Ю. Л. Ершов, Непрерывные решетки и A-пространства, *Докл. АН СССР*, 1972, том 207, номер 3, 523–526

Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 517.11:518.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю. Л. ЕРШОВ

НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕТКИ И A-ПРОСТРАНСТВА

1. Настоящая статья содержит расширение ряда результатов работы ([2]) и сравнение введенных в ([2]) понятий с понятием непрерывной решетки, которое определил Д. Скотт ([3]). Здесь указаны также возможности расширения конструкции Д. Скотта для построения модели λ-исчисления, которые вместе с результатами работ ([1], [2]) позволяют строить эффективные модели для λ-исчисления, а именно, можно построить такой (бесконечный) класс S рекурсивно перечислимых множеств, который обладает главной вычислимой нумерацией ν: $N \to S$ и такой, что существует ([1]) $\mathfrak{Mor}\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S} = (S, \nu)$, нумерованные множества $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Mor}\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ (рекурсивно) изоморфны и «отождествление» $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Mor}\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ образует модель для λ-исчисления.

Предполагается знакомство с работами ([2], [3]).

Основное понятие появилось как попытка синтеза понятий f-пространства ([2]) и инъективного пространства (непрерывной решетки) ([3]), между которыми нет включений. Буква A в названии этого понятия возникла как сокращение от более развернутого словосочетания «топологическое пространство с (хорошей) аппроксимацией». Следует здесь заметить, что в понятии f-пространства ([2]) f-элементы «играют роль» конечных (finite) множеств.

2. Определим основное понятие этой статьи — понятие A-пространства. Топологическое T_0-пространство X назовем A-*пространством*, если существует такое подмножество $X_0 \subseteq X$, что выполнены следующие три условия:

1) Если $\leqslant$ обозначает частичный порядок на X, определенный топологией ($x \leqslant y \Leftrightarrow$ для любого открытого подмножества $U \subseteq X$, если $x \in U$, то и $y \in U$), то $\langle X_0, \leqslant\rangle$ — подпарус ([2]) $\langle X, \leqslant\rangle$, т. е. для любых $x, y \in X_0$, если существует $z \in X$ такой, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$ (в этом случае будем говорить, что x и y *совместны* в X), то существует $z_0 \in X_0$ такой, что для любого $z \in X$

$$x \leqslant z \,\&\, y \leqslant z \Leftrightarrow z_0 \leqslant z.$$

Другими словами, z_0 — наименьшая верхняя грань элементов x и y в X; будем обозначать ее $z_0 = x \cup y$. Операция $\cup$ — частичная операция на X_0.

2) Для любого $x \in X$ через $\check{x}$ обозначим множество $\{y \mid y \in X,\ x \leqslant y\}$, а через $\overset{\curlyvee}{x}$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в $\check{x}$ (т. е. $\overset{\curlyvee}{x} = \operatorname{Int} \check{x}$). Отношение $y \in \overset{\curlyvee}{x}$ будем писать иначе так: $x \prec y$ (это согласовано с обозначениями Д. Скотта ([3])) и говорить, что x *сильно меньше* y. Тогда семейство множеств вида $\overset{\curlyvee}{x}_0$, $x_0 \in X_0$, образует базис (быть может, без пустого множества) топологии пространства X.

Замечание 1. Если $x, y \in X_0$ и x, y совместны, то имеет место очевидное равенство $\overset{\curlyvee}{x} \cap \overset{\curlyvee}{y} = (x \cup y)^{\curlyvee}$ (так же, как и $\check{x} \cap \check{y} = (x \cup y)^{\vee}$).

Замечание 2. Вполне может быть, что существуют элементы $x \in X$, которые сильно меньше самого себя. Например, любой f-элемент f-пространства ([2]) будет таким.

Замечание 3. Из условий 1), 2) вытекает, что для любого $x \in X$ $x = \sup \{x_0 \mid x_0 \in X_0,\ x_0 \prec x\}$.

3) Для любых $x_0 \in X_0$, $x \in X$, если $x_0 \prec x$, то существует $x_1 \in X_0$ такой, что $x_0 \prec x_1$ и $x_1 \prec x$.

Замечание. Из условий 1)—3) вытекает, что для любого $x \in X$ x является предельной (в смысле топологии) точкой множества $\{x_0 | x_0 \in X_0, x_0 \prec x\}$.

A-пространство X назовем A_0-пространством, если X (а следовательно, и X_0) имеет наименьший элемент.

Всякое подмножество X_0 A-пространства X, удовлетворяющее условиям определения, вместе с индуцированной топологией, назовем базисным подпространством (A-пространства X).

Следствие 1. *Если $X - f$ (f_0)-пространство* (2), *X_0 — подпространство всех f-элементов X (базисное подпространство в терминологии* (2)), *то $X - A$ (A_0)-пространство с базисным подпространством X_0.*

Следствие 2. *Топологическое T_1-пространство X будет A-пространством, если и только если X — дискретное пространство.*

Замечание. Базисное подпространство A-пространства определяется, вообще говоря, не однозначно. Например, для полного f-пространства X базисными подпространствами являются подпространство X_0 всех f-элементов и само пространство X.

Для f-пространства X базисное подпространство всех f-элементов будем называть главным базисным подпространством.

Сформулируем теперь основные (категорные) свойства A (A_0)-пространств.

Теорема 1. *Если X_i, $i \in I$,— конечное семейство A_0 (A)-пространств, то $\prod\limits_{i \in I} X_i - A_0$ (A)-пространство, где произведение $\prod$ берется в категории топологических пространств.*

Теорема 2. *Если X — произвольное A_0-пространство, $Y - A_0$-пространство, то множество $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y, снабженное топологией поточечной сходимости, является A_0-пространством.*

Не оговаривая, дальше будем всегда предполагать, что пространство непрерывных функций снабжено топологией поточечной сходимости.

Теорема 3. *Если X, Y — A-пространства, $Z - A_0$-пространство, то топологические пространства $C(X \times Y, Z)$ и $C(X, C(Y, Z))$ естественно гомеоморфны.*

Предложение 1. *Если X — A-пространство, а Y, Z — произвольные топологические пространства, то отображение f: $X \times Y \to Z$ будет непрерывным тогда и только тогда, когда оно непрерывно по каждому аргументу.*

3. A-пространство X (с базисным подпространством X_0) назовем полным A-пространством, если для любого не пустого направленного семейства $S \subseteq X$ такого, что если $x \in S$, то существует $x' \in S$ такой, что $x \prec x'$, в X существует предельная точка x для S, которая является верхней гранью для S.

Замечание 1. В условиях определения, $x = \sup S$.

Замечание 2. Свойство полноты пространства X не зависит от выбора базисного подпространства X_0.

Замечание 3. Если X — полное A-пространство, то $\langle X, \leqslant \rangle$ — полный парус (2), однако обратное не верно.

Замечание 4. Если X — полное A-пространство, то само X является своим базисным подпространством.

Теорема 4. *Если $\mathfrak{A}$ — категория топологических A-пространств, $\mathfrak{A}_п$ — полная подкатегория $\mathfrak{A}$ всех полных A-пространств, то существует функтор Π: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_п$ (функтор пополнения), сопряженный слева функтору вложения $\mathfrak{A}_п$ в $\mathfrak{A}$.*

Другими словами, для каждого A-пространства X существует «наименьшее» пополнение $\Pi(X)$ с хорошими функторными свойствами.

Некоторое объяснение теореме 4 даст следующее понятие и его свойства: A-пространства X и Y назовем **базисно эквивалентными** ($X \infty Y$), если они обладают гомеоморфными базисными подпространствами.

Теорема 5. *Если X, X' — A-пространства, Y, Y' — A_0-пространства, X_0 — базисное подпространство X, то*:

1) $X \infty X', Y \infty Y' \Rightarrow C(X, Y) \infty C(X', Y')$;

2) $X \infty X_0$;

3) *если Y — полное A_0-пространство и $X \infty X'$, то $C(X, Y)$ и $C(X', Y)$ естественно гомеоморфны*;

4) $X \infty \Pi(X)$;

5) $X \infty X' \Rightarrow \Pi(X)$ *гомеоморфно* $\Pi(X')$.

Теорема 1*. *Если X_i, $i \in I$,— семейство полных A_0-пространств, то $\prod\limits_{i \in I} X_i$ — полное A_0-пространство.*

Теорема 2*. *Если X — произвольное A_0-пространство, а Y — полное A_0-пространство, то $C(X, Y)$ — полное A_0-пространство.*

Предложение 2. *Ретракт полного A-пространства является полным A-пространством.*

Следующее утверждение установит связь с понятиями работ ([2], [3]).

Предложение 3. а) *Всякое полное f-пространство является полным A-пространством.*

б) *Всякое полное A (A_0)-пространство является ретрактом полного f (f_0)-пространства.*

в) *Топологическое пространство X будет инъективным пространством* ([3]) (*или, что то же, $\langle X, \leqslant \rangle$ будет непрерывной решеткой*), *если и только если X — полное A_0-пространство, имеющее наибольший элемент.*

Таким образом, понятие A-пространства охватывает и понятие f-пространства и понятие непрерывной решетки и сохраняет основные полезные свойства этих понятий. Эти свойства позволяют, например, провести конструкции λ-моделей функционалов $\mathbf{C}$ для всякого полного A-пространства, как в работе ([2]).

4. Пусть X — A-пространство с базисным подпространством X_0, Y — A-пространство с базисным подпространством Y_0. Пару непрерывных отображений $e: X \to Y$ и $\pi: Y \to X$ назовем **базисным проектированием** (а X будем называть **базисной проекцией** Y), если выполнены следующие условия:

1) $\pi e = \mathrm{id}_X$;

2) $e(X_0) \subseteq Y_0$, $\pi(Y_0) \subseteq X_0$;

3) для любого $y \in Y$ $e\pi(y) \leqslant y$.

Замечание 1. Определение и само понятие базисного проектирования зависят от выбора базисных подпространств X_0 и Y_0.

Замечание 2. Во втором включении в п. 2) на самом деле равенство, как это следует из п. 1) и первого включения п. 2).

Пусть X^i, $i \in I$,— семейство A-пространств (с фиксированными для дальнейшего базисными подпространствами X_0^i, $i \in I$). Предположим далее, что $\langle I, \leqslant \rangle$ — предупорядоченное направленное множество и что для каждой пары i, $j \in I$ такой, что $i \leqslant j$, задана пара непрерывных отображений $e_{ij}: X^i \to X^j$; $\pi_{ij}: X^j \to X^i$ таких, что (e_{ij}, π_{ij}) — базисное проектирование; система $\{X^i, \pi_{ij} | i, j \in I, i \leqslant j\}$ является обратным спектром топологических пространств, а система $\{X^i, e_{ij} | i, j \in I, i \in j\}$ (так же как и система $\{X_0^i, e_{ij} | X_0^i | i, j \in I, i \leqslant j\}$) является прямым спектром множеств. Тогда, если $\overline{X}^I = \varprojlim X^i$ — топологическое пространство, являющееся обратным пределом спектра $\{X^i, \pi_{ij} | i, j \in I, i \leqslant j\}$, а $X^I = \varinjlim X^i$ ($X_0^I = \varinjlim X_0^i$) — множество, являющееся прямым пределом спектра $\{X^i, e_{ij} | i, j \in I, i \leqslant j\}$ ($\{X_0^i, e_{ij} | X_0^i | i, j \in I, i \leqslant j\}$), то существует естественное вложение $e: X^I \to \overline{X}^I$ ($e_0: X_0^I \to \overline{X}^I$), которое позволяет отождествить X^I (X_0^I) с подмножеством $\overline{X}^I$. В этих условиях справедлива

Теорема 6. *Пространство $\overline{X}^I$ является A-пространством с базисным подпространством X_0^I. Если все X^i, $i \in I$,— полные A-пространства, то $\overline{X}^I$— полное A-пространство. Если все X^i — f-пространства, а X_0^i — их главные базисные подпространства, $i \in I$, $\overline{X}^I$ — f-пространство, а X_0^I — его главное базисное подпространство.*

Замечание. Для любого $i \in I$ естественная композиция e_i: $X^i \to X^I (= \varinjlim X_i) \xrightarrow{e} \overline{X}^I$ вместе с проекцией π_i: $\overline{X}^I \to X^i$ образуется базисное проектирование.

Укажем теперь, как построить упомянутый во введении класс рекурсивно перечислимых множеств S с указанными там свойствами. Если взять любой конечный парус X_0 с нулем и построить, как в работе Д. Скотта ([3]), биспектр $\{X_i, e_{ij}, \pi_{ij} | i, j \in N, i \leqslant j|\}$, тогда, как легко видеть, $X_\omega^0 = \varinjlim X_i$ — конструктивный парус. А по доказанному Скоттом гомеоморфизму $X_\omega = \varprojlim X_i$ и $C(X_\omega, X_\omega)$ и теоремам 5, 6, X_ω — f_0-пространство с базисным подпространством X_ω^0 и X_ω^0 гомеоморфно главному базисному подпространству $C(X_\omega, X_\omega)$. Далее строим над X_ω^0 полное kf_0-пространство $\mathfrak{S} = X_\omega^k$, тогда, по доказанным в работе ([2]) свойствам, Mor $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) \subseteq C(X_\omega^k, X_\omega^k)$ и, рассматривая эти множества как топологические пространства, имеем Mor $(X_\omega^k, X_\omega^k) \infty C(X_\omega^k, X_\omega^k)$, $C(X_\omega^k, X_\omega^k) \infty C(X_\omega, X_\omega)$, так что X_ω^0 можно считать базисным подпространством Mor (X_ω^k, X_ω^k), а так как для полного kf_0-пространства $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{Mor}$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ — также полное kf_0-пространство, то из их базисной эквивалентности (которая, очевидно, эффективна), получаем, что $\mathfrak{S} \approx \mathfrak{Mor}$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
6 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Л. Ершов, Алгебра и логика, **10**, № 3, 247 (1971). [2] Ю. Л. Ершов, там же, **11**, № 4, 360 (1972). [3] D. Scott, Continuous Lattices, Oxford Univ. Comp. Lab., 1971.