Обобщение леммы Веррьера

М. И. Бидва, А. М. Филатов, А. А. Шевцов

Данная заметка посвящена решению задачи 25.5 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 25, с. 168). Ранее эта задача была предложена на февральских сборах кандидатам в сборную России на Международной математической олимпиаде. В процессе исследования этой задачи удалось обнаружить много интересных фактов, обобщающих классические утверждения из элементарной геометрии. О некоторых из этих обобщений и пойдёт речь в данной заметке.

Напомним условие исходной задачи.

Задача. В треугольнике ABC рассматриваются две изогонально сопряжённые точки P и Q. Проведём через точки P и Q прямые, перпендикулярные биссектрисе угла BAC и пересекающие прямые AB и AC в точках

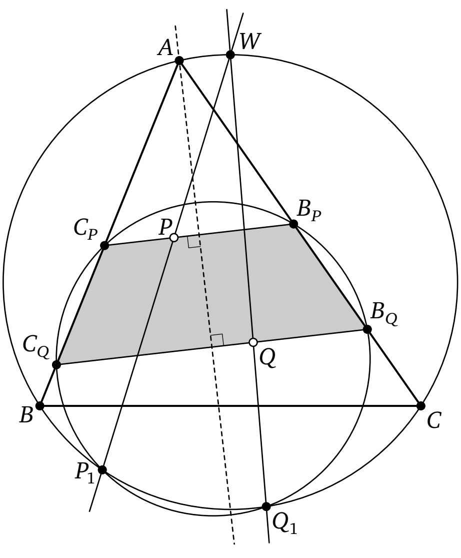

Рис. 1

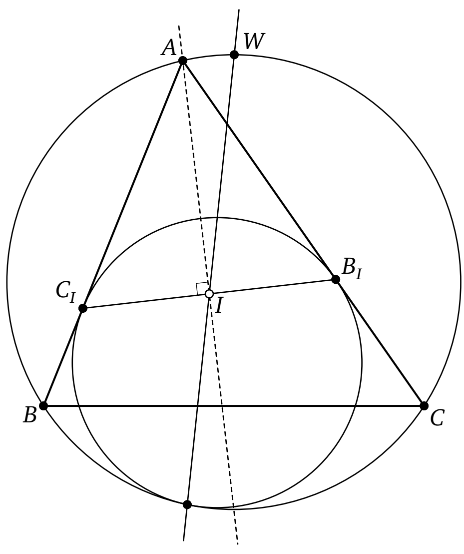

Рис. 2

C_P, B_P, C_Q, B_Q соответственно. Пусть также W — середина дуги BAC[1] описанной окружности треугольника ABC. Прямые WP и WQ вторично пересекают описанную окружность в точках P_1 и Q_1. Докажите, что точки P_1 и Q_1 лежат на описанной окружности ω трапеции $B_PB_QC_QC_P$ (рис. 1).

Перед тем, как переходить к решению этой задачи, заметим, что она является обобщением классической *леммы Веррьера* (см., например, [5]): для этого достаточно рассмотреть случай, когда точки P и Q склеиваются в центре I вписанной окружности треугольника ABC. В этом частном случае получается, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке, соединяющем точки касания полувписанной окружности со сторонами AB и AC (рис. 2). Таким образом, в задачах, где фигурирует точка I, можно попытаться «раздвинуть» её, заменив на пару изогонально сопряжённых точек P и Q. Именно с такими обобщениями связаны утверждения, которые приводятся в этой заметке. Перейдём к решению задачи.

Решение. Во-первых, заметим, что

$$\angle WAC = \angle AC_PB_P = \angle AB_PC_P = \angle WP_1B = \angle WP_1C,$$

откуда следует, что четырёхугольники BC_PPP_1 и CB_PPP_1 вписанные (рис. 3). Тогда

$$\angle B_PP_1C_P = \angle B_PP_1P + \angle C_PP_1P = \angle B_PCP + \angle C_PBP.$$

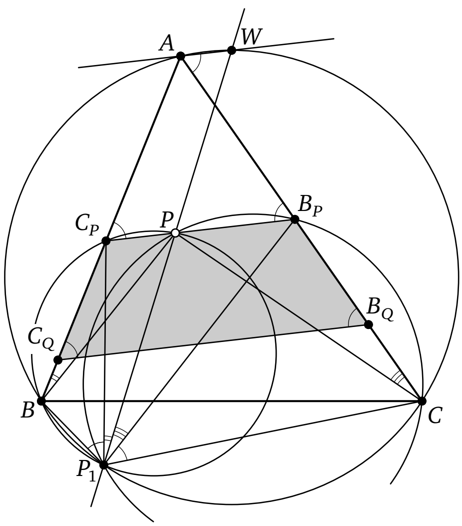

Рис. 3

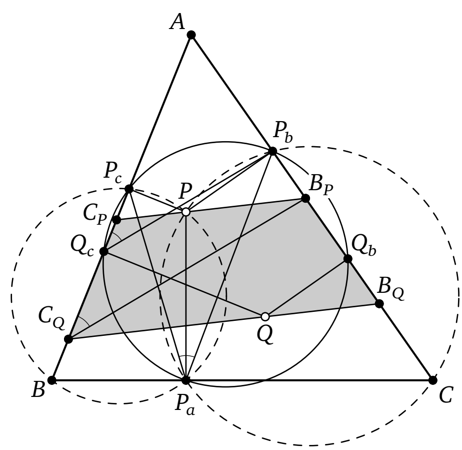

Рис. 4

[1] Редакция приносит извинения за опечатку при публикации задачи 25.5: вместо дуги BAC была указана дуга BCA.

Докажем, что $\angle B_P C_Q C_P = \angle B_P P_1 C_P$ (отсюда будет следовать утверждение задачи).

Рассмотрим проекции P_a, P_b, P_c и Q_b, Q_c изогонально сопряжённых точек P и Q на стороны треугольника ABC (рис. 4). Тогда, как известно, эти проекции лежат на одной окружности (см., например, [4]). Из подобия треугольников APP_b и AQQ_c и параллельности прямых $B_P C_P$ и $B_Q C_Q$ вытекают следующие соотношения:

$$\frac{AP_b}{AQ_c} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB_P}{AC_Q},$$

откуда получаем, что $AP_b/AB_P = AQ_c/AC_Q$. Значит, прямые $Q_c P_b$ и $C_Q B_P$ параллельны. Получаем следующую цепочку равенств:

$$\angle B_P C_Q C_P = \angle P_b Q_c P_c = \angle P_b P_a P_c.$$

А теперь заметим, что четырёхугольники $BP_c PP_a$ и $CP_b PP_a$ также вписанные, откуда получаем, что

$$\angle P_b P_a P_c = \angle P_b P_a P + \angle P_c P_a P = \angle P_b CP + \angle P_c BP = \angle B_P P_1 C_P.$$

Таким образом, точка P_1 лежит на описанной окружности трапеции $B_P B_Q C_Q C_P$. Доказательство для точки Q_1 аналогично. Задача решена.

Рассмотрим теперь вторые точки P_2 и Q_2 пересечения прямых WP и WQ с описанной окружностью трапеции $B_P B_Q C_Q C_P$. Справедливо следующее красивое утверждение.

Предложение 1. *Диагонали четырёхугольников $B_P B_Q C_Q C_P$ и $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ пересекаются в одной точке, лежащей на биссектрисе угла BAC.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что точки P и Q гомотетичны с центром в точке R пересечения диагоналей трапеции $B_P C_P C_Q B_Q$, так как $PC_P/PB_P = QB_Q/QC_Q$ (рис. 5). Ясно, что точка R лежит на биссектрисе угла BAC.

Теперь докажем, что прямые $P_1 Q_2$ и $P_2 Q_1$ проходят через точку R. Будем проводить рассуждения обратным ходом: рассмотрим точки X и Y пересечения прямых $P_1 R$ и $P_2 R$ с окружностью ω, отличные от P_1 и P_2, и докажем, что $X = Q_2$ и $Y = Q_1$. Обозначим через Z точку пересечения прямых $P_1 P_2$ и XY.

Заметим, что прямая AW является полярой точки R относительно окружности ω. Более того, точка Z лежит на этой прямой. Значит, точка Z лежит на пересечении прямых AW и $P_1 W$, т. е. совпадает с W (подробнее о свойствах поляр можно прочитать в [1]).

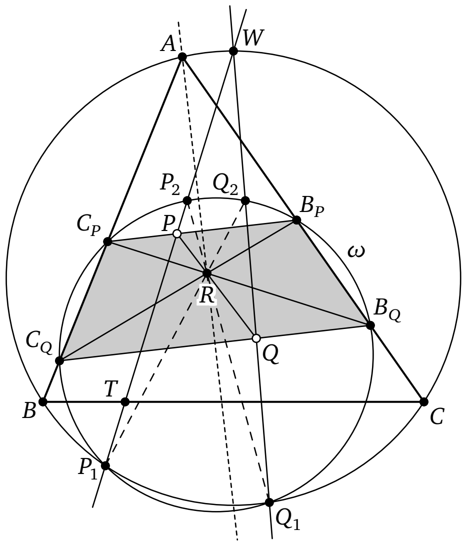

Рис. 5

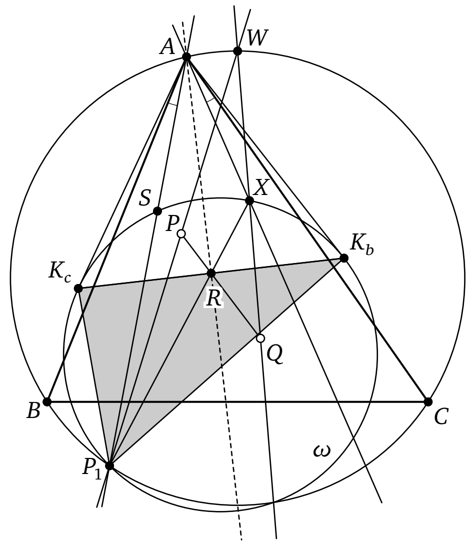

Рис. 6

Рассмотрим проекцию окружности ω на себя с центром в точке R. Эта проекция продолжается на всю плоскость до проективного преобразования. В результате такого преобразования точка P пересечения прямых B_PC_P и P_1P_2 перейдёт в точку пересечения прямых XY и B_QC_Q, причём точки P, R и точка пересечения прямых XY и B_QC_Q лежат на одной прямой. Тогда прямые XY и B_QC_Q пересекаются в точке Q. Значит, прямая XY совпадает с прямой Q_1Q_2 и $\{X, Y\} = \{Q_1, Q_2\}$ (рис. 5). Осталось доказать, что реализуется лишь случай $X = Q_2$ и $Y = Q_1$. Оказывается, строго сделать это не так легко. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пары прямых (AP_1, AX) и (AP_2, AY) изогональны относительно угла BAC.*

Доказательство этой леммы немедленно следует из свойств симедианы треугольника $P_1K_bK_c$, где K_b, K_c — точки пересечения ω с прямой, проходящей через R и параллельной B_PC_P (рис. 6; про симедиану и её свойства можно прочитать в [3]). Для этого вторично пересечём прямую AP_1 с описанной окружностью треугольника $P_1K_bK_c$ в точке S. Тогда, по свойству симедианы, точки X и S симметричны относительно AR, т. е. прямые AP_1 и AX изогональны относительно угла K_cAK_b. По симметрии относительно AR они изогональны и относительно угла BAC. □

Окончание доказательства предложения 1. Предположим, что $X = Q_1$ и $Y = Q_2$. Тогда по лемме 1 прямые AP_1 и AQ_1 являются изогоналями относительно угла BAC, а значит, прямые BC и P_1Q_1 параллельны (в силу симметрии относительно биссектрисы угла BAC). Но тогда

$$\angle WP_2Q_2 = \angle WQ_1P_1 = \angle WCP_1 = \angle WCB + \angle BCP_1 = \\ = \angle WBC + \angle BCP_1 = \angle WP_1C + \angle BCP_1 = \angle WTC,$$

где T — точка пересечения BC и P_1P_2. Отсюда следует, что BC параллельно P_2Q_2, а потому P_1Q_1 параллельно P_2Q_2, что неверно, так как обе прямые по предположению проходят через R. □

Замечание 1. Попутно мы получили, что прямые P_2Q_2 и BC параллельны.

Замечание 2. Точки P_1 и Q_1 можно определить как точки пересечения описанных окружностей треугольника ABC и трапеции $B_PB_QC_QC_P$. Однако в таком определении эти точки равноправны, поэтому неясно, какая из точек P_1 и Q_1 лежит на прямой WP, а какая — на WQ. Ответ на этот вопрос даёт доказанное в ходе решения исходной задачи свойство точек P_1 и Q_1, позволяющее различить их (рис. 3) через точку P_1 проходят описанные окружности треугольников PBC_P и PCB_P, а через точку Q_1 — описанные окружности треугольников QBC_Q и QCB_Q.

Теперь сформулируем следующее важное утверждение.

Предложение 2. *Точки A, W, P_2 и Q_2 лежат на одной окружности* Γ.

Доказательство легко получается из предыдущих результатов:

$$\angle P_2AQ_2 = \angle P_1AQ_1 = \angle P_1WQ_1 = \angle P_2WQ_2,$$

откуда и следует вписанность четырёхугольника AWQ_2P_2. □

Чем это утверждение так важно для нас? Чтобы это понять, отметим точки S_b и S_c пересечения окружности Γ с прямыми соответственно AC и AB, отличные от A (рис. 7). Оказывается, верна следующая

Теорема. 1. *Имеют место равенства $BC_Q = B_PS_b$ и $CB_Q = C_PS_c$* (рис. 7).

2. *В четырёхугольник BS_cS_bC можно вписать эллипс с фокусами в точках P и Q.*

Эта теорема обобщает следующую известную конструкцию. Рассмотрим треугольник ABC, в который вписана окружность с центром в точке I. Проведём через I прямую, перпендикулярную биссектрисе AI. Пусть эта прямая пересекает стороны AB и AC в точках C_I и B_I соответственно. Отложим на лучах $[C_IA)$ и $[B_IA)$ отрезки $C_IS_c = CB_I$ и $B_IS_b = BC_I$. Тогда отрезок S_bS_c касается вписанной окружности треугольника ABC (рис. 8).

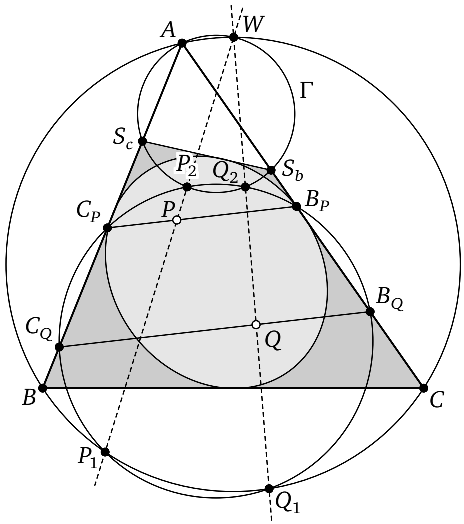

Рис. 7

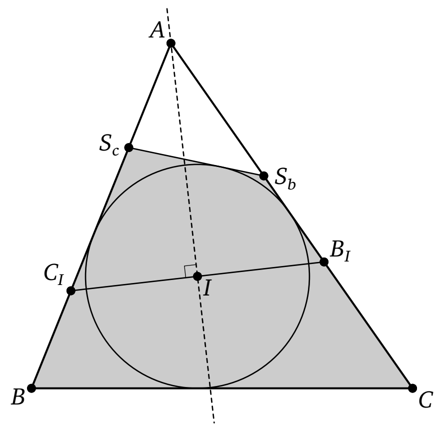

Рис. 8

Мы получаем дальнейшее обобщение этой конструкции, заменяя точку I на пару изогонально сопряжённых точек P и Q. В этом случае вместо касания с вписанной окружностью возникает касание с эллипсом, вписанным в треугольник ABC (рис. 7).

Доказательство теоремы мы разобьём на несколько лемм, каждая из которых интересна и сама по себе.

Лемма 2. *Четырёхугольник $C_PPP_2S_c$ — вписанный.*

Доказательство. В самом деле, имеет место следующая цепочка равенств углов:

$$\angle C_PS_cP_2 = 180^\circ - \angle AS_cP_2 = \angle AWP_2 = \angle AWP_1 = \angle C_PPP_1,$$

поскольку C_PP и AW перпендикулярны биссектрисе угла A и, следовательно, параллельны. Отсюда следует требуемое. □

Из вписанности четырёхугольников AWP_2S_c и AWP_1B получаем, что прямые S_cP_2 и BP_1 параллельны. Из вписанности четырёхугольников $P_1P_2C_PC_Q$ и $C_PPP_2S_c$ следует, что параллельны P_1C_Q и PS_c. Аналогичные утверждения можно получить, поменяв ролями P и Q.

Лемма 3. *Рассмотрим произвольную равнобокую трапецию $B_PB_QC_QC_P$. Пусть R — точка пересечения её диагоналей, а точки P и Q' выбраны на её основаниях так, что отрезок PQ' проходит через точку R. Также отметим на описанной окружности трапеции точки P_2 и Q_1 так, чтобы*

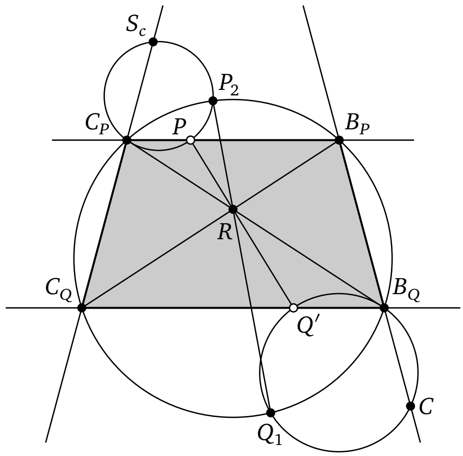

Рис. 9

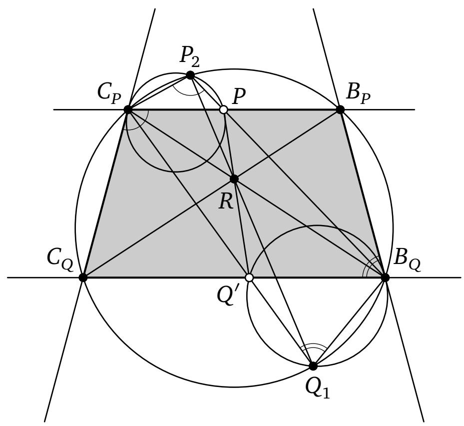

Рис. 10

отрезок P_2Q_1 проходил через R. Обозначим через S_c и C вторые точки пересечения описанных окружностей треугольников C_PPP_2 и $B_QQ'Q_1$ с прямыми C_PC_Q и B_PB_Q соответственно. Тогда $C_PS_c = CB_Q$ (рис. 9).

Доказательство. Будем равномерно двигать точку P по прямой B_PC_P. Тогда точка Q' будет равномерно двигаться по прямой B_QC_Q, а точки S_c и C будут равномерно двигаться по прямым C_PC_Q и B_PB_Q соответственно. Значит, для доказательства равенства отрезков C_PS_c и CB_Q достаточно найти два положения точки P, при которых оно выполнено. Выберем в качестве первого положения точку $P = B_P$, тогда $C = B_P$ и $S_c = C_Q$, поэтому $C_PS_c = C_PC_Q = B_PB_Q = CB_Q$.

В качестве второго положения выберем точку P, совпадающую с пересечением прямых B_PC_P и B_QP_2. Заметим, что тогда из теоремы Паскаля для шестивершинника $C_PB_PC_QB_QP_2Q_1$ следует, что точка Q' лежит на прямой C_PQ_1 (рис. 10). Далее, заметим, что описанные окружности треугольников C_PPP_2 и $B_QQ'Q_1$ касаются прямых C_PC_Q и B_PB_Q соответственно, так что $S_b = C_P$ и $C = B_Q$. В самом деле, $\angle C_QC_PP = \angle C_PP_2B_Q$ как углы, опирающиеся на равные хорды $B_PC_Q = C_PB_Q$. Аналогично равны углы $C_PQ_1B_Q$ и $B_PB_QC_Q$. Таким образом, здесь точка S_b совпадает с C_P, а точка C — с B_Q, поэтому длины отрезков C_PS_c и CB_Q действительно одинаковы и равны 0. □

Из леммы 3 легко следует первый пункт теоремы. В самом деле, достаточно применить эту лемму к точкам P и Q, лежащим на основаниях трапеции $B_PB_QC_QC_P$.

Теперь докажем п. 2. Чтобы установить существование эллипса с фокусами P и Q, вписанного в четырёхугольник BS_cS_bC, достаточно дока-

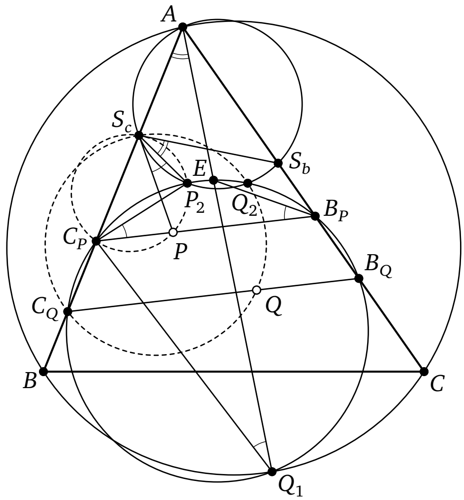

Рис. 11

зать изогональную сопряжённость точек P и Q относительно этого четырёхугольника: в таком случае искомым будет эллипс с фокусами P и Q и суммой расстояний, равной диаметру педальной окружности точек P и Q (см., например, [2]). Так как точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC, достаточно доказать их изогональную сопряжённость относительно треугольника AS_cS_b.

Лемма 4. *Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника AS_cS_b.*

Доказательство. Докажем, что $\angle S_bS_cP = \angle C_QS_cQ$ (для второй пары углов рассуждения аналогичны). Обозначим через E точку пересечения прямой AQ_1 с окружностью ω. Выпишем цепочку равенств углов (рис. 11):

$$\angle S_bS_cP = \angle S_bS_cP_2 + \angle P_2S_cP = \angle S_bAP_2 + \angle P_2C_PP = \angle C_PAQ_1 + \angle EB_PC_P =$$
$$= \angle C_PAQ_1 + \angle AQ_1C_P = \angle C_QC_PQ_1 = \angle C_QQ_2Q_1 = \angle C_QQ_2Q = \angle C_QS_cQ,$$

что и требовалось доказать. □

Наша теорема, наконец, доказана. □

В качестве упражнений попробуйте доказать другие замечательные свойства данной конфигурации.

Упражнение 1. Пары прямых (BQ, P_1B_Q), (BP, Q_1B_P), (CQ, P_1C_Q), (CP, Q_1C_P) пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Упражнение 2. Четырёхугольники $S_bQ_2P_2S_c$ и BP_1Q_1C подобны.

Упражнение 3. а) Точки пересечения пар прямых (AB, WQ), (AC, WP), (BP_1, CQ_1), (S_cP_2, S_bQ_2) и точка R лежат на одной прямой.

б) Точки пересечения пар прямых (AB, WP), (AC, WQ), (S_cQ_2, S_bP_2), (BQ_1, CP_1) и точка R лежат на одной прямой.

Благодарности

Авторы благодарят П. В. Бибикова за постановку задачи и помощь в подготовке статьи, а также П. А. Кожевникова, который сформулировал основную теорему и предложил авторам её доказать.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Разные взгляды на изогональное сопряжение // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. 2007. С. 61–78.

[3] *Блинков Ю. А.* Симедиана // Квант. 2015. № 4. С. 35–39.

[4] *Куланин Е. Д.* Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9, 2005. С. 164–182.

[5] *Протасов В. Ю.* Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха // Квант. 2008. № 4. С. 10–15.

Максим Игоревич Бидва, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
`bidva.maxim@yandex.ru`

Андрей Максимович Филатов, ученик школы № 444 (г. Москва)
`filatov.andrey.m@gmail.com`

Андрей Алексеевич Шевцов, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
`andreyshevtsov2003@gmail.com`