Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. A. Makhnev, 3-characterizations of finite groups,
Algebra Logika, 1985, Volume 24, Number 2, 173–180

https://www.mathnet.ru/eng/al1898

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.85
December 6, 2025, 18:09:15

Алгебра и логика, 24, № 2 (1985), 173-180

УДК 512.542

3-ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. А. МАХНЁВ

Нечетные характеризации конечных групп являются важным направлением в теории конечных групп. Так, одним из заключительных этапов отождествления простой группы типа характеристики 2 в имеющейся программе классификации является характеризация по стандартной компоненте для нечетного простого p.

Спорадические группы $O'N$ и Suz содержат такую элементарную подгруппу E порядка 9, что $C(e)=E\times K$, $K\simeq A_6$ для любого $e\in E^{\#}$. С. А. Сыскин охарактеризовал указанные группы этим свойством [7]. Мы рассмотрим более общую ситуацию.

ТЕОРЕМА 1. Пусть конечная простая группа G содержит такую элементарную подгруппу E порядка 9, что $C(E)$ – группа четного порядка и для любой инволюции t из $C(E)$ $E\in Syl_3(C(t))$ и $C(t)$ содержит подгруппу индекса, не большего 2, в которой централизаторы элементов порядка 3 3-разложимы. Тогда $G\simeq L_3(9)$, $U_3(9)$, $L_4(3)$, A_{10}, HiS, He, Suz, $O'N$.

Для восстановления структуры централизаторов инволюций из $C(E)$ необходим следующий результат, обобщающий теорему В. Р. Майера [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – конечная группа с нециклической силовской 3-подгруппой, $O_{3'}(G)=1$ и централизатор любого элемента порядка 3 имеет нильпотентную холлову $\{2, 3\}$-подгруппу. Тогда либо G – разрешимая группа без элементов порядка 6 2-ранга, не большего 1, либо $F^*(G)\simeq$ $\simeq L_2(3^n)$, $L_3(4)$.

© Институт математики СО АН СССР, 1985

В доказательстве теорем используется описание простых групп со стандартной подгруппой типа $L_3(4)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть L – стандартная подгруппа конечной простой группы G и $L/Z(L) \simeq L_3(4)$. Тогда $G \simeq He, Suz$ или $O'N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. следствие [5].

Докажем теорему 2. Пусть G – контрпример наименьшего порядка к теореме 2.

ЛЕММА 1. Если некоторая инволюция t из G централизует элемент порядка 3, то t централизует S_3-подгруппу из G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b – элемент порядка 3 из $C(t)$. По условию теоремы t централизует некоторую S_3-подгруппу из $C(b)$. Теперь t централизует элемент z порядка 3 из центра S_3-подгруппы группы G. Снова по условию теоремы t централизует S_3-подгруппу из $C(z)$.

ЛЕММА 2. Если нециклическая 3-подгруппа B нормализует 2-подгруппу Q, то $[Q, B]=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – элементарная подгруппа порядка 9 из B, содержащая элемент z из $Z(B)^{\#}$. Тогда $Q=\langle C_Q(u) \mid u \in U^{\#}\rangle$, причем по условию теоремы $[C_Q(u), U]=1$. Отсюда $[Q, U]=1$. Теперь $C_{QB}(z)$ – нильпотентная группа и $[Q, B]=1$.

ЛЕММА 3. G – простая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $O_3(G) \neq 1$. Если $O_3(G)=F^*(G)$, то в силу леммы 1 G – группа без элементов порядка 6. Отсюда 2-ранг G не больше 1 и $G=O(G)C(z)$ для инволюции z из G. Если G – неразрешимая группа, то $C(z)/\langle z\rangle$ – неразрешимая группа с диэдральной S_2-подгруппой. Но из соображений слияния инволюций следует, что $3'$-группа с диэдральной S_2-подгруппой $2'$-замкнута. Противоречие с выбором G. Итак, G содержит некоторую компоненту L. Если L централизует элемент порядка 3, то S_3-подгруппа из L централизует S_2-подгруппу S из L. Но в этом случае S содержит неединичную абелеву сильно замкнутую подгруппу и ввиду [15] $L \simeq Sz(q)$. Противоречие с тем, что $O_{3'}(G)=1$. Значит, $L=F^*(G)$.

Пусть $G \neq L$, $P \in Syl_3(G)$. Если $P \cap L$ – нециклическая группа, то по индукции $L \simeq L_2(3^n)$ или $L_3(4)$. Противоречие с выбором G. Значит, $P_0=P \cap L$ – циклическая группа и некоторый 2-элемент

из L инвертирует P_0. Пусть S_0 - S_2 -подгруппа из $N_L(P_0)$. По рассуждению Фраттини $G=L\cdot N(P_0)$ и $N(P_0)=N_L(P_0)(N(P_0)\cap \cap N(S_0))$, поэтому $G=L(N(P_0)\cap N(S_0))$. Без ограничения общности некоторый элемент e из $P-P_0$ нормализует S_0. Но e централизует $S_0\cap C(P_0)$ и $|S_0:S_0\cap C(P_0)|=2$, поэтому $[S_0,e]= =1$. Теперь по условию теоремы $[S_0,P_0]=1$. Противоречие. Лемма доказана.

Если секционный 2-ранг G не больше 4, то из строения централизаторов инволюций в группах из заключения основной теоремы [16] следует, что $G\simeq L_2(3^n)$ или $L_3(4)$. Значит, секционный 2-ранг G больше 4, S_2 - подгруппа из G содержит нормальную элементарную подгруппу порядка 8. Пусть $P\in Syl_3(G)$, $R\in Syl_2(C(P))$. По [6]. $R\neq 1$.

ЛЕММА 4. Для некоторой инволюции z из $Z(R)$ $F^*(C(z)/O_{3'}(C(z)))\simeq L_2(3^n)$ или $L_3(4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $C(t)/O_{3'}(C(t))$ - разрешимая группа для любой инволюции t из R. Тогда возможные 2-компоненты из централизаторов инволюций являются расширениями групп Сузуки и по теореме А [17] $O(C(b))=1$ для любой инволюции b из G. С другой стороны, по лемме 2 $P\leq O(C(t))$ для $t\in R^{\#}$.

Итак, для некоторой инволюции t из R $C(t)$ - неразрешимая группа. По индукции $F^*(C(t)/O_{3'}(C(t)))\simeq L_2(3^n)$ или $L_3(4)$. По структуре $Aut\,L_2(3^n)$ и $Aut\,L_3(4)$ подгруппа X индекса не большего 2 из $C_R(t)$ лежит в $O_{3'}(C(t))$. Теперь для инволюции z из $X\cap Z(R)$ будем иметь изоморфизм $F^*(C(z)/O_{3'}(C(z)))\simeq \simeq L_2(3^n)$ или $L_3(4)$. Лемма доказана.

Пусть J - 2-компонента из $C(z)$, содержащая P, $S\in Syl_2(C(z))$, $R_0=C_R(J/O(J))$ и L - 2-компонента из $C(R_0)$, содержащая P.

ЛЕММА 5. $L/O_{3'}(L)\simeq L_3(4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $L/O_{3'}(L)\simeq L_2(3^n)$. Тогда $R_0=R$. Пусть t - инволюция из R, K - 2-компонента из $\langle C_L(t)^{C(t)}\rangle$. Если $K/O_{3'}(K)\not\simeq L/O_{3'}(L)$, то $K/O_{3'}(K)\simeq L_3(4)$.

Но $Aut\, L_3(4)$ не содержит инволютивных автоморфизмов, централизующих $L_2(9)$. Значит, $K/O_{3'}(K) \simeq L/O_{3'}(L)$. Если $L/O(L) \simeq SL_2(3^n)$, то по [11] G – группа Шевалле нечетной характеристики или M_{11}. Но тогда в G не выполнены условия теоремы 2.

Итак, $L/O(L) \simeq L_2(3^n)$. Пусть H – подгруппа из G, a, b – перестановочные инволюции из H и X – 2-компонента из $C_H(b)$. Если X – не типа $L_2(3^n)$, то $X/O(X)$ – накрывающая группа для $Sz(q)$ или $L_3(4)$. Но в последнем случае $[(O(C_H(a)) \cap C_H(b))', X] \leq$ $\leq O(C_H(b))$. Таким образом, выполнены условия теоремы из [13] и по [13] 2-ранг R равен 1. Из [11] следует, что R – циклическая группа. Из условий теоремы следует, что в $C(z)$ нет 2-элементов, индуцирующих инволютивный полевой автоморфизм на $L_2(3^n)$. Далее, S_2 – подгруппа из $C(z)$ содержит нормальную элементарную подгруппу порядка 8, поэтому $3^n \not\equiv \pm 1\ (16)$. Если n четно, то S_2 –подгруппа из L – диэдральная подгруппа порядка 8 и из [19] получим противоречие с условиями теоремы. Значит, n нечетно. Теперь либо $z \in Z^*(G)$, либо $R = \langle z \rangle$.

Мы показали, что $O^{2'}(C(z)/O(C(z))) \simeq L_2(3^n)$, n нечетно. Теперь из [2, 12] следует, что $G \simeq {}^2G_2(3^n)$. Но тогда в G не выполнены условия нашей теоремы.

ЛЕММА 6. $O_{3'}(O(C(a))) = 1$ для любой инволюции a из G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для инволюции a из G положим $\theta(C(a)) = O_{3'}(O(C(a)))$. Покажем, что для любых перестановочных инволюций a, b из G выполняется условие сбалансированности $\theta(C(a)) \cap C(b) \leq$ $\leq \theta(C(b))$. Пусть $X = C(b)$ и $O(C(a)) \cap X \not\leq O(X)$. Напомним, что по лемме 5 возможные 2-компоненты из централизаторов инволюций являются расширениями групп $Sz(q)$ и $L_3(4)$. По теореме 3.12 [18] $O(C(a)) \cap X \leq O(X)K$, где K – 2-компонента из X и $K/O_{3'}(K) \simeq L_3(4)$. Но тогда a индуцирует унитарный автоморфизм на $L_3(4)$ и $\theta(C(a)) \cap C(b) \leq O(C(b))$. Но из лемм 1, 5 следует, что порядок S_3 – подгруппы из G равен 9 и $\theta(C(a)) \cap O(C(b)) \leq$ $\leq \theta(C(b))$.

Пусть $\theta(C(a)) \neq 1$ для некоторой инволюции a из G. Несложной модификацией рассуждений из § 4 [17] можно показать, что G содержит истинное 2-порожденное ядро. Из [8] получим противоречие с выбором G. Лемма доказана.

По лемме 6 J – квазипростая группа, а по лемме 5 $\langle J^{C(t)} \rangle$ – накрывающая группа для $L_3(4)$ для любой инволюции t из $C_R(J)$. Отсюда J – стандартная подгруппа и по предложению $G \simeq He, Suz$ или $O'N$. Но эти группы не удовлетворяют условиям теоремы. Теорема 2 доказана.

Пусть до конца работы G – контрпример к теореме 1, t – инволюция из $C(E)$. По теореме 2 либо $C(t)/O_{3'}(C(t))$ – разрешимая группа, либо $F^*(C(t)/O_{3'}(C(t))) \simeq L_2(9), L_3(4)$.

ЛЕММА 7. $C(t)/O_{3'}(C(t))$ – разрешимая группа для любой инволюции t из $C(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Пусть L – 2-компонента из $C(t)$, содержащая E. По условию теоремы E централизует $O(C(t))$, поэтому L – квазипростая группа. Как и выше, $L \triangleleft C(a)$ для любой инволюции a из $C(L)$. Если $[L, L^g] = 1$ для некоторого $g \in G$, то по теореме 2 $L^g = O^3(C(L))$. Теперь выполнены условия теоремы 5 [9] и по этой теореме $F^*(G) = L \times L^g$. Противоречие с простотой G. Итак, подгруппа L стандартна.

Если $L \simeq SL_2(9)$, то ввиду [11] $G \simeq L_3(9), U_3(9)$. Если $L \simeq L_2(9)$, то из [19] следует, что $G \simeq A_{10}, L_4(3)$ или HiS. Наконец, в случае $L/Z(L) \simeq L_3(4)$ по предложению $G \simeq He$, Suz или $O'N$. Лемма доказана.

Пусть $Q = O^{2'}(C(E))$, $R \in Syl_2(Q)$.

ЛЕММА 8. Подгруппа Q плотно вложена в G и R – циклическая или элементарная группа.

Пусть t – инволюция из $Q \cap Q^g$. Из леммы 7 и условий теоремы заключаем, что $E = O_3(C(t))$. Отсюда $g \in N(E)$ и $Q = Q^g$. Значит, подгруппа Q плотно вложена в G.

Допустим, что ранг R больше 1 и R – не элементарная группа. По теореме 1 [10] $1 \neq N_R(Q^g) \neq R$ для некоторого $g \in G$. По теореме 1 [4] R – абелева группа периода 4 или R – прямое произведение

Q_8 и элементарной группы, причем в последнем случае R не содержит абелевых подгрупп индекса 2, нормальных в $N(R)$, и E – не силовская 3-подгруппа из $C(R')$. Значит, R – абелева группа и $N_R(Q^g) = \Omega(R)$. По структуре $Aut E$ $N_R(Q^g)$ – подгруппа из полудиэдральной группы порядка 16 и $R \simeq Z_4 \times Z_2$ или $Z_4 \times Z_4$. Теперь для некоторой инволюции t из $Q^g \cap N(Q)$ $C_E(t)$ – неединичная подгруппа из E^g и $1=[C_E(t), Q^g]$. Но теперь подгруппа индекса, не большего 2, из $N_R(Q^g)$ централизует E^g. Противоречие.

Если R – группа кватернионов, то по [11] G – группа Шевалле нечетной характеристики, M_{11} или M_{12}. Но тогда G не содержит требуемой подгруппы E.

ЛЕММА 9. R – <u>циклическая группа.</u>

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – элементарная нециклическая группа. Если $|N_R(Q^g)| > 2$ для некоторого $g \in G - N(Q)$, то $E^g = \langle E^g \cap C(x) \mid x \in N_R(Q^g)^\# \rangle = E$. Противоречие. Значит, $|N_R(Q^g)| \leq 2$ для любого $g \in G - N(Q)$, R слабо замкнута в $C(R)$ и $N(R)$ – подгруппа нечетного индекса в G. Ввиду [15] R не сильно замкнута в $N(R)$. Пусть $t \in R^\#$, $g \in G$ и $t^g \in N(R) - R$. Тогда $C_R(t^g) \leq N(Q^g)$ и R – четверная группа. По теореме 3 [10] $G \simeq A_6, A_7, L_3(2)$ или $U_3(4)$. Снова G не содержит требуемой подгруппы E. Лемма доказана.

Пусть z – инволюция из R. Ввиду строения централизаторов инволюций в группах из заключения основной теоремы [16] заключаем, что секционный 2-ранг G больше 4 и S_2-подгруппа S из $C(z)$ содержит нормальную элементарную подгруппу порядка 8. Отсюда S_2 – подгруппа из $N(E)/C(E)$ изоморфна E_4 или D_8. Если $R = \langle z \rangle$, то по [1] секционный 2-ранг G не больше 4. Значит, $|R| \geq 4$. Если группа R слабо замкнута в $C(R)$, то по [14] S_2 подгруппа из G – диэдральная или полудиэдральная группа, в частности, секционный 2-ранг G меньше 4. Итак, R не слабо замкнута в $C(R)$, $|R| = 4$ и S_2 – подгруппа из $N(E)/C(E)$ изоморфна D_8. Пусть T – силовская 2-под-

группа из G, содержащая S. Тогда $|T:S|=2$ и секционный 2-ранг G не больше 4. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Литература

1. В. В. КАБАНОВ, А. И. СТАРОСТИН, Конечные группы, в которых силовская 2-подгруппа централизатора некоторой инволюции порядка 16, Матем. заметки, 18, № 6 (1975). 869-876.

2. В. Д. МАЗУРОВ, О централизаторах инволюций в простых группах, Матем. сб., 93, № 4 (1974), 529-539.

3. В. Р. МАЙЕР, О конечных группах с нильпотентными централизаторами элементов порядка 3, Матем. сборник, 114, № 4 (1981), 643-651.

4. А. А. МАХНЁВ, О плотно вложенных подгруппах конечных групп, Матем. сборник, 121, № 4 (1983), 523-532.

5. А. А. МАХНЁВ, Конечные простые группы со стандартной подгруппой типа $L_3(4)$, Матем. заметки, 37, № 1 (1985), 7-12.

6. Н. Д. ПОДУФАЛОВ, Конечные простые группы без элементов порядка 6, Алгебра и логика, 16, № 2 (1977), 200-203.

7. С. А. СЫСКИН, 3-характеризация группы О'Нэна-Симса, Матем. сборник, 11, № 3 (1981), 471-478.

8. M.ASCHBACHER, Finite groups with a proper 2-generated core, Trans. Amer.Math.Soc.,197 (1974), 87-112.

9. M.ASCHBACHER, On finite groups of component type, Ill.J.Math., 19, N 1 (1975), 87-115.

10. M.ASCHBACHER, Tightly embedded subgroups of finite groups, J. Algebra, 42 , N 1 (1976), 85-101.

11. M.ASCHBACHER, A characterisation of Chevalley groups over fields of odd order, Ann.Math.,106, N 2-3 (1977), 353-468.

12. E.BOMBIERI, Thompson's problem ($\sigma^2 = 3$), Invent. Math.,58, N 1 (1980), 77-100.

13. R.FOOTE, Finite groups with maximal 2-component of type $L_2(q)$, q odd, Proc.London Math.Soc.,,37, N 3 (1978), 422-458.

14. H.FUKUSHIMA, Weakly closed cyclic 2-subgroups in finite groups, J.Math.Soc.,Japan., 30, N 1 (1978), 133-138.

15. D.GOLDSCHMIDT, 2-fusion in finite groups, Ann.Math.,99, N 1 (1974), 70-117.

16. D.GORENSTEIN, K.HARADA, Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements, Mem. Amer.Math.Soc.,147 (1974), 1-464.

17. D.GORENSTEIN, J.WALTER, Centralizers of involutions in balanced groups, J.Algebra, 20, N 2 (1972), 284-319.

18. D.GORENSTEIN, J.WALTER, Balance and generation in finite groups, J.Algebra, 33, N 2 (1975) ,224-287.

19. M.HARRIS, Finite groups having an involution centralizer with a 2-component of dihedral type, Ill.J.Math.,21, N 3 (1977), 621-647.

Поступило 26 июня 1984 г.