Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Г. Джавадов, Асимптотика решения краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в областях, у которых одно измерение достаточно мало в сравнении с другими,
Докл. АН СССР, 1965, том 160, номер 3, 507–510

https://www.mathnet.ru/dan30594

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.171
20 июня 2025 г., 04:39:51

Доклады Академии наук СССР
1965. Том 160, № 3

МАТЕМАТИКА

М. Г. ДЖАВАДОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ, У КОТОРЫХ ОДНО ИЗМЕРЕНИЕ ДОСТАТОЧНО МАЛО В СРАВНЕНИИ С ДРУГИМИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 11 VII 1964)

В настоящей работе исследуется асимптотика решения следующей краевой задачи.

Пусть Q — цилиндр с высотой h, малой по отношению к остальным измерениям. Боковую поверхность цилиндра обозначим F и рассмотрим следующую задачу:

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - bu = 0; \tag{1}$$

$$a_{nn}\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2}u = \begin{cases} P & \text{при } x_n = h, \\ 0 & \text{при } x_n = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$u\,|_F = \Phi(s,\ x_n), \tag{3}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\alpha = \text{const} > 0$, $b \geqslant 0$, $P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и $\Phi(s, x_n)$ — заданные гладкие функции.

Сделаем замену переменных $x_n = th$. Имеем

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{a_{nn}}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{h}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + a_n \frac{\partial u}{\partial t}\right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - bu = 0; \tag{1'}$$

$$\frac{a_{nn}}{h}\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2}u = \begin{cases} P & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases} \tag{2'}$$

$$u\,|_F = \Phi(s,\ th). \tag{3'}$$

Асимптотическое представление решения поставленной задачи будем искать в виде $u = \widetilde{w}_n + \widetilde{v}_n + z_n$, где функция $\widetilde{w}_n$ будет определена первым итерационным процессом, а $\widetilde{v}_n$ — вторым; z_n — остаточный член.

Первый итерационный процесс. Расщеплению (1′) оператора $\mathcal{L}$ отвечает рекуррентный процесс, который получается, если искать приближенное решение уравнения (1′) в виде

$$\widetilde{w}_n = w_{-1}/h + w_0 + hw_1 + \ldots + h^n w_n + h^{n+1}w_{n+1}. \tag{4}$$

Подставив выражение для $\widetilde{w}_n$ из (4) в (1′), (2′) и сравнивая члены с одинаковыми степенями по h, получим

$$\partial^2 w_{-1}/\partial t^2 = 0;\ \partial w_{-1}/\partial t = 0 \quad \text{при } t = 1; \quad \partial w_{-1}/\partial t = 0 \ \text{при } t = 0; \tag{5}$$

$$a_{nn}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial x_i \partial t} - a_n \frac{\partial w_{-1}}{\partial t}; \tag{6}$$

$$a_{nn}\frac{\partial w_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{\partial w_{-1}}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2}w_{-1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$a_{nn}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial t} - a_n\frac{\partial w_0}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial w_{-1}}{\partial x_i} + bw_{-1}; \tag{8}$$

$$a_{nn}\frac{\partial w_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}+\frac{a_n}{2}w_0=\begin{cases}P & \text{при } t=1,\\ 0 & \text{при } t=0;\end{cases} \tag{9}$$

$$a_{nn}\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}=-\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial x_i\partial t}-a_n\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial w_{k-2}}{\partial x_i}+bw_{k-2}; \tag{10}$$

$$a_{nn}\frac{\partial w_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\frac{\partial w_{k-1}}{\partial x_i}+\frac{a_n}{2}w_{k-1}=\begin{cases}0 & \text{при } t=1,\\ 0 & \text{при } t=0,\end{cases}\quad k=2,3,\ldots \tag{11}$$

Из (5) видно, что $w_{-1}=\widetilde{w}_{-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$, т. е. решение задачи (5) не зависит от t (от x_n).

Учитывая это, из (6) и (7) находим, что

$$w_0=\overline{w}_0-t\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{in}}{a_{nn}}\frac{\partial w_{-1}}{\partial x_i}+\frac{a_n}{2a_{nn}}\overline{w}_{-1}\right),\quad \text{где } \overline{w}_0=\overline{w}_0(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Отметим, что все функции $\overline{w}_k$ в дальнейшем подлежат определению.

Подставим выражение w_{-1} и w_0 в (8) и (9), получим

$$a_{nn}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{a_{in}a_{jn}}{a_{nn}}\frac{\partial^2\overline{w}_{-1}}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{3}{2}\frac{a_{in}a_n}{a_{nn}}\frac{\partial\overline{w}_{-1}}{\partial x_i}+\frac{a_n^2}{2a_{nn}}\overline{w}_{-1}-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial^2\overline{w}_{-1}}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\frac{\partial\overline{w}_{-1}}{\partial x_i}+b\overline{w}_{-1},$$

$$a_{nn}\frac{\partial w_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}+\frac{a_n}{2}w_0=\begin{cases}P & \text{при } t=1,\\ 0 & \text{при } t=0.\end{cases}$$

Очевидно, сопряженная однородная задача, соответствующая задаче (8) и (9), есть задача вида (5), которая имеет отличное от нуля решение, не зависящее от t. Обозначим его через z_0. Тогда условие разрешимости последней задачи запишется так:

$$\int_0^1 a_{nn}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}z_0dt=a_{nn}\frac{\partial w_1}{\partial t}z_0\Big|_{t=0}^{t=1}.$$

Отсюда

$$l_1(\overline{w}_{-1})\equiv-\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial^2\overline{w}_{-1}}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i-\frac{a_{in}a_n}{2a_{nn}}\right)\frac{\partial\overline{w}_{-1}}{\partial x_i}+\left(b+\frac{a_n^2}{4a_{nn}}\right)\overline{w}_{-1}=P.$$

Следовательно,

$$w_1=\overline{w}_1-t\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\frac{\partial\overline{w}_0}{\partial x_i}+\frac{a_n}{2}\overline{w}_0\right)+$$
$$+\frac{t^2}{2!}\left(P+\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{a_{in}a_{jn}}{a_{nn}}\frac{\partial^2\overline{w}_{-1}}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{in}a_n}{a_{nn}}\frac{\partial\overline{w}_{-1}}{\partial x_i}+\frac{a_n^2}{4a_{nn}}\overline{w}_{-1}\right).$$

Подставив выражения для w_0 и w_1 в (10) и (11) при $k=2$ и написав условие разрешимости полученной задачи, находим

$$l_2(\overline{w}_0)\equiv-\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial^2\overline{w}_0}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i-\frac{a_{in}a_n}{2}\right)\frac{\partial\overline{w}_0}{\partial x_i}+\left(b+\frac{a_n^2}{4}\right)\overline{w}_0=$$
$$=\frac{a_n}{4}P-\sum_{i,j,k=1}^{n-1}\frac{a_{ij}a_{kn}}{a_{nn}}\frac{\partial^3\overline{w}_{-1}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}+\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{a_{in}a_{jn}a_n-a_{ij}a_n-2a_ia_{jn}}{4a_{nn}}\frac{\partial^2\overline{w}_{-1}}{\partial x_i\partial x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{in}a_n^2-a_{in}a_n+2a_{in}b}{4a_{nn}}\frac{\partial\overline{w}_{-1}}{\partial x_i}+\frac{a_nb}{4a_{nn}}\overline{w}_{-1}.$$

Следовательно, $w_2 = \overline{w}_2 + f_2$, где f_2 — известная функция, если определены функции $\overline{w}_{-1}$, $\overline{w}_0$ и $\overline{w}_1$.

Продолжая таким образом процесс, получим, что $w_k = \overline{w}_k + f_k$, где f_k — известные функции, а функции $\overline{w}_k$ определяем из следующих задач:

$$l_1(\overline{w}_{-1}) = P, \quad \overline{w}_{-1}|_{F_1} = 0, \quad l_2(\overline{w}_k) = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

где φ_k — известные функции, выраженные через ранее определенные функции.

Граничные условия для последних уравнений будут сформулированы ниже. Очевидно, вообще говоря, функции w_k не удовлетворяют граничным условиям на F. Поэтому к w_k прибавляем функции типа пограничного слоя так, чтобы полученная сумма удовлетворяла всем граничным условиям. Эти функции строятся вторым итерационным процессом.

Второй итерационный процесс. Для того чтобы описать второй итерационный процесс, в достаточно малой окрестности F вводим локально координаты (ρ, y), где ρ — расстояние по нормали к F, $y = y(t, y_1, \ldots, y_{n-1})$ — координата точки на F, и сделаем замену переменных $\rho = h\tau$. В новых координатах уравнение (1′) запишется так

$$\mathcal{L}v \equiv \frac{1}{h^2} M_0 v + \frac{1}{h} M_1 v + M_2 v, \tag{1''}$$

где

$$M_0 \equiv a_{nn}\partial^2/\partial t^2 + A\partial^2/\partial t\,\partial\tau + B\partial^2/\partial\tau^2, \quad M_1 \equiv \sum_{i=1}^{n-2} a_{in}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial\tau},$$

$$M_2 \equiv \sum_{i,j=1}^{n-2} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i\frac{\partial}{\partial y_i} - b.$$

Решение (1″) типа пограничного слоя ищем в виде

$$\tilde{v}_n = v_{-1}/h + v_0 + hv_1 + \ldots + h^n v_n + h^{n+1}v_{n+1}, \tag{13}$$

так что

$$a_{nn}\frac{\partial v_{-1}}{\partial t} + A\frac{\partial v_{-1}}{\partial\tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases}$$

$$a_{nn}\frac{\partial v_k}{\partial t} + A\frac{\partial v_k}{\partial\tau} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{in}\frac{\partial v_{k-1}}{\partial y_i} + \frac{a_n}{2}v_{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases} \tag{2''}$$

$$v_k|_{\tau=0} = -w_k|_F + \Phi_k, \quad k = -1, 0, 1, \ldots, \tag{3''}$$

где Φ_k — коэффициенты разложения функции $\Phi(s, th)$ по степеням h.

Подставляя выражение для $\tilde{v}_n$ из (13) в (1″), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h и учитывая (2″) и (3″), получим

$$M_0 v_{-1} = 0; \quad a_{nn}\frac{\partial v_{-1}}{\partial t} + A\frac{\partial v_{-1}}{\partial\tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases} \qquad v_{-1}|_{\tau=0} = -w_{-1}|_F = 0,$$

т. е. $v_{-1} = 0$;

$$a_{nn}\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + A\frac{\partial^2 v_0}{\partial t\,\partial\tau} + B\frac{\partial^2 v_0}{\partial\tau^2} = 0; \tag{14}$$

$$a_{nn}\frac{\partial v_0}{\partial t} + A\frac{\partial v_0}{\partial\tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases} \tag{15}$$

$$v_0|_{\tau=0} = -w_0|_F + \Phi_0 = \Psi_0. \tag{16}$$

Наконец,

$$M_0 v_k = -M_1 v_{k-1} - M_2 v_{k-2}; \tag{17}$$

$$a_{nn}\frac{\partial v_k}{\partial t} + A\frac{\partial v_k}{\partial\tau} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{in}\frac{\partial v_{k-1}}{\partial y_i} + \frac{a_n}{2}v_{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0; \end{cases} \tag{18}$$

$$v_k|_{\tau=0} = \Phi_k - w_k|_F = \Psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Граничные условия для определения функции $\overline{w}_k$ задаются так, что $\Psi_k(0) = 0$ и $\Psi_k(1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

Очевидно, если Ψ_0 — гладкая функция, то решение задачи (14), (15) и (16) v_0 тоже будет гладкой функцией, кроме точек $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Методами функционального анализа доказывается, что v_0 имеет первую производную из L_2 (0,1).

Лемма 1. *Пусть функция* Ψ_0 *такая, что* $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(1) = 0$. *Тогда задача* (14), (15), (16) *имеет единственное решение, которое представимо в виде* $v_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\gamma_k \tau} \omega_{-k}(t)$, *где* $\gamma > 0$; $\omega_{-k}(t)$ — *те собственные функции задачи* $a_{nn}\omega_k''(t) + A\lambda_k\omega_k'(t) + B\lambda_k^2\omega_k(t) = 0$, $a_{nn}\omega_k'(0) + A\lambda_k\omega_k(0) = 0$, $a_{nn}\omega_k'(1) + A\lambda_k\omega_k(1) = 0$, *которые отвечают неположительным значениям* λ_k.

Теперь найдем v_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Их определяем как решение уравнения $M_0 v_i = -M_1 v_{i-1} - M_2 v_{i-2}$ при условиях, что v_i есть функция типа пограничного слоя и удовлетворяет условиям (18) и (19). Предполагая, что v_j при $j < i$ есть функция типа пограничного слоя (это условие выполнено при $j = 0$), находим, что все функции v_i тоже функции типа пограничного слоя.

Умножим v_i на сглаживающие функции и полученные функции снова обозначим через v_i. Тогда для решения задачи (1), (2), (3) получим разложение

$$u = \sum_{i=-1}^{n+1} h^i w_i + \sum_{j=0}^{n+1} h^i v_j + z_n. \tag{20}$$

Очевидно, $\mathscr{L} z_n = h^{n+1} \mathscr{L} g = g_1$. Кроме того,

$$\frac{1}{h} a_{nn} \frac{\partial z_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \frac{\partial z_n}{\partial x_i} + \frac{a_n}{2} z_n = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 0 & \text{при } t = 0, \end{cases} \qquad z_n|_F = 0.$$

Лемма 2. *Если* $P(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\Phi(s, x_n)$ — *достаточно гладкие функции, то справедлива оценка*

$$\frac{1}{h^2} \left\| \frac{\partial z_n}{\partial t} \right\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial z_n}{\partial x_i} \right\|^2 + \| z_n \|^2 \leqslant c \| g_1 \|^2,$$

где c — *постоянная, не зависящая от* h *и норма понимается в смысле метрики пространства* L_2.

Таким образом, была доказана следующая

Теорема. *Пусть* $P(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *и* $\Phi(s, x_n)$ — *достаточно гладкие функции. Тогда задача* (1), (2), (3) *имеет единственное решение, осуществимы первый и второй итерационные процессы, для решения задачи имеет место асимптотическое разложение* (20) *и остаточный член стремится к нулю при* $h \to 0$ *как* h^{n+1} *в метрике* $L_2(Q)$.

Автор выражает благодарность Л. А. Люстернику и М. И. Вишику за постановку задачи и советы при ее решении.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР

Поступило
26 VI 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (77) (1957); УМН, 15, в. 3 (93) (1960); УМН, 15, в. 4 (1960). [2] А. Л. Гольденвейзер, Прикл. матем. и мех., 26, № 4 (1962). [3] K. O. Friedrichs, R. F. Dressler, Comm. Pure and Appl. Math., 14, 1 (1961). [4] М. Г. Джавадов, ДАН, 159, № 4 (1964).