоёмкость вещества определяется формулой *C=T(∂S/∂T)*, разность удельных теплоёмкостей сверхпроводящего и нормального состояния, согласно (81), запишется в виде:

$$C_S - C_N = \frac{T}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T}\right)^2 + H_{cr}\frac{\partial^2 H_{cr}}{\partial T^2}\right]. \qquad (82)$$

Из этого соотношения обычно получают известную формулу Рутгерса, полагая в (82) критическое поле $H_{cr}(T_c) = 0$ при $T = T_c$ и оставляя в скобке в правой части (82) только первый член:

$$(C_s - C_N)_R = \frac{T_c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{cr}}{\partial T}\right)^2_{T_c}.$$

Легко, однако, видеть, что в точке $T = T_c$ величина $\omega_{H_{cr}}$, определяемая рис. 2, для всех значений температуры имеет конечную производную по T и, следовательно, согласно (78), бесконечную производную $\partial H_{cr}/\partial T$ при $T = T_c$. Таким образом, второй член в квадратной скобке (82) обращается в -∞, оставляя эту скобку конечной величиной. В результате, правильное выражение для разности теплоёмкостей рассматриваемой нами модели бозе-газа должно определяться формулой:

$$C_S - C_N = \frac{T}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial T^2}H_{cr}^2(T) = \frac{H_{max}^2}{8\pi\omega^*}\left(\tilde{C}_S - \tilde{C}_N\right), \qquad (83)$$

$$\tilde{C}_S - \tilde{C}_N = \tilde{T}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{T}^2}\left(H_{cr}^2(\tilde{T})/H_{max}^2\right).$$

В таблице 2 приводятся значения величины $\tilde{C}_S - \tilde{C}_N$ для значений критических температур, соответствующих различным значениям $\widetilde{\omega}_{H_{cr,i}}$. Отметим, что согласно полученным результатам максимум скачка теплоемкости имеет место при нулевом магнитном поле и уменьшается с увеличением величины магнитного поля, обращаясь в ноль при $H = H_{cr}$, что находится в полном соответствии с экспериментальными данными (§ 11). Сравнение скачков теплоёмкости, приведённых на рис. 5, с выражением (83) позволяет вычислить величину H_{max}. Полученные таким образом значения H_{max} для различных значений ω_i приведены в Таблице 2. Эти значения однозначно определяют значения постоянных η в формулах 38', 38''.

Таблица 2. Величины H_{max}, разностей энтропий $\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$ и разностей теплоемкостей $\tilde{C}_S - \tilde{C}_V$ в сверхпроводящем и нормальном состояниях, определяемых соотношениями (81) и (83), представлены для температур перехода $\tilde{T}_{C_i}$ для тех же значений $\widetilde{\omega}_{H_{cr,i}}$, что и на рис. 2.

i	$\widetilde{\omega}_{H_{cr,i}}$	$\tilde{T}_{C_i}$	$\tilde{S}_S - \tilde{S}_N$	$\tilde{C}_S - \tilde{C}_V$	$H_{max} \cdot 10^{-3}$, Oe
0	0	25.2	0	0	0
1	0.2	27.3	-0.94	-11.54	2.27
2	1	30	-0.4	-2.18	7.8
3	2	32.1	-0.27	-1.05	13.3
4	10	41.9	-0.1	-0.19	47.1
5	15	46.2	-0.08	-0.12	64.9
6	20	50	-0.07	-0.09	81.5

Из сказанного следует, что температурное разложение Гинзбурга–Ландау для критического поля вблизи критической температуры T_c неприменимо для бозе-конденсата ТИ-биполяронов. Поскольку температурная зависимость $H_{cr}(T)$ определяет температурные зависимости всех термодинамических величин, то этот вывод справедлив для всех таких величин. Как было отмечено во введении, этот вывод является следствием того, что теория БКШ в силу своей неаналитичности по константе связи ни при каких условиях не переходит в теорию биполяронного конденсата.

Выше был рассмотрен изотропный случай. В анизотропном случае из формул (38'), (38'') следует, что:

$$H_{max}^2 = H_{max\perp}^2 = \frac{2\omega_0 M_\perp \hbar^2}{\eta^2}, \qquad \boldsymbol{B}||\boldsymbol{c}, \tag{84}$$

- т.е. в случае, когда магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости слоёв, и :

$$H_{max}^2 = H_{max||}^2 = \frac{2\omega_0 M_{||} \hbar^2}{\eta^2}, \qquad \boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{c}, \tag{85}$$

- в случае, когда магнитное поле лежит в плоскости слоёв. Из (84), (85) следует, что:

$$\frac{H_{max\perp}^2}{H_{max||}^2} = \sqrt{\frac{M_\perp}{M_{||}}} = \gamma. \tag{86}$$

Из (78), (85), (86) для критического поля $H_{cr}(\tilde{T})$ в перпендикулярном и параллельном к плоскости слоёв направлениях получим:

$$H_{cr||,\perp}(\tilde{T}) = H_{max||,\perp}\sqrt{1-\omega_{H_{cr}}(\tilde{T})/\widetilde{\omega}}. \qquad (87)$$

Из (69) следует, что отношение $H_{cr||}(\tilde{T})/H_{cr\perp}(\tilde{T})$ не зависит от температуры. Сравнение полученных зависимостей с экспериментом проводится в §11.

§10 Скейлинговые соотношения

Скейлинговые соотношения играют важную роль в теории сверхпроводимости, способствуя поиску новых высокотемпературных сверхпроводников с рекордными параметрами. Такие соотношения могут быть обобщением большого числа экспериментов, не имея при этом надёжного теоретического обоснования, или быть выведены исходно из не очень надёжного теоретического построения, но впоследствии иметь очень широкое экспериментальное подтверждение. В качестве примера можно привести закон Уемуры, рассмотренный в следующем разделе.

Изложенная теория позволяет дать естественное объяснение некоторым важным скейлинговым соотношениям. В частности, в этом разделе будет дан вывод формулы Александрова [132, 133] и скейлингового закона Хомеса.

Формула Александрова. Как было отмечено выше (§5), в анизотропном случае формула (53) приобретает вид:

$$\tilde{T}_c = F_{3/2}^{-2/3}(\widetilde{\omega}/\tilde{T}_c)\left(\frac{n_{bp}}{M_{||}}\right)\frac{2\pi\hbar^2}{M_\perp^{1/3}\omega^*}. \qquad (88)$$

Удобно перейти в формуле (88) от трудно измеряемых в эксперименте величин $n_{bp}, M_{||}, M_\perp$ к величинам, непосредственно измеряемым экспериментально:

$$\lambda_{ab} = \left[\frac{M_{||}}{16\pi n_{bp}e^2}\right]^{1/2}, \lambda_c = \left[\frac{M_\perp}{16\pi n_{bp}e^2}\right]^{1/2}, R_H = \frac{1}{2en_{bp}}, \qquad (89)$$

где $\lambda_{ab} = \lambda_{||,}$ $\lambda_c = \lambda_\perp$ – лондоновские длины проникновения в плоскости слоёв и перпендикулярном направлении соответственно; R_H – постоянная Холла. В выражениях (89) скорость света полагается равной единице: c=1. С использованием соотношений (89), из (88) получим:

$$k_B T_c = \frac{2^{1/3}}{8}F_{3/2}^{-2/3}(\widetilde{\omega}/\tilde{T}_c)\frac{\hbar^2}{e^2}\left(\frac{eR_H}{\lambda_{ab}^4\lambda_c^2}\right)^{1/3}. \qquad (90)$$

В формуле (90) величина eR_H измеряется в см^3, λ_{ab}, λ_c – в см, T_c – в кельвинах.

Учитывая, что в большинстве ВТСП материалов $\tilde{\omega} \approx \tilde{T}_c$ и что функция $F_{3/2}(\tilde{\omega}/\tilde{T})$ мало меняется вблизи $\tilde{\omega} \approx \tilde{T}_c$, с использованием значения $F_{3/2}(1) = 0{,}428$ из (78) для T_c получим:

$$T_c \cong 8.7\left(\frac{eR_H}{\lambda_{ab}^4\lambda_c^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (91)$$

Формула (91) отличается от формулы Александрова [132, 133] лишь численным коэффициентом, равным в [132, 133] 1,64. Как показано в [132, 133], формула (91) практически без исключений правильно описывает связь между параметрами для всех известных ВТСП материалов. Из (88) следует, что соотношение Уемуры [134, 135] является частным случаем формулы (91).

Из (90), (91) в изотропном случае следует также известный закон линейной зависимости T_c от обратной величины квадрата лондоновской длины проникновения.

Закон Хомеса. Закон Хомеса утверждает, что для сверхпроводящих материалов выполняется скейлинговое соотношение [136, 137]:

$$\rho_S = C\sigma_{DC}(T_C)T_C, \quad (92)$$

где ρ_S – плотность сверхтекучей компоненты при T=0, $\sigma_{DC}(T_C)$ – проводимость постоянного тока при T=T_c, C – постоянная, равная $\approx 35\text{см}^{-2}$ для обычных сверхпроводников и для ВТСП материалов для тока, текущего в плоскости слоёв.

Входящая в (92) величина ρ_S связана с плазменной частотой ω_P известным соотношением $\rho_S = \omega_p^2$ [138] ($\omega_p = \sqrt{4\pi n_S e_S^2/m_S^*}$, где n_S – концентрация сверхпроводящих носителей тока; m_S^*, e_S – масса и заряд сверхпроводящих носителей тока). Используя это соотношение, соотношение $\sigma_{DC} = e_n^2 n_n \tau/m_n^*$, где n_n – концентрация носителей тока при $T = T_c$, m_n^*, e_n, – масса и заряд носителей тока при T=T_c , и соотношение $\tau \sim \hbar/T_c$, где τ – минимальное планковское время для рассеяния электронов в критической точке [138], из (92), в предположении $e_S = e_n$, $m_S = m_n$, получим:

$$n_S(0) \cong n_n(T_c). \quad (93)$$

В рассматриваемом нами сценарии бозе-конденсации ТИ-биполяронов закон Хомеса в форме (93) становится почти очевидным. Действительно, при T=T_c ТИ-биполяроны являются стабильными состояниями (их развал происходит при температуре, равной энергии псевдощели, которая намного превышает T_c). Их концентрация при T=T_c равна n_n, и, стало быть, эти биполяроны при T=T_c начинают образовывать конденсат, концентрация которого $n_S(T)$ достигает максимума $n_S(0) = n_n(T_c)$ при T=0 (т.е. когда биполяроны полностью переходят в сконденсированное состояние), что соответствует соотношению

(93). Отметим, что в рамках теории БКШ объяснить закон Хомеса представляется практически невозможным.

§ 11 Сравнение с экспериментом

Успех теории БКШ связан с успешным объяснением ряда экспериментов в обычных металлических сверхпроводниках, в которых ЭФВ не является сильным. Есть основание считать ЭФВ в высокотемпературных керамических СП достаточно сильным [139]-[141], и для них теория БКШ плохо применима. В этом случае может быть полезным использование описания свойств ВТСП на основе теории биполяронов. Как известно, специально построенная для описания СП с сильным ЭФВ теория Элиашберга [25] неприменима к описанию биполяронных состояний [142]-[143]. Перечислим некоторые эксперименты по ВТСП, которые находятся в соответствии с ТИ-биполяронной теорией.

Согласно основным имеющимся на сегодняшний день теориям СП (БКШ, RVB, t-J теориям [16], [106]-[107]), при низких температурах все носители тока должны быть спарены (т.е. плотность сверхпроводящих электронов совпадает со сверхтекучей плотностью). В недавних экспериментах по передопированным СП [43] было показано, что это не так – лишь небольшая часть носителей тока оказалась в спаренном состоянии. Анализ этой ситуации, проведённый в [144], показывает, что полученные в [43] результаты не вписываются в существующие теоретические конструкции. Вышеизложенная ТИ-биполяронная теория СП даёт ответ на вопрос работы [144] – куда исчезла большая часть электронов в исследованных сверхпроводниках? Он состоит в том, что лишь небольшая часть электронов n_{bp}: $n_{bp} \approx n|E_{bp}|/E_F \ll n$, находящихся вблизи поверхности Ферми, оказываются спаренными и определяют сверхпроводящие свойства ВТСП материалов.

В действительности, однако, развитая в данной работе теория ЭФВ применима для недодопированных СП и плохо применима для описания экспериментов с передопированными образцами, использованными в [43]. В частности, мы не можем ожидать в недодопированных образцах линейной зависимости критической температуры от плотности СП электронов, наблюдавшейся в [43]. Скорее эта зависимость будет нелинейной, как это следует из уравнения (53).

Для описания передопированного режима недавно была построена теория [145], основанная на идее Ферми-конденсации, разработанной в [146], являющаяся обобщением теории БКШ, в которой было показано, что число СП носителей тока составляет лишь малую часть их общего числа, что находится в соответствии с результатами [43].

Таким образом, мы можем заключить, что результаты, полученные в [43], являются весьма общими и имеют место как в передопированном, так и в недодопированном случае (см. также [147]).

Мы также можем ожидать линейной зависимости сопротивления от T при $T > T_c$ как в передопированном, так и в недодопированном случае, поскольку число биполяронов мало по сравнению с полным числом электронов, если ЭФВ является доминирующим, а кристалл – изотропным.

В противоположность работе [145] в недавней работе [148] было показано, что линейная зависимость T_c от числа куперовских пар, наблюдавшаяся в [43] по передопированным $La_{2-x}Sr_xCu_2O$ кристаллам, может быть объяснена с точки зрения БКШ, если основываться на плазмонном механизме СП. Тем не менее, представляется, что специальный случай, рассмотренный в [148], не может объяснить общий характер результатов, полученный в [43].

Вопрос о несоответствии БКШ результатам [43] и другим теориям СП также рассматривался в недавней работе [149], в которой разработана простая модель биполяронной СП и было показано, что число биполяронных носителей тока должно быть мало по сравнению с полным числом электронов. Результаты, полученные в [149], подтверждают результаты [109], [117], [118] о малой доле спаренных состояний в пределе низких температур.

Другим важным свидетельством в пользу биполяронного механизма СП являются эксперименты по измерению шума туннельного тока в гетероструктурах LSCO/LCO/LSCO, выполненные в работе [42].

Согласно этим экспериментам, спаренные состояния носителей тока существуют и при $T>T_c$, то есть их образование предшествует образованию сверхпроводящей фазы, что является решающим подтверждением применимости биполяронной картины к высокотемпературным оксидам. Этот вывод подтверждают также результаты терагерцовой спектроскопии [150].

На рис. 4 показаны типичные зависимости $E(\tilde{T})$. Из них следует, что в точке перехода энергия является непрерывной функцией $\tilde{T}$. Это означает, что на сам переход энергию затрачивать не надо и переход является фазовым переходом 2-го рода в полном соответствии с экспериментом. В то же время переход бозе-частиц из конденсатного состояния в надконденсатное связан с энергозатратами, которые определяются величиной q (§3, Таблица I), определяющей скрытую теплоту перехода бозе-газа, что делает такой переход фазовым переходом 1-го рода.

Рассмотрим в качестве примера ВТСП $YBa_2Cu_3O_7$ (YBCO) с температурой перехода 90÷93 К, объёмом элементарной ячейки; $1734\cdot 10^{-21}$см^3, концентрацией дырок $n \approx 10^{21}$см$^{-3}$. Согласно оценкам [151], энергия Ферми равна E_F =0,37 эВ. Концентрацию ТИ-биполяронов в $YBa_2Cu_3O_7$ найдём из уравнения (53):

$$\frac{n_{bp}}{n} C_{bp} = f_{\tilde{\omega}}(\tilde{T}_c)$$

$c\ \tilde{T}_c = 1{,}6$. В Таблице 1 приводятся значения $n_{bp,i}$ для значений параметров $\tilde{\omega}_i$, приведённых в (§7). Из Таблицы 1 следует, что $n_{bp,i} \ll n$. Таким образом, только малая часть носителей тока находится в биполяронном состоянии. Отсюда следует, в соответствии с результатами §6, что кулоновское взаимодействие биполяронов будет заэкранировано неспаренными электронами, что оправдывает рассматриваемое нами приближение невзаимодействующего газа ТИ-биполяронов.

Согласно излагаемому подходу, для возникновения СП необходимо образование спаренных состояний. Условие образования таких состояний вблизи поверхности Ферми, согласно [119], имеет вид: $E_{bp} < 0$. Соответственно, величина псевдощели, согласно результатам §6, будет равна:

$$\Delta_1 = \left|E_{bp} + u_0\right|. \tag{94}$$

Естественно, эта величина не зависит от вектора $\boldsymbol{k}$, но зависит от концентрации носителей тока, т.е. от уровня допирования.

В изложенном простейшем варианте теории СП щель ω_0 не изменяется при переходе из конденсированного в неконденсированное состояние, т.е. при переходе из сверхпроводящего в несверхпроводящее состояние и, стало быть, ω_0 имеет смысл также и псевдощели:

$$\Delta_2 = \omega_0(\boldsymbol{k}), \tag{95}$$

которая зависит от волнового вектора $\boldsymbol{k}$.

Многочисленные дискуссии о проблеме щели и псевдощели исходят из утверждения, что энергетическая щель в ВТСП определяется энергией связи куперовских пар, что приводит к неразрешимым противоречиям (см. обзоры [152-156], посвящённые этой проблеме).

В действительности величина СП щели Δ_2, определяемая (95), вообще говоря, не имеет никакого отношения к энергии спаренных состояний, которая определяется E_{bp}. Согласно [116], как при малых значениях константы ЭФВ α, так и при больших α энергия биполярона $\left|E_{bp}\right| \sim \alpha^2\omega_0$, т.е. $\left|E_{bp}\right|$ вообще не зависит от ω_0.

Так, например, в рамках излагаемой нами концепции становится очевидным ответ на вопрос, почему псевдощель Δ_2 имеет ту же анизотропию, что и СП щель – это одна и та же щель. Очевидным становится также ответ на вопрос, почему щель и псевдощель слабо зависят от температуры. В частности, понятным становится, почему при СП переходе щель возникает сразу и не обращается в ноль при $T = T_c$ (не БКШ поведение). Часто дискутируемый вопрос, какой параметр порядка следует сопоставить псевдощелевой фазе (т.е. является ли псевдощелевая фаза отдельным состоянием материи [153]), в рамках изложенной теории представляется лишённым смысла.

В настоящее время существует много методов измерения щели: фотоэмиссионная спектроскопия с угловым разрешением (ARPES), рамановская (комбинационная) спектроскопия, туннельная сканирующая спектроскопия, магнитное нейтронное рассеяние и др. Согласно [156], для максимальной величины щели $Y\ BCO$ (6.6) (в антинодальном направлении в ab-плоскости) было получено$\Delta_1/T_c \approx 16$. Это даёт для $|E_{bp}|$ ≈80 мэВ.

Определим теперь характерную энергию фононов, ответственных за образование ТИ-биполяронов и сверхпроводящих свойств оксидных керамик, т.е. величину СП щели Δ_2. С этой целью воспользуемся сравнением рассчитанных значений скачков теплоёмкостей с экспериментальными данными.

Скачок теплоёмкости, вычисленный теоретически (Рис. 5), совпадает с экспериментальными значениями в $YBa_2Cu_3O_7$ [157] при $\tilde{\omega} = 1{,}5$, т.е. при ω = 7,5 мэВ. Это соответствует концентрации ТИ-биполяронов $n_{bp} = 2{,}6 \cdot 10^{18}$см$^{-3}$. С учётом того, что $|E_{bp}| \approx 0.44\alpha^2\omega$ [44], $|E_{bp}|$= 80 мэВ, ω = 7,5 мэВ для константы ЭФВ α получим: α≈ 5, что заведомо лежит за пределами применимости БКШ.

Как известно, в теории БКШ скачок теплоёмкости равен: $(C_S - C_n)/C_n = 1.43$, где C_S – теплоёмкость в сверхпроводящей фазе, а C_n – в нормальной фазе, и не зависит от параметров модельного гамильтониана. Как следует из численных расчётов, приведённых на рис. 5 и в таблице 1, в отличие от теории БКШ, величина скачка зависит от фононной частоты. Таким образом, изложенный подход предсказывает существование изотопического эффекта для скачка теплоёмкости.

Отметим, что при расчёте температуры перехода считалось, что эффективная масса M_e в уравнении (53) не зависит от направления волнового вектора, то есть был рассмотрен изотропный случай.

В анизотропном случае, выбирая в качестве координатных главные оси вектора $\boldsymbol{k}$, получим величину $\left(M_{ex}M_{ey}M_{ez}\right)^{1/3}$вместо эффективной массы M_e. В слоистых ВТСП материалах значения эффективных масс лежащих в плоскости слоёв M_{ex}, M_{ey} близки по величине. Полагая в этом случае $M_e = M_{ex} = M_{ey} = M_{||}, M_{ez} = M_{\perp}$, получим вместо величины C_{bp} , определяемой (53), величину $\tilde{C}_{bp} = C_{bp}/\gamma,\ \gamma^2 = M_{\perp}/M_{||}$ – параметр анизотропии. Таким образом, учет анизотропии эффективных масс даёт для концентрации n_{bp} величину $\tilde{n}_{bp} = \gamma n_{bp}$. Следовательно, учёт анизотропии может на порядок и более увеличить оценку концентрации ТИ-биполяронов. Если для $YBa_2Cu_3O_7$ принять оценку $\gamma^2 = 30$ [158], то для концентрации ТИ-биполяронов получим: $\tilde{n}_{bp} = 1.4 \cdot 10^{19}$см$^{-3}$, что оставляет в силе общий вывод: в рассматриваемом случае лишь малая часть носителей тока находится в ТИ-биполяронном состоянии. Ситуация может измениться, если параметр анизотропии очень велик. Так, например, в слоистых ВТСП Bi-Sr-Ca-Cu-O параметр анизотропии γ>100, соответственно, концентрация ТИ-биполяронов в этих соединениях может быть одного порядка с полной концентрацией носителей тока.

Другой важный вывод, к которому приводит учёт анизотропии эффективных масс – зависимость температуры перехода T_c не от n_{bp} и $M_{||}$ по отдельности, а только от их отношения, что непосредственно следует из (53). Это явление известно как закон Уемуры. В предыдущем разделе было получено более общее соотношение, известное как формула Александрова, частным случаем которой является закон Уемуры.

В числе экспериментов, в которых участвует внешнее магнитное поле, важнейшую роль играют эксперименты по измерению лондоновской глубины проникновения λ. В $YBa_2Cu_3O_7$ для λ при T=0 в работе [159] было получено $\lambda_{ab} = 150 \div 300$ нм, $\lambda_c = 800$ нм. Такой же порядок этих величин приводится в большом числе работ [160]-[163]. В работе [162] (см. также ссылки в этой статье) показано, что анизотропия длин λ_a и λ_b в купратных плоскостях в зависимости от типа кристаллической структуры может составлять 30%. Если принять получаемое в большинстве работ значение $\lambda_a = 150\,nm$ и $\lambda_c = 800\,nm$, то для параметра анизотропии, согласно (70), получим $\lambda^{*2} \approx 30$ – значение, обычно используемое для кристаллов $YBa_2Cu_3O_7$.

Температурная зависимость $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$ изучалась во многих работах (см. [163] и ссылки в ней). На рис. 9 показано сравнение различных кривых для $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$. В работе [163] показано, что в высококачественных кристаллах $YBa_2Cu_3O_7$ температурная зависимость $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$ хорошо аппроксимируется простой зависимостью $1 - t^2, t = T/T_c$. На рис. 10 показано сравнение экспериментальной зависимости $\lambda^2(0)/\lambda^2(T)$ с теоретической зависимостью:

$$\frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(T)} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{F_{3/2}(\omega/T)}{F_{3/2}(\omega/T_c)}, \tag{96}$$

вытекающей из (71), (55), (56). Таким образом, имеется хорошее согласие между экспериментом и теоретической зависимостью (96).

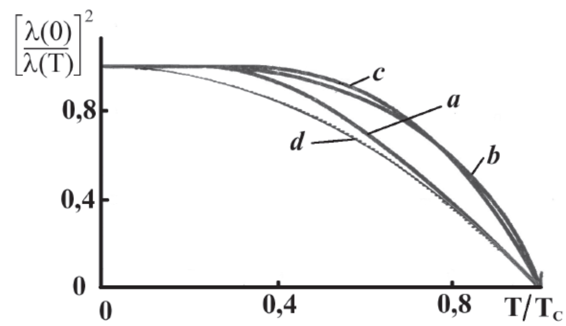


Рис. 9. Глубина проникновения магнитного поля теории БКШ (a – локальное приближение, b – нелокальное приближение); эмпирическое правило $\lambda^{-2} \sim 1 - (T/T_c)^4$ (c) [164]; в $Y\,Ba_2Cu_3O_7$ (d) [163].

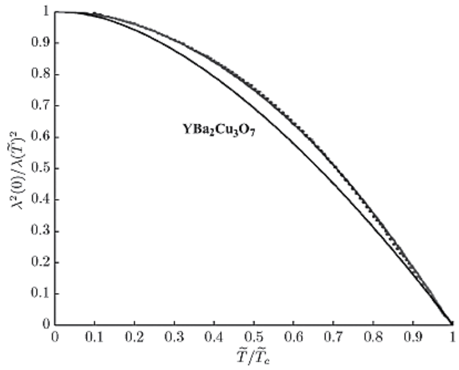


Рис. 10. Сравнение теоретической зависимости $\lambda^2(0)/\lambda^2(\tilde{T})$ (сплошная линия), полученной в данной статье, с экспериментальной зависимостью [163] (точечная кривая).

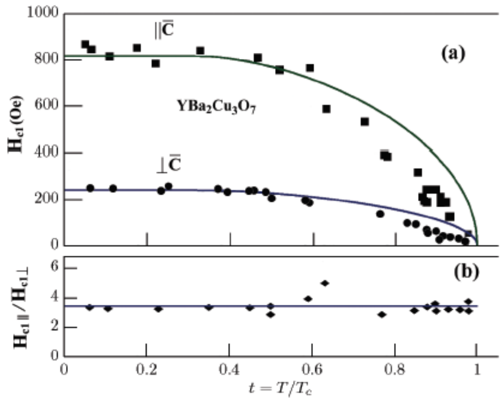


Рис. 11. Сравнение рассчитанных (непрерывные кривые) и экспериментальных значений H_{c1} (квадраты, круги, ромбы [165] для случаев $||\boldsymbol{c}$ и $\perp \boldsymbol{c}$.

Разработанная теория позволяет провести сравнение с экспериментом температурной зависимости величины критического магнитного поля в $Y\,Ba_2Cu_3O_7$ [165]. Поскольку построенная в §9 теория описывает однородное состояние газа ТИ-биполяронов, то рассматриваемое критическое поле соответствует однородной мейснеровской фазе. В работе [165] для такого поля используется обозначение H_{c1}, которое связано с обозначениями §9 соотношениями:$H_{c1} = H_{cr}$, $H_{c1||} = H_{cr\perp}$, $H_{c1\perp} = H_{cr||}$. Для сравнения с экспериментом используем ранее полученные значения параметров для $Y\,Ba_2Cu_3O_7$: $\widetilde{\omega} = 1.5$, $\widetilde{\omega}_c = 1.6$. На рис. 11 показано сравнение экспериментальных зависимостей $H_{c1\perp}(T)$ и $H_{c1||}(T)$ [165] с теоретическими зависимостями (87), где для $H_{\max ||,\perp}(T)$ взяты экспериментальные значения: $H_{\max ||} = 240$, $H_{\max\perp} = 816$. Приведённые на рис. 11 результаты подтверждают вывод (§9) о независимости отношений $H_{cr\perp}(T)/H_{cr||}(T)$ от температуры.

Из соотношений (70), (84), (85) следует, что:

$$(\gamma^*)^2 = \frac{M_\perp^*}{M_{||}^*} \propto \frac{\lambda_\perp^2}{\lambda_{||}^2}; \quad \frac{H_{max\perp}^2}{H_{\max||}^2} = \gamma^2 = 11.6. \tag{97}$$

Выбор для параметра анизотропии значения $\gamma^2 = 11.6$, определяемого соотношениями (97), отличается от значения $(\gamma^*)^2 = 30$, использованного выше. Это различие, по-видимому, обусловлено различием анизотропий поляронных эффективных масс $M_{||,\perp}^*$ и электронных зонных масс.

Наличие щели ω_0 в ВТСП керамиках доказывается многочисленными спектроскопическими экспериментами (ARPES) по угловой зависимости ω_0 от $\boldsymbol{k}$ при малых $|\boldsymbol{k}|$ [152-156]. Наличие d-симметрии в угловой зависимости $\omega_0(\boldsymbol{k})$, по-видимому, связано с появлением псевдощели и перестройкой Ферми системы в систему Ферми-дуг, обладающую d-симметрией. В экспериментах по туннельной спектроскопии величина ω_0 может проявлять себя как наличие субщелевой структуры на фоне измерения псевдощели $\Delta_1 (\Delta_1 \gg \omega_0)$. Такая структура неоднократно наблюдалась в оптимально допированных $YBa_2Cu_3O_7$ и $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ (BCCO) в области 5÷10 мэВ [166]-[168], что совпадает с вышеприведённой оценкой ω_0.

Большую совокупность экспериментов составляет измерение зависимости величины щели и псевдощели от уровня допирования x. Уже ранние эксперименты по изучению магнитной восприимчивости и найтовского сдвига выявили наличие псевдощели, появляющейся при $T^* > T_c$. Последующие многочисленные эксперименты выявили особенности T - x фазовой диаграммы: T^* увеличивается, а T_c уменьшается при уменьшении допирования [152-156]. Как показано в [119], такое поведение можно объяснить особенностями существования биполяронов в поляронном газе.

В [119] также отмечается, возможно, общий характер 1/8 аномалии (рис. 12) в ВТСП системах [169].

Приведенное выше условие стабильности $E_{bp} < 0$ означает, что наличие Ферми-газа радикально меняет критерий стабильности биполяронов, который в отсутствие фермиевского окружения принимает вид $E_{bp} < 2E_p$. На факт такой стабилизации было впервые указано в работах [170–171]. Этот факт играет важную роль при объяснении концентрационных зависимостей T_c от x. В реальных ВТСП материалах величина константы ЭФВ скорее всего имеет промежуточное значение. Тогда в области малых концентраций в отсутствие фермиевского окружения ТИ-биполяроны нестабильны относительно их распада на отдельные поляроны и СП при малых x невозможна. Она возникает при конечных x, когда имеется ярко выраженная Ферми-поверхность, стабилизирующая образование биполяронов. Это соответствует большому числу экспериментов по ВТСП материалам. Простой термодинамический анализ показывает, что при конечной температуре ТИ-биполяроны стабильны при выполнении критерия: $\left|E_{bp} - 2E_p\right| \gtrsim T$. Таким образом, характерная температура T^*, соответствующая псевдощелевой фазе равна: $T^* \approx \left|E_{bp} - 2E_p\right|$.

Сам переход в псевдощелевую фазу связан с образованием ТИ-биполяронов при $T < T^*$ и сильно размыт по температуре в полном соответствии с экспериментом. Отметим, что $T^* << |E_{bp}|$ и примерно в 1,5 ÷ 2 раза превышает T_c.

При увеличении допирования при $x > x_{опт}$, где $x_{опт}$ – величина оптимального допирования, СП переходит в передопированный режим, когда число биполяронов становится настолько большим, что они начинают перекрываться, т.е. происходит переход в режим БКШ с малыми T_c.

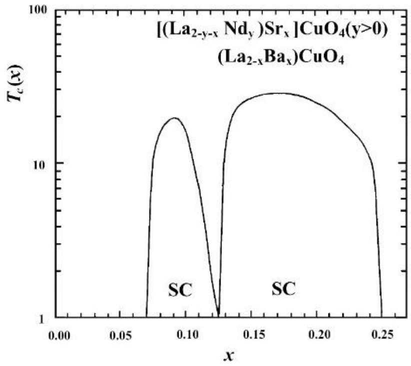


Рис. 12. Зависимость $T_c(x)$ для высокотемпературных сверхпроводников с 1/8 аномалией

В заключение этого раздела отметим, что многолетняя дискуссия о природе щели и псевдощели в ВТСП материалах во многом связана с методологической проблемой измерения, когда различные методы измерения в действительности измеряют не одно и то же, а совершенно разные величины. В рассматриваемом нами случае ARPES измеряет $\omega_0(\boldsymbol{k})$, в то время как туннельная спектроскопия – величину $|E_{bp}|$. Ниже мы подробнее рассмотрим эти вопросы.

§12 Спектроскопические эксперименты

Как показано в предыдущем разделе, развитая теория хорошо совмещается с термодинамическими характеристиками ВТСП материалов, а также с их магнитными характеристиками. Этих фактов, однако, недостаточно, чтобы однозначно судить о непротиворечии ТИ-биполяронной теории СП другим экспериментальным фактам.

В настоящее время имеется большое число методов, позволяющих изучать свойства спаренных состояний и вытекающие из этих свойств следствия. Цель этого раздела – проанализировать, в какой мере данные современных спектроскопических методов, включающих туннельную сканирующую микроскопию (СТМ), сопутствующие ей методы квазичастичной интерференции, методы фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением (ARPES) и рамановского (комбинационного) рассеяния совместимы с представлениями о ТИ-биполяронном механизме ВТСП.

Туннельные характеристики. Туннельные характеристики в случае ТИ-биполяронной теории СП имеют свои особенности. Как обычно, при рассмотрении туннельных явлений, например, при рассмотрении перехода из сверхпроводника в нормальный металл через туннельный контакт, будем отсчитывать энергию от основного состояния СП. В ТИ-биполяронной теории СП основным состоянием является биполяронное, энергия которого лежит ниже уровня Ферми этого СП в нормальном состоянии на величину энергии биполярона $|E_B|$. Таким образом, при туннельном контакте СП с нормальным металлом уровень Ферми нормального металла будет совпадать с энергией основного состояния СП. Отсюда следует, что одночастичный ток для такого контакта будет иметь обычный вид (рис. 13).

Особенность возникает при рассмотрении двухчастичного тока. Эта особенность связана с тем, что спектр возбуждённых состояний ТИ-биполярона отделён от основного состояния величиной фононной частоты ω_0. По этой причине вольт-амперная характеристика двухчастичного тока будет иметь вид, изображённый на рис. 13, с заменой $|E_B/2|$ на ω_0. В итоге суммарная вольт-амперная характеристика будет иметь вид рис. 14.

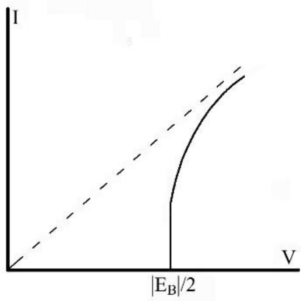


Рис. 13. Вольт-амперная характеристика одночастичного тока

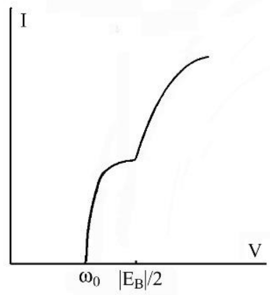


Рис. 14. Вольт-амперная характеристика полного тока

Кривая *I*-*V* изображена в случае $\omega_0 < |E_B|/2$. В противоположном случае величины ω_0 и $|E_B|/2$ следует поменять местами. Область *I*-*V* кривой на рис. 14, определяемой значениями $\omega_0 < V < |E_B|/2$, соответствует кинку, который отсутствует в БКШ теории.

Со спектральной точки зрения, кинк соответствует переходу от одночастичного спектра электронов с энергией, лежащей ниже E_F на величину $|E_B|/2$, к двухчастичному ТИ-биполяронному спектру возбуждённых состояний, который в одночастичной схеме лежит в области $(E_F - |E_B/2| + \omega_0/2,\ E_F)$, как это показано на рис. 15.

Приведённая на рис. 15 зависимость $E(k)$ соответствует ARPES наблюдениям кинков в большом числе ВТСП материалов (см., например, обзор [172]). Так, например, согласно [172] в хорошо изученном купрате Bi2212 энергия кинка ($|E_B|/2$) составляет 70 мэВ.

В пользу фононной природы кинка свидетельствуют также наблюдение изотопического эффекта вблизи энергии кинка [173], независимость энергии кинка от величины допирования [174], независимость энергии кинка от природы носителей тока: согласно [175], электронно и дырочно допированные купраты имеют одинаковую энергию кинка.

На рис. 16 изображена типичная для ВТСП зависимость dI/dV от V, соответствующая приведённой на рис. 15 зависимости I от V. На ней кинку соответствует провал справа от высокого пика.

Заметим, что в силу того, что ТИ-биполяроны существуют и при $T > T_c$, кривая dI/dV при температуре выше критической будет качественно сохранять вид, изображённый на рис. 16. Таким образом, величина $|E_B|/2$ будет играть роль псевдощели в одночастичных переходах, а $|E_B|$ – роль псевдощели в двухчастичных переходах. Этот вывод находится в полном соответствии с многочисленными туннельными экспериментами в ВТСП [172, 176, 177].

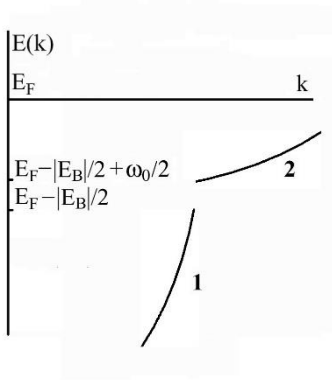


Рис. 15. Кинку соответствует щель при переходе с нормальной ветви 1 на ТИ-биполяронную ветвь 2 при энергии, равной $E_F - |E_B/2|$

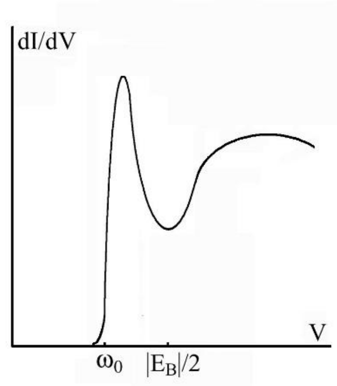


Рис. 16. Зависимость кондактанса dI/dV от V, соответствующего вольт-амперной характеристике, изображённой на рис. 15

Фотоэмиссионная спектроскопия с угловым разрешением (ARPES). Наряду с СТМ, одним из прямых методов, дающих информацию о свойствах сверхпроводящей щели, является метод фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением [152]. Будучи дополненным данными СТМ и данными метода квазичастичной интерференции, этот метод даёт наиболее полные данные о свойствах СП щели. В последнее время получил развитие также метод двойной фотоэлектронной спектроскопии, являющийся обобщением ARPES на случай двух частиц, в котором осуществляется фотоэмиссия двух электронов с определёнными импульсами $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$ и соответствующими этим импульсам энергиями E_1 и E_2 [178]. Несмотря на обилие данных, полученных методом ARPES, природа ВТСП щели остаётся до сих пор неясной. В большой степени это связано с тем, что вплоть до настоящего времени отсутствовала единая теория ВТСП. Если исходить из того, что СП механизм обусловлен куперовским спариванием, то в случае сильного фрёлиховского ЭФВ это приводит к рассматриваемой нами ТИ-биполяронной теории ВТСП. Согласно этой теории, в отличие от биполяронов с нарушенной симметрией, ТИ-биполяроны делокализованы в пространстве, и поляризационная потенциальная яма у них отсутствует (поляризационный заряд равен нулю). Согласно §5, ТИ-биполярон имеет в спектре щель, имеющую фононную природу. В ТИ-биполяронной теории СП биполяроны образуются вблизи поверхности Ферми в форме заряженного бозе-газа (погружённого в электронный газ), который конденсируется на уровне, лежащем ниже уровня Ферми на величину, равную энергии основного состояния биполярона, что приводит к СП состоянию (§6). Спектр возбуждений такого газа имеет щель, равную фононной частоте. В этом разделе мы покажем, что фотоэмиссионный спектр, получаемый в ARPES, содержит как раз такую щель, а рассмотренная нами в предыдущем пункте щель $|E_B|/2$, определяемая из двухчастичного тока методом СТМ, не имеет отношения к измерениям щели методом ARPES.

С этой целью будем исходить из общего выражения для измеряемой в ARPES интенсивности поглощения света $I(\boldsymbol{k},\omega)$ в виде

$$I(\boldsymbol{k},\omega) = A(\boldsymbol{k},\omega)F(\omega)M(\boldsymbol{k},\omega). \tag{98}$$

В случае измеряемой методом ARPES интенсивности поглощения света ТИ-биполяронами фигурирующие в (98) величины имеют другой смысл, нежели в случае одноэлектронной фотоэмиссии.

В случае рассматриваемого нами бозе-конденсата $\boldsymbol{k}$ имеет смысл импульса бозона, а ω – энергии бозона, $A(\boldsymbol{k},\omega)$ – однобозонная спектральная функция, $F(\omega)$ – функция распределения Бозе-Эйнштейна, $M(\boldsymbol{k},\omega)$– матричный элемент, описывающий переходы из начального в конечное состояние бозона.

В нашем случае роль заряженного бозона, принимающего участие в поглощении света, выполняет биполярон, спектр энергий которого определяется выражением (33), (40), [117], [118]:

$$\varepsilon_k = E_B\Delta_{k,0} + (E_B + \omega_0(\boldsymbol{k}) + k^2/2M)(1-\Delta_{k,0}), \tag{99}$$

где $\Delta_{k,0}=1$, если $k=0$, $\Delta_{k,0}=0$, если $k\neq 0$, функция распределения которого равна $F(\omega)=[\exp(\omega-\mu)-1]^{-1}$. При $\boldsymbol{k}=0$ ТИ-биполярон находится в основном состоянии, а при $\boldsymbol{k}\neq 0$ – в возбуждённом состоянии с энергией $E_B+\omega_0(\boldsymbol{k})+k^2/2M$, где $\omega_0(\boldsymbol{k})$ – зависящая от волнового вектора фононная частота, $M=2m$, m – эффективная масса электрона.

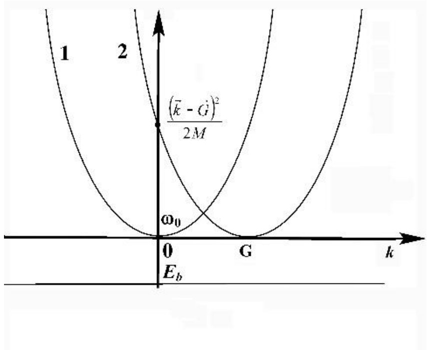


Рис. 17. Схематическое изображение перехода биполярона в возбуждённое состояние в результате поглощения кванта света

Для дальнейшего анализа важно отметить, что энергия биполяронных возбужденных состояний, отсчитываемая в уравнении (99) от E_B, может быть проинтерпретирована как энергия фонона $\omega_0(\boldsymbol{k})$ и кинетическая энергия двух электронов, связанных с этим фононом. Последняя в схеме расширенных зон имеет вид: $(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G})^2/2M$, где $\boldsymbol{G}$ – обратный вектор решётки (рис. 17). В методе ARPES измеряется спектр начальных состояний, который в рассматриваемом нами случае представляет собой спектр низколежащих возбуждений ТИ-биполярона. В связи с этим можно пренебречь вкладом в этот спектр одно- и двухчастичных возбуждений электронного (поляронного) газа, в который погружены биполяроны, поскольку плотность состояний ТИ-биполяронов вблизи их основного состояния намного больше плотности состояний электронного спектра. Таким образом, мы заведомо исключаем рассмотрение таких явлений, как осцилляция Гааза-ван Альфвена и Шубникова-де Гааза [179-181]. Ввиду того что кинетическая энергия, соответствующая вектору обратной решётки (или целому числу векторов обратной решётки) очень велика, из всего спектра биполярона, определяемого (99), мы должны учесть только уровни E_B с $k=0$ и $E_B+\omega_0(\boldsymbol{k})$ с $k\neq 0$ в качестве спектра начальных состояний. Другими словами, с использованием спектральной функции $A(\omega,\boldsymbol{k})=-(1/\pi)ImG(\omega,\boldsymbol{k})$, где $G(\omega,\boldsymbol{k})=(\omega-\varepsilon_k-i\varepsilon)^{-1}$ – функция Грина биполярона, выражение для интенсивности (1) может быть представлено в виде:

$$I(\boldsymbol{k},\omega)\sim\frac{1}{(\omega-E_B)^2+\varepsilon_1^2}\cdot\frac{1}{\left(\omega-E_B-\omega_0(\boldsymbol{k})\right)^2+\varepsilon_2^2}\ , \tag{100}$$

который является подгонкой функции распределения F с $\mu=E_B$ и функции Грина G посредством лоренцианов, где ε_1 и ε_2 определяют ширину бозевского распределения и биполяронных уровней соответственно (матричный элемент $M(\boldsymbol{k},\omega)$, входящий в (98), имеет плавную зависимость от энергии и волнового вектора, поэтому этой зависимостью можно пренебречь).

Таким образом, в результате поглощения света парой электронов (исходно находящихся в биполяронном состоянии) методом ARPES измеряется кинетическая энергия электронов с импульсами k_e, которые выбиваются из образца в вакуум в результате поглощения фотона с энергией $\hbar\nu$. Закон сохранения энергии в этом случае принимает вид:

$$\hbar\nu = \omega_0(\boldsymbol{k}) + \frac{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G})^2}{2M} = \xi + \frac{k_e^2}{m_0} + \omega_0(\boldsymbol{k}), \tag{101}$$

$$\xi = 2\Phi_0 + |E_B|,$$

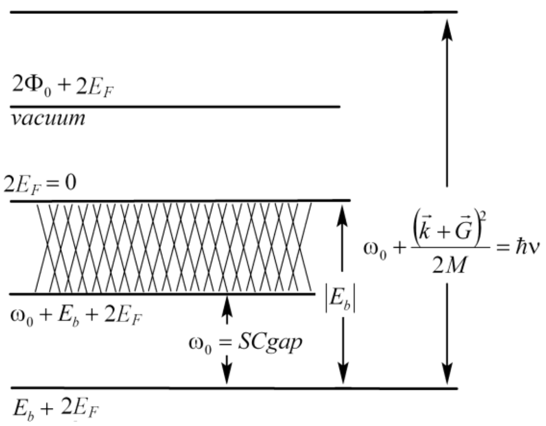


Рис. 18. Схема энергетических уровней при измерении спектра методом ARPES. Заштрихована область непрерывного спектра, лежащего ниже уровня Ферми.

что иллюстрирует рис. 18, где Φ_0 – работа выхода электронов из образца, m_0 – масса свободного электрона в вакууме. Согласно рис. 18, при образовании биполярона вблизи энергии Ферми E_F энергия двух электронов становится равной $2E_F + E_B$. При этом электроны переходят из состояния с p_F, где p_F – фермиевский импульс, в некоторое состояние с импульсом p под поверхностью Ферми (т.к. $E_B < 0$). В методе ARPES измеряется спектр начальных состояний, отсчитываемых от энергии $2 \cdot p^2/2m$, соответствующей энергии двух электронов с импульсом p. В результате в ARPES измеряется энергия $\omega_i = 2E_F + E_B - p^2/m$.

Таким образом, если биполярон с энергией $\omega = \omega_i = E_B + 2\boldsymbol{v}_F(\boldsymbol{p}_F - \boldsymbol{p})$, лежащей в области существования биполяронного газа $(2E_F + E_B, 2E_F)$, где $\boldsymbol{v}_F$ – скорость фермиевского электрона, поглощает фотон с энергией $\hbar\nu$, то образующийся в ходе распада биполярона фонон фиксируется в методе ARPES как щель $\omega_0(\boldsymbol{k})$, а два электрона с кинетической энергией k_e^2/m_0, определяемой (101), эмитируются из образца.

В рассматриваемом сценарии в каждом акте поглощения света из образца эмитируют два электрона с одинаковыми импульсами. Это явление может быть обнаружено методом ARPES, если электронный детектор поместить прямо на поверхность образца, поскольку кинетическая энергия разлёта эмитируемой пары электронов в вакууме (не скомпенсированная притягивающим потенциалом в биполяронном состоянии) составляет несколько электрон-вольт.

Таким образом, методом ARPES, согласно изложенному, измеряется фононная частота $\omega_0(k)$, которая сопоставляется СП щели, и, следовательно, в купратных ВТСП с $d_{x^2-y^2}$ симметрией её угловая зависимость даётся выражением $\omega_0(\boldsymbol{k}) = \Delta_0\left|\cos k_x a - \cos k_y a\right|$.

С точки зрения фононной спектроскопии, идентификация такого типа фононных мод затруднена их небольшим числом (равным числу биполяронов) по сравнению с числом обычных фононов, равным числу атомов в кристалле. Спектральная зависимость фононных частот определяется как ион-ионными взаимодействиями, так и взаимодействием с электронной подсистемой кристалла. Расчет нормальных колебаний для плоской квадратной решетки атомов без учета вклада электронов приводит к d–типу симметрии их спектра [128],[182]. Применительно к CuO_2 СП плоскостям оксидных керамик фононы в направлении Cu–O–Cu связей (антинодальное направление) будут иметь щель, а в направлении Cu–Cu связей, т.е. вдоль диагонали элементарной ячейки (нодальное направление), щель будет отсутствовать.

При расчете электронного вклада в фононный спектр необходимо также учитывать связь между распределением электронной плотности и положениями ионов на CuO_2 плоскости, наблюдаемую в STM/STS экспериментах с высоким пространственным разрешением [183].

Указанная угловая зависимость $\omega_0(k)$ приводит к угловой зависимости интенсивности $I(\omega_i, \boldsymbol{p}) \sim A(\omega_{i,}\boldsymbol{p})$, определяемой уравнением (100) (Рис. 19), которая обычно наблюдается в ARPES экспериментах [152], [184, [185]. Вид зависимости $(\omega_i, \boldsymbol{p})$ предполагает, что имеется также симметричная относительно уровня Ферми зависимость пиков поглощения от $\boldsymbol{p}$. Эта зависимость не приведена на рис. 19, так как вследствие малой заселённости состояний с $p > p_F$ их интенсивность поглощения будет очень мала [186].

Экспериментальная проверка эффекта эмиссии TI-биполяронов как целого важна для понимания механизма спаривания. Так, согласно [185], только один электрон должен эмитироваться из образца с дисперсией начальных состояний, определяемых при $\neq 0$ формулой: $\varepsilon_p^{Bog} = \sqrt{(p^2/2m - E_F)^2 + \Delta^2(p)}$ (где ε_p^{Bog} – спектр боголюбовской квазичастицы), отличной от спектра (93).

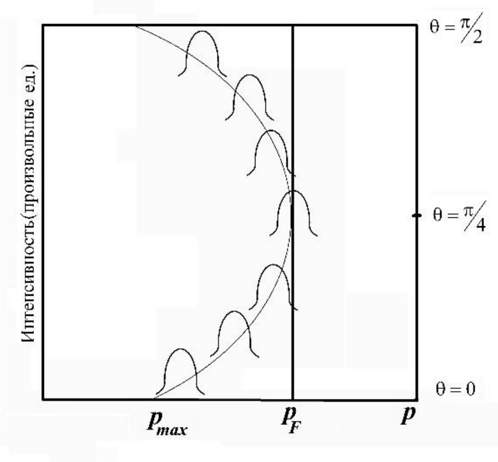


Рис. 19. Схематическое изображение угловой зависимости интенсивности поглощения согласно (3) для $\omega = \omega_i$

Использование спектров ε_P^{Bog} и (99) для описания угловой зависимости интенсивности приводит к качественному согласию с данными ARPES с доступным на сегодняшний день разрешением. Эксперименты с более высоким разрешением должны дать ответ на вопрос о том, носит ли СП конденсат в купратах фермионный характер или ТИ-биполяронный?

Из спектра $\omega_0(k)$ следует, что в нодальном направлении купратных сверхпроводников константа ЭФВ становится бесконечной. Таким образом, для биполяронов в этом случае реализуется режим сильной связи. На рис. 20 показана типичная зависимость интенсивности поглощения $I(\omega_i, \boldsymbol{p})$, наблюдаемая в экспериментах ARPES [184].

Изображённая на рис. 20 зависимость следует из выражения для интенсивности (98) со спектральной функцией, которая соответствует спектру ТИ-биполярона (99) и которая не может быть получена из спектральной функции (100) из работы [186], в которой для спектра используется боголюбовский спектр ε_p^{Bog}, а вместо бозевского распределения $F(\omega)$ используется фермиевская функция распределения. Этот результат может рассматриваться как аргумент в пользу ТИ-биполяронного механизма СП.

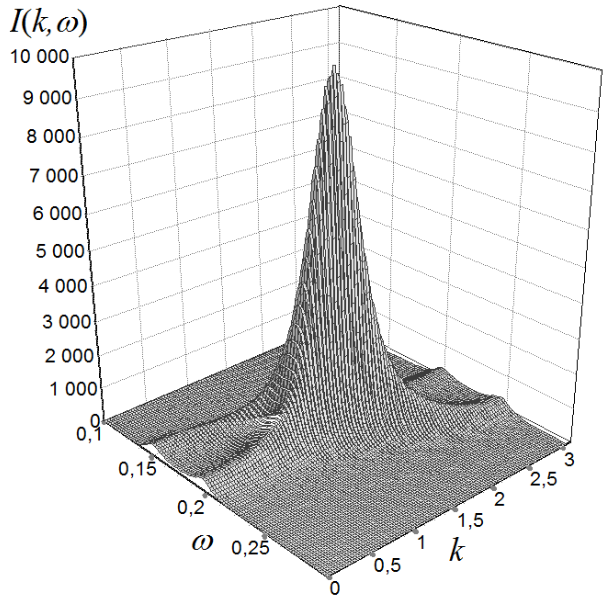


Рис. 20. Зависимость интенсивности поглощения $I(k,\omega)$ (произвольные единицы) от k и ω (эВ), определяемой (100), для параметров: $|E_B| = 0{,}2$ эВ, $\Delta_0 = 0{,}05$ эВ, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}01$ эВ и волнового вектора k в антинодальном направлении. Постоянная решётки полагается равной единице.

Рассмотренные выше особенности в спектре поглощения ARPES будут себя проявлять также в туннельных экспериментах в форме тонкой структуры (кинков) на измеряемых вольт-амперных характеристиках. Для этого, в отличие от традиционных ARPES измерений с высокоэнергетичными источниками фотонов ($\hbar\nu = 20 - 100$ эВ), для наблюдения этих особенностей необходимо использовать источники низкоэнергетичных фотонов ($\hbar\nu = 6 - 7$ эВ) и с более высоким, чем обычное, разрешением по импульсам [187-190].

В работе [191] также теоретически была рассмотрена возможность наблюдения эмиссии куперовских пар методом ARPES для обычных СП. В частности, авторы [191] показали наличие пика в эмиссионном токе куперовских пар, соответствующего нулевой энергии связи занятых двухэлектронных состояний. Рассмотренный в [191] пик соответствует переходу с энергией $\hbar\nu$, определяемой (101) с энергией связи ~1 мэВ, что находится на пределе точности измерений методом ARPES. В случае высокотемпературных сверхпроводников энергия связи может быть в десятки раз больше, что делает в них более реальной проверку рассматриваемых эффектов. Основным отличием полученных здесь результатов от полученных в [191] является наличие угловой зависимости пика поглощения рис. 19, 20, характерной для ВТСП материалов.

Обсудим кратко температурную зависимость интенсивности $I(\omega_i \boldsymbol{p})$. Согласно уравнению (98), она определяется температурной зависимостью $F(\omega)$.

Для $T < T_c$, где T_c – температура СП перехода $F(\omega) \cong N_0(T)$ для $\omega = E_B$, где $N_0(T)$ – число бозонов (биполяронов) в конденсате, которое определяет температурную зависимость интенсивности поглощения. Величина $N_0(T)$ уменьшается при увеличении T и, вообще говоря, обращается в ноль при температуре СП перехода, обращая в ноль интенсивность поглощения. В действительности, однако, этого не происходит, т.к. в ноль обращается только бозе-конденсатная часть. Согласно ТИ-биполяронной теории СП при $T > T_c$, биполяроны существуют и в отсутствие конденсата. В этом случае заселённость основного состояния таких биполяронов будет уменьшаться с ростом температуры, обращаясь в ноль при температуре T^*, соответствующей переходу из псевдощелевого в нормальное состояние.

Этот вывод подтверждается экспериментами ARPES в СП и псевдощелевой фазах [192], в которых продемонстрировано, что угловая зависимость СП щели d-типа аналогична угловой зависимости плотности состояний в псевдощелевой фазе. В то же время имеются существенные отличия между экспериментальными данными ARPES в СП и псевдощелевой фазах. В СП фазе пик интенсивности поглощения расположен ниже уровня Ферми, что соответствует резкому спектральному пику плотности состояний бозе-конденсата, определяемому уравнением (100), в то время как в псевдощелевой фазе этот пик будет отсутствовать ввиду отсутствия в ней конденсата [153]. В этих условиях, ввиду роста заселённости возбуждённых биполяронных состояний с ростом температуры, интенсивность пика поглощения в ARPES экспериментах будет с ростом температуры уменьшаться и достигать минимума в антинодальном направлении и максимума – в нодальном. **Комбинационное рассеяние.** Несмотря на то что комбинационное рассеяние не даёт углового разрешения [193], полученные на его основе экспериментальные данные также свидетельствуют о фононной природе щели в ВТСП. Как было показано в [117], [118], спектр, определяемый (99), может быть интерпретирован как спектр перенормированных фононов. Рассеяние такими фононами света с частотой ν будет приводить к появлению в рассеянном свете сателлитных частот $\nu_+^B = \nu + |\varepsilon_k^B|$ и $\nu_-^B = \nu - |\varepsilon_k^B|$, где ε_k^B определяется (99). В случае широких зон проводимости, т.е. когда выполняется неравенство $G^2/M >> \max\omega_0(k)$, расщеплённые линии $\nu_\pm^B$ перекрываются и образуют зону с максимумом, смещённым к стоксовской ветви ν_-. Так как в рассматриваемой модели биполяронный газ помещён в поляронный газ с числом биполяронов, много меньшим числа поляронов, то интенсивность биполяронных сателлитов будет много слабее интенсивности ТИ-поляронных сателлитов: $\nu_+^P = \nu + |\varepsilon_k^P|$ и $\nu_-^P = \nu - |\varepsilon_k^P|$, $\varepsilon_k^P = E_P \Delta_{k,0} + \left(\omega_0 + k^2/2m\right)\cdot\left(1 - \Delta_{k,0}\right)$, E_P – энергия ТИ-полярона. Как и в случае обычного комбинационного рассеяния, интенсивность рассеяния на поляронах и биполяронах будет много слабее интенсивности рэлеевского рассеяния, соответствующего частоте ν.

В экспериментах по комбинационному рассеянию [194], действительно, при $T < T_C$ появляется широкий пик, который, согласно рассматриваемой интерпретации, соответствует уширенным частотам $\nu_{\pm}^{B,P}$. В полном соответствии с экспериментом положение этого пика не зависит от температуры. В теории комбинационного рассеяния, основанной на БКШ, напротив, положение пика должно соответствовать ширине щели СП, и при $T = T_C$ соответствующая этой ширине частота должна обращаться в ноль.

Результаты комбинационного рассеяния также подтверждают, что ТИ-биполяроны не разрушаются при $T = T_C$, а продолжают существовать в псевдощелевой фазе. Измерение температурной зависимости интенсивности комбинационного рассеяния основано на вычитании интенсивности поглощения в нормальной и сверхпроводящей фазах. Получаемая разность, согласно излагаемому подходу, полностью определяется рассеянием на бозе-конденсате и в полном согласии с экспериментом является температурно зависимой, обращаясь в ноль при $T = T_C$.

5. Заключительные замечания

В изложенной теории, как и в БКШ, импульс центра масс биполяронов $\boldsymbol{P}$ (соответственно $\boldsymbol{G}$ в магнитном поле) равен нулю. Согласно этой теории СП состояние представляет собой биполяронный однородный БЭК. Теория может быть обобщена на случай движущегося БЭК с $\boldsymbol{P} \neq 0$, остающегося при своем движении однородным. При этом возникают интересные особенности [195]. В настоящее время активно обсуждается также возможность образования неоднородного БЭК в форме так называемых волн плотности сконденсированных пар (PDW), разрушающих трансляционную инвариантность [154], [196-200]. Ситуация здесь, однако, отличается от обсуждаемой проблемы поляронов и биполяронов с нарушенной или присутствующей ТИ-симметрией (§ 1, 2). К сценарию СП с PDW, включая наличие волн зарядовой (CDW) или спиновой плотности (SDW) [201-204], приводит дискретность кристалла, не учитываемая в континуальной модели ЭФВ. Вопрос о конкуренции CDW механизма СП с биполяронным механизмом для ПМР в сжатом вакууме рассматривался, например, в [205].

Модуляция плотности БЭК при волновом векторе, соответствующем нестингу, приводит к появлению в спектре щели, которую во многих работах отождествляют с СП щелью [154],[196-204]. В этом случае ТИ-биполяронная щель ω_k, будучи универсальной, обладала бы атрибутами псевдощели, проявляя себя в виде низкоэнергетической тонкой структуры в спектре кондактанса оптимально допированных СП [166-168].

В рассматриваемом подходе мы практически не использовали какую-либо специфику механизма спаривания электронов или дырок. Так, например, как в модели Хаббарда, так и в $t - J$ модели при описании ВТСП оксидов меди те же самые дырки принимают участие как в формировании антиферромагнитных флуктуаций, так и в спаривании, обусловленном обменом этими флуктуациями. Если взаимодействие дырок с магнитными флуктуациями приводит к образованию ТИ-магнитополяронов, обладающих спектром $\omega_0(k)$, то этот спектр является также и спектром магнонов, перенормированным их взаимодействием с дырками (связанные магноны). По этой причине становится оправданным утверждение, что RVB сверхпроводник является просто предельным случаем БКШ СП с сильным взаимодействием [206] (в этом случае роль поляронов и биполяронов выполняют холоны и бихолоны).

Очевидно, что d-симметрия является спецификой купратных ВТСП и не представляет собой непременного требования существования ВТСП. Так, например, такое соединение, как сульфид серы (H_3S), демонстрирует рекордное значение температуры перехода: $T_C = 203\,\text{К}$ (под высоким давлением [207]), не обладает магнитным порядком, но в нём имеется сильное ЭФВ. Ещё более рекордное значение T_C под высоким давлением недавно получено в соединении LaH_{10} с $T_C = 260\,\text{К}$ [208], также характеризуется сильным ЭФВ и отсутствием магнитного порядка.

Тем не менее вопрос о механизме спаривания всё ещё остаётся открытым. Если таким механизмом является взаимодействие носителей тока с магнитными флуктуациями, то в рассматриваемом подходе частицами, склеивающими в пары электроны, будут не фононы, а магноны. При переходе из псевдофазы в нормальную фазу эта склеивающая мода исчезает, что приводит к распаду биполярона на два отдельных полярона с испусканием фонона (магнона).

В псевдощелевой фазе возможно наличие большого числа различных щелей, обусловленных присутствием фононов, магнонов, плазмонов и других типов элементарных возбуждений. В этом случае СП щель будет определяться типом элементарных возбуждений, имеющих максимальную силу взаимодействия с носителями тока.

С точки зрения ТИ-биполяронной теории возможная общая итоговая картина ВТСП выглядит следующим образом.

Согласно изложенному, в основе микроскопической теории лежит ТИ-биполяронный ЭФВ механизм. Из теории следует, что для достижения высоких T_C необходимо в первую очередь повышать концентрацию ТИ-биполяронов. В оксидных керамиках это достигается наличием в них АФ порядка и страйпов.

Выполняя роль микроскопических доменных стенок, страйпы, имея ферромагнитный порядок, притягивают к себе электроны (дырки). За счет обменного взаимодействия энергия электронов (дырок) в страйпах ниже, чем в остальной матрице (аналог ферронов Нагаева [60] с учетом вклада в их образование поляронных [209] и магнитострикционных эффектов [210]), соответственно, концентрация электронов (дырок) в них повышена. Для восстановления зарядового равновесия ТИ-биполяроны перетекают из областей, занимаемых страйпами, в матрицу, повышая тем самым в ней концентрацию ТИ-биполяронов и в целом T_c образца. Такое перераспределение приводит появлению волны плотности пар PDW (повышенная концентрация биполяронов в матрице и пониженная в страйпах) и волны зарядовой плотности CDW (повышенная концентрация электронов (дырок) в страйпах и пониженная в матрице).

Описанный механизм позволяет целенаправленно конструировать СП материалы, работающие при комнатной T_c. Как указывалось [118], для реализации этой цели можно использовать неоднородное легирование, делая периферийную область ВТСП кабеля легированной ферромагнитными примесями, оттягивающими электроны (дырки) от сердцевины провода. В итоге можно получить провод с повышенной концентрацией ТИ-биполяронов на его оси и, как следствие, его высокую T_c.

Изложенную теорию СП на основе ЭФВ в действительности следует рассматривать как некоторую схему действий для описания свойств реальных материалов. Число различных соединений, обладающих ВТСП свойствами, составляет многие тысячи, а число публикаций по ВТСП – многие сотни тысяч. Поэтому под построением микроскопической теории ВТСП, по-видимому, следует понимать некоторую идеологическую концепцию, роль которой может выполнить рассмотренный в обзоре ТИ-биполяронный механизм.

Приложение

Гамильтониан H_1, фигурирующий в (26), имеет вид:

$$\hat{H}_1 = \sum_k (V_k + f_k \hbar\omega_k)\,(a_k + a_k^+) + \sum_{k,k'} \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}{m} f_{k'}\big(a_k^+ a_k a_{k'} + a_k^+ a_{k'}^+ a_k\big) + \frac{1}{2m}\sum_{k,k'} \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\, a_k^+ a_{k'}^+ a_k a_{k'}.$$

Подействуем оператором $\hat{H}_1$ на функционал $\hat{\Lambda}_0|0>$, где $\hat{\Lambda}_0$ – оператор, генерирующий каноническое преобразование Боголюбова-Тябликова (29). Покажем, что $<0|\hat{\Lambda}_0^+ H_1 \hat{\Lambda}_0|0> = 0$. Действительно, действие $\hat{\Lambda}_0$ на члены H_1, содержащие нечетное число операторов a_k, a_k^+ (первый и второй члены в $\hat{H}_1$) приводит к выражению, содержащему нечетное число этих операторов, и математическое ожидание для этого выражения будет равно нулю.

Рассмотрим математическое ожидание для последнего члена H_1:

$$<0|\hat{\Lambda}_0^+ \sum_{k,k'} \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}' a_k^+ a_{k'}^+ a_k a_{k'} \hat{\Lambda}_0|0>. \qquad (\Pi 1)$$

Входящий в (П1) функционал $<0|\hat{\Lambda}_0^+ a_k^+ a_{k'}^+ a_k a_{k'} \hat{\Lambda}_0|0>$ является нормой вектора $a_k a_{k'} \hat{\Lambda}_0|0>$ и, следовательно, является положительно определенным для всех $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$. Если сделать в (П1) замену $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$, то все выражение в целом изменит знак. Поэтому (П1) равно нулю.

Как было показано Тулубом [75], [96], оператор $\hat{\Lambda}_0$ является генератором преобразований Боголюбова-Тябликова и имеет вид:

$$\hat{\Lambda}_0 = \mathrm{c}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,k'} a_k^+ A_{kk'} a_{k'}^+\right\},$$

где c – нормировочная константа, а симметричная матрица A удовлетворяет условиям:

$$A = M_2^*(M_1^*)^{-1}, \quad A = A^T,$$

где M_1 и M_2 матрицы Меллера [211], фигурирующие в преобразовании Боголюбова-Тябликова (29).

Библиографический список

1. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика, часть 2, Теория конденсированного состояния М.: Наука, Физматлит, (1978).
2. J.G. Bednorz, K.A. Muller, Possible high *Tc* superconductivity in the Ba-La-Cu-O system // Z. Physik B - Condensed Matter 64, 189 (1986).
3. В.Л. Гинзбург, Сверхпроводимость: позавчера, вчера, сегодня, завтра // УФН 170, 619 (2000).
4. S.L. Kakani, S. Kakani, Superconductivity, Anshan, Kent, UK (2009).
5. T. Tohyama, Recent Progress in Physics of High-Temperature Superconductors // Jpn. J. Appl. Phys. 51, Article ID 010004 (2012).
6. S. Kruchinin, H. Nagao, S. Aono, Modern Aspects of superconductivity. Theory of superconductivity, World Sci., River Edge, NJ USA (2011).
7. K.P. Sinha, S.L. Kakani, Fermion local charged boson model and cuprate superconductors // Proceedings – National Academy of Sciences, India. Section A, Physical Sciences 72, 153 (2002).
8. K.N. Benneman, J.B. Ketterson, Superconductivity: Conventional and Unconventional Superconductors 1-2, Springer, New-York, NY, (2008).
9. J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity Westview Press, Oxford, UK (1999).
10. L.N. Cooper, D. Feldman (eds.), BCS: 50 years: World Sci. Publ. Co, Singapore, (2011)
11. N.M. Plakida, High Temperature Cuprate Superconductors: Experiment, Theory and Applications, Springer, Heidelberg, Germany (2010).
12. I. Askerzade, Unconventional Superconductors 153, of Springer Series in Material Science, Springer, Berlin, Germany, (2012).
13. O. Gunnarsson, O. Rösch, Interplay between electron–phonon and Coulomb interactions in cuprates, // J. Phys.: Condens. Matter 20, 043201 (2008).
14. T. Moriya, K. Ueda, Spin fluctuations and high temperature superconductivity // Adv. Phys. 49, 555 (2000).
15. D. Manske, Theory of Unconventional Superconductors, Springer, Heidelberg, Germany (2004).
16. J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity // Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
17. Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов, Коллективные свойства экситонов в полупроводниках // ЖЭТФ, т. 54, стр.978, (1968).
18. D.M. Eagles, Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors // Phys. Rev. 186, 456 (1969).
19. P. Nozi`eres, S. Schmitt-Rink, Propagation of Second sound in a superfluid Fermi gas in the unitary limit // J. Low Temp. Phys 59, 195 (1985).
20. В.М. Локтев, Механизмы сверхпроводимости медных оксидов, // Физика низких температур, т.22, стр. 3, (1996).

21. M. Randeria, Precursor Pairing Correlations and Pseudogaps // Varenna Lectures, arXiv:cond-mat/9710223 [cond-mat.str-el], (1997).
22. Y.J. Uemura, Bose-Einstein to BCS crossover picture for high-Tc cuprates // Physica C: Superconductivity 282-287(1), 194 (1997).
23. M. Drechsler, W. Zwerger, Crossover from BCS-superconductivity to Bose-condensation // Ann. Phys. 1, 15 (1992).
24. A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari (eds.), Bose-Einstein Condensation: Cambridge U.P., New-York, (1996).
25. Г.М. Элиашберг, Взаимодействие электронов с колебаниями решетки в сверхпроводнике // ЖЭТФ, **38**, 966, (1960).
26. F. Marsiglio, J.P. Carbotte, Gap function and density of states in the strong-coupling limit for an electron-boson system // Phys. Rev. B 43, 5355 (1991).
27. R. Micnas, J. Ranninger, S. Robaszkiewicz, Superconductivity in narrow-band systems with local nonretarded attractive interactions // Rev. Mod. Phys. 62, 113 (1990).
28. W. Zwerger (ed.), The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas Lecture Notes in Physics: Springer, Berlin, Heidelberg, (2012).
29. I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases // Rev. Mod. Phys. 80, 885 (2008).
30. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Theory of ultracold atomic Fermi gases // Rev. Mod. Phys. 80, 1215 (2008).
31. Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, K. Levin, BCS-BEC crossover: From high temperature superconductors to ultracold superfluids // Phys. Rep. 412, 1 (2005).
32. W. Ketterle, M.W. Zwierlein, Making, probing and understanding ultracold Fermi gases in Ultra-cold Fermi gases, M. Inguscio,W. Ketterle, C. Salomon, eds., p.95 IOS Press, Amsterdam, (2007).
33. P. Pieri, G.C. Strinati, Strong-coupling limit in the evolution from BCS superconductivity to Bose-Einstein condensation // Phys. Rev. B 61, 15370 (2000).
34. B. Gerlach, H. Löwen, Analytical properties of polaron systems or: Do polaronic phase transitions exist or not? // Rev. Mod. Phys. 63, 63 (1991).
35. В.Д. Лахно, Трансляционно-инвариантная теория полярона (биполярона) и проблема квантования в окрестности классического решения. // ЖЭТФ, 143, №6, 1033-1038 (2013).
36. А.П. Горьков, Микроскопический вывод уравнений Гинзбурга-Ландау в теории сверхпроводимости // ЖЭТФ, т.36, с. 1918, (1959)
37. А.С.Александров, А.Б.Кребс, Поляроны в высокотемпературных сверхпроводниках // УФН, 162,1, (1992).
38. B.K. Chakraverty, J. Ranninger, D. Feinberg, Experimental and Theoretical Constraints of Bipolaronic Superconductivity in High Tc Materials: An Impossibility // Phys. Rev. Lett, (1988), v. 81, p. 433.
39. E.V.L. de Mello, J. Ranninger, Dynamical properties of small polarons // Phys. Rev. B 55, 14872 (1997).

40. Yu.A. Firsov, V.V. Kabanov, E.K. Kudinov, A.S. Alexandrov, Comment on "Dynamical properties of small polarons"// Phys. Rev. B 59, 12132 (1999).
41. E.V.L. de Mello, J. Ranninger, Reply to "Comment on ’Dynamical properties of small polarons’ "// Phys. Rev. B 59, 12135 (1999).
42. P. Zhou et al, Electron pairing in the pseudogap state revealed by shot noise in copper oxide junctions // Nature 572, 493-496, 2019.
43. I. Božovič, X. He, et al. Dependence of the critical temperature in overdoped coopper oxides on superfluid density // Nature 2016 v.536, p.309.
44. В.Д. Лахно, Анзац Пекара и проблема сильной связи в теории полярона // УФН, т. 185, 317-331, (2015).
45. С.И. Пекар, Исследования по электронной теории кристаллов // (М. – Л: ГИТТЛ, 1951).
46. H. Fröhlich, H. Pelzer, S. Zienau, Properties of slow electrons in polar materials // Philos. Mag. 41, 221, (1950).
47. C. G. Kuper, G. D. Whitfield (eds), Polarons and Excitos, (Edinburg: Oliver and Boyd, 1963).
48. J. T. Devreese, A.S. Alexandrov, Froehlich Polaron and Bipolaron: Recent Developments // Rep. Progr. Phys., 72, 066501, (2009).
49. V.D. Lakhno (Ed.) Polarons and Applications (Chichester: Wiley, 1994)
50. J.T. Devreese (Ed.) Polarons in Ionic Crystal and Polar Semiconductors (Amsterdam: North-Holland, 1972).
51. J.T. Devreese, F. Peeters (Eds), Polarons and Excitons in Polar Semiconductors and Ionic Crystals (New York: Plenum Press, 1984).
52. A.J. Heeger, S. Kivelson, J. Schrieffer, W.-P. Su, Solitons in Conducting Polymers // Rev. Mod. Phys., (1988), 60, 781.
53. L.A. Ribeiro et al., Effects of Temperature and Electric Field Induced Phase Transitions on the Dynamics of Polarons and Bipolarons // New Journal of Chemistry, (2013), 37, 2829-2836.
54. L.F.R Junior, S. Stafström, Polaron Stability in Molecular Semiconductors: Theoretical Insight into the Impact of the Temperature, Electric Field and the System Dimensionality // Phys. Chem. Phys, (2015), 17, 8973-8982.
55. G.B. Schuster, Long-Range Charge Transfer in DNA, Heidelberg: Springer, 2004.
56. E.B. Starikov, J.P. Lewis, S. Tanaka, Modern Methods for Theoretical Physical Chemistry of Biopolimers, Elsevier, Amsterdam, Boston, Tokyo, 2006.
57. D. Emin, Polarons, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
58. A.S. Alexandrov, N. Mott, Polarons & Bipolarons, World Sci. Pub. CO Inc, Singapore, (1996).
59. G. Iadonisi, J Ranninger, G. De Filips, Polarons in Bulk Materials and Systems with Reduced Dimensionality // IOS Press, (2006), Amsterdam, Oxford, Tokio, Washington DC.
60. Э.Л. Нагаев, Физика магнитных полупроводников, М.: Наука, 1979.

61. В.Д. Лахно, Г.Н. Чуев. Структура полярона большого радиуса в пределе сильной связи // Успехи физических наук, 1995, т. 165, с. 285-298.
62. F. Grusdt et al., Bose polarons in ultracold atoms in one dimension: beyond the Fröhlich paradigm // New J. Phys. 2017, 19, 103035.
63. A. Chatterjee, S. Mukhopadhyay, Polarons and Bipolarons. An Introduction // CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018.
64. M.V. Tkach, et al., Renormalized energy of ground and first excited state of Frohlich polaron in the range of weak conpling // Condensed Matter Physics, (2015), v. 18, №3, 33707: 1-12.
65. E.H. Lieb, K. Yamazaki, Ground State Energy and Effective Mass of the Polaron // Phys. Rev., v.11, p. 728-733, (1958).
66. E.H. Lieb, L.E. Thomas, Exact Ground State Energy of the Sstrong-Conpling Polaron // Commun. in Math. Phys, v. 183, p. 511-519, 1997.
67. Н.К. Балабаев, В.Д.Лахно, Солитонные решения в теории полярона // ТМФ, т. 45, стр. 139-141, (1980).
68. Р. Раджараман, Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля, М.: Мир, 1985), 414 с.
69. В.Д. Лахно, Энергия и критическое значение параметра ионной связи трехмерного биполярона большого радиуса // ЖЭТФ, 137, 926, (2010).
70. V.D. Lakhno, Translation-invariant bipolarons and the problem of high temperature superconductivity // Solid State Comm., 152, 621, (2012).
71. Н.И. Каширина, В.Д. Лахно, А.В. Тулуб, Теорема вириала и проблема основного состояния в теории полярона // ЖЭТФ, 141, 994, (2012).
72. S.L. Braunstein, Squeezing as an irreducible resonrce // Phys. Rev. A **71** 055801 (2005).
73. T. Hakioglu, et al., Phonon Squeezing vie correlations in the superconducting electron-phonon interaction // Phys. Rev. B, v.51, 15363, (1995).
74. А.С. Шумовский, Каноническое преобразование Боголюбова и коллективные состояния бозе-полей // ТМФ, т.89, 438-445, (1991).
75. А.В. Тулуб, Медленные электроны в полярных кристаллах // ЖЭТФ, 41, 1828, (1961).
76. R.J. Glauber, Photon correlations // Phys. Rev. Lett, v. 10, p. 84, (1963).
77. М.К. Тайш, Б.Э.А. Салэ, Сжатые состояния света // УФН, т. 161, с. 101, (1991).
78. В.П. Шляйх, Квантовая оптика в фазовом пространстве // Москва, Физматлит, 2005, 760 с.; W.P. Schleich, Quantum optics in Phase Space // Wiley-VCH, Berlin, (2001).
79. О.В. Мисочко, Неклассические состояния возбуждений кристаллической решетки: Сжатые и запутанные фононы // УФН, 183, 917-933, (2013).
80. Zheng Hang, New type of Cooper pairing in systems with strong electron-phonon interaction // Phys. Rev. B, v. 37, p. 7419, (1988).
81. Zheng Hang, Variational ground state of a system with strong electron-phonon interaction // Phys. Rev. B, v.38, p.11865, (1988).

82. Zhend Hang, Variational treatment of the strong electron-phonon interaction // J. Phys.: Condens. Matter, v. 1, p. 1641- 1651, (1989).
83. Zhend Hang, Reconsideration of a simple model for bipolarons // Solid State Communications, v. 65, p. 731-734, (1988).
84. Zhend Hang, Squeered polarons in one dimebsion // Phys. Lett A, v. 131, p. 115-118, (1988).
85. T. Holsteint, Studies of polaron motion: Part II. “Small” polaron // Annals of Physics, v. 8, № 3, p. 343-389, (1959).
86. M. Porsch, J. Röseler, Recoil Effects in the Polaron Problem // Phys. Status Soliti, B 23, 365, (1967).
87. J. Röseler, A new variational ansatz in the polaron theory // Phys. Status Solidi, 25, 311, (1968).
88. H. Barentzen, Effective Electron-Hole Interaction for Intermediate and Strong-Phonon Conpling // Phys. Stat. Sol. (B), 71, 245, (1975).
89. B.S. Kandemir, T. Altanhan, Some Properties of large polarons with squeezed states // J. Phys. Condens . Mat., 6, 4505-4514, (1994).
90. P. Nagy, The polaron squeezed states // J. Phys. Condens. Matter, 2, p. 10573-10579, (1991).
91. B.S. Kandemir, A. Cetin, Impurity magnetopolaron in a parabolic quantum dot: the squeezed-state variational approach // J. Phys.: Condens. Matter 17, p. 667-677, (2005).
92. Yan-Min Zhang, Cheng Ze, Study of Two-Mode Squeezed Magnetopolarons // Commun. Theor. Phys., 47, p. 747-751, (2007).
93. N. Kervan, T. Altanhan, A. Chatterjee, A variational approach with squeezed – state for the polaronic effects in quantum dots // Phys. Lett A. 315, p. 280-287, (2003).
94. F. Marsiglio, J.P. Carlotte, Superconductivity. v.1, Springer – Verlag Berlin (2008).
95. J.P. Carbotte, Properties of boson-exchange superconductors // Rev. Mod. Phys, 62, 1027, (1990).
96. А.В. Тулуб, Учет отдачи в нерелятивистской квантовой теории поля // Вестник Ленинградского университета, №22, серия физики и химии, вып.4, стр. 104-118, (1960).
97. А.В. Тулуб, Комментарий к теории полярон-фононного рассеяния // ТМФ, т.185, вып. 6, стр. 199-212 (2015).
98. F. London, The λ-Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy // Nature 1938 v.141 p.643–644.
99. L. Tisza, Transport Phenomena in Helium II // Nature 1938 v.141 p.913.
100. Л.Д. Ландау, Теория сверхтекучести гелия II // ЖЭТФ 1941 т.11 стр.592; The Theory of Superfluidity of Helium II // J. Phys. U.S.S.R. 1941 v.5 p.71; JETP 1941 v.11 p.592.
101. Н.Н. Боголюбов, К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР Сер. Физ. 1947 т.11(1) стр.77; On the theory of superfluidity // J. Phys. USSR 1947 v.11 p.23.

102. В.Л. Гинсбург, Л.Д. Ландау, К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ, 20, 1064, 1950.
103. Н.Н. Боголюбов, О новом методе в теории сверхпроводимости // ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 1, стр. 58.
104. P.W. Anderson, Model for electronic structure of amorphous semiconductors // Phys. Rev. Lett, v. 34, p. 953, (1975).
105. A. Alexandrov, J. Ranninger, Bipolaronic Superconductivity // Phys. Rev B24, p. 1164, (1981).
106. P.W. Anderson, The Theory of Superconductivity in the High-T_c Cuprates // Princeton Series in Physics 1997, Princeton Univ. Press.
107. Ю.А. Изюмов, Сильно коррелированные электроны: t-j модель // УФН, (1997), 167, 465-497.
108. В. Вайскопф, Образование куперовских пар и природа сверхпроводящих токов // УФН, 140, 117-135, 1983.
109. V.D. Lakhno, Superconducting Properties of 3D Low-Density TI-Bipolaron Gas in Magnetic Field // Condens. Matter, 2019, 4, 43.
110. W. Heisenberg, Die selbstenergie des elektrons // Z. Phys. 65, 4 (1930).
111. L. Rosenfeld, Uber eine m.ogliche Fassung des Diracschen Programms zur Quantenelektrodynamik und deren formalen Zusammenhang mit der Heisenberg-Paulischen Theorie // Z. Phys. 76, 729 (1932).
112. С.В. Тябликов, Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975.
113. S.J. Miyake, Bound Polaron in the Strong-coupling Regime // in Polarons and Applications, V.D. Lakhno, ed., Wiley, Leeds, 219 (1994).
114. И.Б. Левинсон, Э.И. Рашба, Пороговые явления и связанные состояния в поляронной проблеме // УФН, 111, 683-718, (1973).
115. V.D. Lakhno, A translation invariant bipolaron in the Holstein model and superconductivity // Springer Plus, 5, 1277, 2016.
116. V.D. Lakhno, Phonon interaction of electrons in the translation-invariant strong-coupling theory, Mod. Phys. Lett. B, **30**, 1650031, (2016).
117. V.D. Lakhno, Superconducting Properties of 3D Low-Density Translation-Invariant Bipolaron Gas // Adv. Condense Matt. Phys., 2018, ID 1380986.
118. V.D. Lakhno, Superconducting Properties of a nonideal Bipolaron Gas // Physica C: Superconductivity and its applications, 561, 2019, 1-8.
119. V.D. Lakhno, Peculiarities in the concentration dependence of the superconducting transition temperature in the bipolaron theory of Cooper pairs // Mod. Phys. Lett. B, **31**, 1750125, (2017).
120. L. Foldy, Charged Boson Gas // Phys. Rev. B, **124**, 649, (1961).
121. S.R. Hore, N.E. Frankel, Dielectric response of the charged Bose gas in the random-phase approximation // Phys. Rev. B, **12**, 2619, (1975).
122. S.R. Hore, N.E. Frankel, Zero-temperature dielectric response of the charged Bose gas in a uniform magnetic field // Phys. Rev. B, **14**, 1952, (1976).
123. R.A. Ogg Jr., Superconductivity in solid metal-ammonia solutions // Phys. Rev. 70, 93 (1946).

124. В.Л. Винецкий, Э.А. Пашицкий, Сверхтекучесть заряженного бозе-газа и биполяронный механизм сверхпроводимости // УФЖ, 20, 338 (1975).
125. Э.А. Пашицкий, В.Л. Винецкий, Плазмонный и биполяронный механизмы высокотемпературной сверхпроводимости // Письма в ЖЭТФ, Приложения, 46, 124 (1987).
126. D. Emin, Formation, motion, and high-temperature superconductivity of large bipolarons // Phys. Rev. Lett. 62, 1544 (1989).
127. В.Л. Винецкий, Р.И. Каширина, Э.А. Пашицкий, Биполяронные состояния в ионных кристаллах и проблема высокотемпературной сверхпроводимости // УФЖ 37, 77 (1992).
128. D. Emin, Dynamic d-symmetry Bose condensate of a planar-large-bipolaron-liquid in cuprate superconductors // Phil. Mag. 31, 2931-2945, 2017.
129. В.В. Шмидт, Введение в физику сверхпроводников, МЦНМО, Москва, (2000), 397 с.
V.V. Schmidt, The Physics of Superconductors, P. Muller, A.V. Ustinov eds.: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1997).
130. A.B. Pippard, Field variation of the superconducting penetration depth // Proc. Roy. Soc. (London) A203, 210 (1950).
131. M.R. Schafroth, Superconductivity of a Charged Ideal Bose Gas // Phys. Rev. 100, 463 (1955).
132. A.S. Alexandrov, Comment on “Experimental and Theoretical Constraints of Bipolaronic Superconductivity in High Tc Materials: An Impossibility” // Phys. Rev. Lett. 82, 2620 (1999).
133. A.S. Alexandrov, V.V. Kabanov, Parameter-free expression for superconducting *Tc* in cuprates // Phys. Rev. B 59, 13628 (1999).
134. Y.J. Uemura et al., Universal correlations between Tc and ns/m (carrier density over effective mass) in high-Tc cuprate superconductors. // Phys. Rev. Lett. 62, 2317 (1989).
135. Y.J. Uemura et al, Basic similarities among cuprate, bismuthate, organic, Chevrel-phase, and heavy-fermion superconductors shown by penetration-depth measurements // Phys. Rev. Lett. 66, 2665 (1991).
136. C.C. Homes et al., A universal scaling relation in high-temperature superconductors // Nature 430, 539 (2004).
137. J. Zaanen, Superconductivity: why the temperature is high // Nature 430, 512 (2004).
138. J. Erdmenger, P. Kerner, S. M.uller, Towards a holographic realization of Homes’ law // J. High Energy Phys. 10, 21 (2012).
139. W. Meevasana, T.P. Devereaux et al., Calculation of overdamped c-axis charge dynamics and the coupling to polar phonons in cuprate superconductors, Phys. Rev. B, **74**, ID 174524, (2006).
140. W. Meevasana, N.J.C. Ingle, D.H. Lu et al., Doping Dependence of the Coupling of Electrons to Bosonic Modes in the Single-Layer High-Temperature $Bi2Sr2CuO6$ Superconductor, Phys. Rev. Lett., **96**, ID 157003, (2006).

141. A.S. Mishchenko, N. Nagaosa, et al., Charge Dynamics of Doped Holes in High Tc Cuprate Superconductors: A Clue from Optical Conductivity // Phys. Rev. Lett., **100**, (2008).
142. A.S. Alexandrov, Theory of Superconductivity from weak to strong coupling, IOP publishing, Bristol, UK (2003).
143. A.S. Alexandrov, N.F. Mott, Bipolarons, Rep. Progr. Phys., **57**, 1197, (1994).
144. J. Zaanen, Condensed-matter physics: Superconducting electrons go Missing // Nature, **536**, 282, (2016).
145. V.R. Shaginyan, V.A. Stephanovich, A.Z. Msezane et al., The Influence of Topological Phase Transition on the Superfluid Density of Overdoped Copper Oxides // Phys. Chem. Chem. Phys, **19**, 21964, (2017).
146. J. Dukelsky, V.A. Khodel, P. Schuck et al., Fermion condensation and non Fermi liquid behavior in a model with long range forces // Z. Phys. B, **102**, 245, (1997).
147. J. Wu Božovič, X. He, A.T. Bollinger, On the origin of high-temperature superconductivity in cuprates // Proc. SPIE, Oxide-based Materials and Devices VIII, **10105**, 1010502, (2017).
148. E.A. Pashitskii, The critical temperature as a function of the number of Cooper pairs, and the superconductivity mechanism in a layered LaSrCuO Crystal // Low Temp. Phys., **42**, 1184, (2016).
149. G-Q. Hai, L. Candido, B. Brito, F. Peeters, Electron pairing: from metastable electron pair to bipolaron // Journal of Physics Comm., **2**, 035017, (2018).
150. Bilbro et al. Temporal correlations of superconductivity above the transition temperature in $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ probed by terahertz spectroscopy // Nat. Phys. 7, 298-302, 2011.
151. Л.П. Горьков, Н.Б. Копнин, Высокотемпературные сверхпроводники с точки зрения эксперимента // УФН, **156**, 117, (1988).
152. A. Damascelli, Z. Hussain, Z.-X. Shen, Angle-resolved photoemission studies of the cuprate superconductors // Rev. Mod. Phys., **75**, 473, (2003).
153. M.R. Norman, D. Pines, C. Kallin, The pseudogap: friend or foe of high *Tc*? // Adv. Phys., **54**, 715, (2005).
154. P.A. Lee, Amperean Pairing and the Pseudogap Phase of Cuprate Superconductors // Phys. Rev. X, **4**, 031017, (2014).
155. M. Hashimoto, I.M. Vishik, et al., Energy gaps in high-transition-temperature cuprate superconductors // Nat. Phys., **10**, 483, (2014).
156. T. Timusk, B. Statt, The pseudogap in high-temperature superconductors: an experimental survey // Rep. Progr. Phys., **62**, 61-122, (1999).
157. N. Overend, M.A. Howson, I.D. Lawrie, 3D X-Y scaling of the specific heat of $Y Ba2Cu3O7$ single crystals // Phys. Rev. Lett., **72**, 3238, (1994).
158. A. Marouchkine, Room-Temperature Superconductivity: Cambridge Int. Sci. Publ., Cambridge, (2004).
159. W. Buckel, R. Kleiner, Superconductivity: Fundamentals and Applications: Wiley-VCH, Weinheim, 2-nd Edition, (2004).

160. J. Edstam, H.K. Olsson, London penetration depth of YBCO in the frequency range 80-700 GHz // Physica B 194-196, Part 2, 1589-1590 (1994).
161. C. Panagopoulos, J.R. Cooper, T. Xiang, Systematic behavior of the in-plane penetration depth in d-wave cuprates // Phys. Rev. B 57, 13422 (1998).
162. T. Pereg-Barnea et al., Absolute values of the London penetration depth in $Y Ba2Cu3O6 + y$ measured by zero field ESR spectroscopy on Gd doped single crystals // Phys. Rev. B 69, 184513 (2004).
163. D.A. Bonn et al., Microwave determination of the quasiparticle scattering time in $Y Ba2Cu3O6{:}95$ // Phys. Rev. B 47, 11314 (1993).
164. О. Моделунг, Теория твердого тела. М.: Наука,1980, 416 с. O. Madelung, Festkorpertheorie I, II: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1972).
165. Dong-Ho Wu, S. Sridhar, Pinning forces and lower critical fields in $Y Ba2Cu3Oy$ crystals: Temperature dependence and anisotropy // Phys. Rev. Lett. 65, 2074 (1990).
166. I. Maggio-Aprile, Ch. Renner, A. Erb, et al., Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on $Y Ba2Cu3O7$ // Phys. Rev. Lett., **75**, 2754, (1995).
167. S.H. Pan, E.W. Hudson, et al., STM Studies of the Electronic Structure of Vortex Cores in $Bi2Sr2CaCu2O8$ // Phys. Rev. Lett., **85**, 1536, (2000).
168. B.W. Hoogenboom, Ch. Renner, et al., Low-energy structures in vortex core tunneling spectra in$Bi2Sr2CaCu2O8$ // Physica C: Superconductivity, **332**, 440, (2000).
169. Handbook of High-Temperature Superconductivity. Theory and Experiment, J.R. Schriffer Ed., J.S. Brooks Associated Ed., Springer, (2007), 626 p, Springer Science + Business Media, LLC.
170. A.A. Shanenko et al., Stabilization of Bipolarons by Polaron Environment // Solid St. Comm., 98 (1996) 1091.
171. M.A. Smondyrev et al, Stability criterion for large bipolarons in a polaron-gas background // Phys. Rev. B, 63, (2000) 024302.
172. D.R. Garcia, A. Lanzara, Through a lattice darkly: shedding light on electron – phonon coupling in high T_c cuprates // Adv. Cond. Mat. 2010 ID 807412.
173. H. Iwasawa, et al., Isotopic Fingerprint of Electron-Phonon Coupling in High-Tc Cuprates // Phys. Rev. Lett., 101, 157005, (2008).
174. X.J. Zhou, et al., Universal nodal Fermi velocity // Nature, 423, 398, (2003).
175. S.R. Park et al., Angle-Resolved Photoemission Spectroscopy of Electron-Doped Cuprate Superconductors: Isotropic Electron-Phonon Coupling // Phys. Rev. Lett., 101, 117006, (2008).
176. F. Giubileo, et al. Two gap state density in MgB_2: a true bulk property of a proximity effect? // Phys. Rev. Lett. 2002 v.58, p.764.
177. F. Giubileo, et al. Strong coupling and double gap density of states in superconducting MgB_2 // Phys. Rev. Lett. 2001 v.87 p.17708.
178. M. Hattass, T. Jahnke et al. Dynamics of two-electron photoemission from Cu(111) // Phys. Rev. B 2008 v.77 p.165432.

179. B. Vignolle, A. Carrington et al. Quantum oscillations in an overdoped high-T_c superconductor // Nature 2008 v.455 p.952.
180. E.A. Yelland, J. Singleton et al. Quantum oscillations in the underdoped cuprate $YBa_2Cu_4O_8$ // Phys. Rev. Lett. 2008 v.100 p.047003 DOI:10.1103/Phys.Rev.Lett.100.047 003.
181. T. Helm, M.V. Kartsovnik et al. Evolution of the Fermi Surface of the Electron-Dopel High-Temperature Superconductor $Nd_{2-x}Ce_xCuO_4$ Revealed by Shubnikov-de Haas Oscillations // Phys. Rev. Lett. 2009 v.103 p.157002; DOI 10.1103/ PhysRevLett.103.157002.
182. А.В. Окомельков, Спектр нормальных волн в двумерной решетке нейтральных атомов // ФТТ, 44, стр. 1888-1894, (2002).
183. M.J. Lawler et al., Intra-unit-cell electronic nematicity of the high-T_c copper-oxide pseudogap states // Nature 466, 347, (2010).
184. S.V. Borisenko, A.A. Kordyuk et al. Estimation of matrix-element effects and determination of the Fermi surface in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ systems using angle-scanned photoemission spectroscopy// Phys. Rev. B 2001 v.64 p.094513.
185. K.M. Shen, F. Ronning et al. Missing quasiparticles and the chemical potential puzzle in the doping evolution of the cuprate superconductors // Phys. Rev. Lett. 2004 v.93 p.267002.
186. H. Matsui, T. Sato et al. BCS-like Bogoliubov quasiparticles in high-T_c superconductors observed by angle-resolved photoemission spectroscopy // Phys. Rev. Lett. 2003 v.90 p.217002.
187. I.M. Vishik, W.S. Lee et al. Doping-dependendent nodal Fermi velocity of the high-temperature superconductor $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ reveald using high-resolution angle-resolved photoemission spectroscopy // Phys. Rev. Lett. 2010 v.104 p.207002.
188. N.C. Plumb, T.J. Reber et al. Low-energy (<10mev) feature in the nodal electron self-energy and strong temperature dependence of the Fermi velocity in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$// Phys. Rev. Lett. 2010 v.105 p.046402.
189. H. Anzai, A. Ino et al. Energy-dependent enhancement of the electron-coupling spectrum of the underdoped $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ superconductor// Phys. Rev. Lett. 2010 v.105 p.227002; DOI 10.1103 // Phys. Rev. Lett.105.227002.
190. J.D. Rameau, H.B. Yang et al. Coupling of low-energy electrons in the optimally doped $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ superconductor to an optical phonon mode// Phys. Rev. B 2009 v.80 p.184513.
191. K.A. Kouzakov, J. Berakdar, Photoinduced Emission of cooper pairs from superconductors // Phys. Rev. Lett. 2003 v.91 p.257007.
192. G. Varelogiannis, Orthorhombicity mixing of s-and d-gap components in $YBa_2Cu_3O_7$ without involving the chains // Phys. Rev. B 1998 v.57 p.R732.
193. T.P. Devereaux, R. Hackl, Inelastic light scattering from correlated electrons // Rev.Mod.Phys. 2007 v.79 p.175.
194. О.В. Мисочко, Электронное комбинационное рассеяние света в высокотемпературных сверхпроводниках // УФН, 173, 385, (2003).

195. V.D. Lakhno, New method of soft modes investigation by Little-Parks effect // arxiv: 1908. 05735, Cond-mat, supr-con.
196. K. Seo, H.-d. Chen & J. Hu, Complementary pair-density-wave and d-wave-checkerboard orderings in high-temperature superconductors // Phys. Rev. B 78, 094510 (2008).
197. E. Berg, E. Fradkin & S.A. Kivelson, Charge-4e superconductivity from pair-density-wave order in certain high-temperature superconductors // Nature Phys. 5, 830-833 (2009).
198. D.F. Agterberg & H. Tsunetsugu, Dislocations and vortices in pair-density-wave superconductors // Nature Phys. 4, 639-642 (2008).
199. M. Zelli, C. Kallin & A.J. Berlinksy, Quantium oscillations in a π-striped superconductor // Phys. Rev. B 86, 104507 (2012).
200. H.-D. Chen, O. Vafek, A. Yazdani & S.-C. Zhang // Pair density wave in the pseudogap state of high temperature superconductors // Phys. Rev. Lett. 93, 187002 (2004).
201. C. Pepin, V.S. de Carvalho, T. Kloss & X. Montiel, Pseudogap, charge order, and pairing density wave at the hot spots in curpate superconducters // Phys. Rev. B 90, 195207 (2014).
202. H. Freire, V.S. de Carvalho & C. Pepin, Penormalization group analysis of the pair-density-wave and charge order within the termionic hot-spot model for cuprate supercoducters // Phys. Rev. B 92, 045132 (2015).
203. Y. Wang, D.F. Agterberg & A. Chubucov, Interplay between pair-and charge-density-wave orders in underdoped cuprates // Phys. Rev. B 91, 115103 (2015).
204. Y. Wang, D.F. Agterberg & A. Chubucov, Coexistence of charge-density-wave and pair-density-wave orders in underdoped cuprates // Phys. Rev. Lett 114, 197001 (2015).
205. P. Grzybowski, R. Micnas, // Acta Physica Polonica A, v. 111, p. 455, (2007).
206. S.A. Kivelson, D.S. Rokhsar, Bogoliubov quasiparticles, spinons, and spin-charged decoupling in superconductors // Phys. Rev. B 1990 v.41 p.11693.
207. A.P. Drozdov, M.I. Eremets et al. Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydrite system // Nature 2015 v.525 p.73.
208. M. Somayazulu, M. Ahart et al. Evidence for Superconductivity above 260 K in Lanthanum Superhydride at megabar pressures // Phys. Rev. Lett. 2019 v.122(2) p.027001.
209. В.Д. Лахно, Э.Л. Нагаев, Феррон-поляронные состояния носителей тока в антиферромагнитных полупроводниках // Физика твердого тела, (1976), т.18, с. 3429-3432.
210. В.Д. Лахно, Э.Л. Нагаев, Магнитострикционные Ферроны // Физика твердого тела, (1978), т. 20, с. 82-86.
211. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля // И.Л, 1963.