УДК 519.218.2

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ. I

В. А. Ватутин, А. М. Зубков

ВВЕДЕНИЕ

За время, прошедшее с момента публикации в «Итогах науки и техники» обзора Б. А. Севастьянова [114], появилось более 800 работ по теории ветвящихся процессов. Первая часть нашего обзора охватывает примерно половину этого материала; в ней упоминаются лишь результаты, относящиеся к ветвящимся процессам «классического» вида: число типов частиц конечно, эволюции частиц независимы, процесс размножения однороден по времени. Более сложные модели ветвящихся процессов будут рассмотрены во второй части.

Приведенный здесь список библиографии очень слабо пересекается с аналогичным списком обзора [114]; как правило, мы не упоминаем работы, вошедшие в [114] и явившиеся исходным пунктом дальнейших исследований.

Различные вопросы теории ветвящихся процессов изложены в следующих монографиях: Харрис [132], Б. А. Севастьянов [117], Атрея, Ней [170], Мод [368], Ягерс [316], Асмуссен, Херинг [156]. Весьма содержательным обзором современного состояния теории ветвящихся процессов является глава 13 справочника И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецова, В. М. Шуренкова [65]. Перечислим еще несколько обзорных статей, посвященных более узким вопросам: Кендалл [337], Сенета [450; 456], Хейди, Сенета [289], Хоппе, Сенета [306], Атрея, Каплан [167], Бюлер, Меллайн [196], Дион, Кейдинг [223], Хольцхеймер [297], Дюбук [234].

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Модели ветвящихся процессов. Развитие теории ветвящихся процессов началось с рассмотрения простейших моделей: *ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона* (каждая частица, существующая в целочисленный момент времени n, независимо от предыстории и эволюции остальных частиц порождает случайное число ξ частиц-потомков, $\mathbf{M}s^{\xi}=h(s)=\sum_{j=0}^{\infty}h_j s^j$, а сама исчезает; частицы-потомки размножаются в момент времени $n+1$) и *марковского ветвящегося процесса* (каждая частица, существующая в момент времени $t\in[0, \infty)$, независимо от предыстории и эволюции других частиц в интервале $(t, t+\Delta t)$ исчезает с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, $\Delta t\to 0$, порождая при этом случайное число ξ потомков, $\mathbf{M}s^{\xi}=h(s)$). Чтобы упростить и унифицировать описание моделей, мы будем в этом обзоре называть процесс Гальтона—Ватсона *(E, h)-процессом*, а марковский ветвящийся процесс *(M_λ, h)-процессом.*

Последовательными обобщениями этих двух моделей являются:

а) *процесс Беллмана—Харриса,* или *(G, h)-процесс,* отличающийся от (M_λ, h)-процесса лишь тем, что длительности жизни частиц — независимые случайные величины с общей функцией распределения $G(t)$ (если $G(t)=1-e^{-\lambda t}$, то (G, h)-процесс является (M_λ, h)-процессом, а если $G(t)=0$ при $t<1$, $G(t)=1$ при $t\geqslant 1$, то (E, h)-процессом);

б) *процесс Севастьянова,* или *(G, h_u)-процесс,* отличающийся от (G, h)-процесса лишь тем, что производящая функция $h_u(s)=\mathbf{M}s^{\xi_u}$ распределения числа ξ_u потомков частицы, длительность жизни которой равна u, зависит от u;

в) *процесс Крампа—Мода—Ягерса,* или *N-процесс*; в N-процессе частицы развиваются независимо, и его свойства полностью определяются совместным распределением времени жизни частицы и случайного целочисленного процесса $N(t)$ с неубывающими ограниченными траекториями: $N(t)$ — это число потомков, порожденных частицей к моменту достижения ею возраста t (если на траектории $N(\cdot)$ с вероятностью 1 существует только один скачок, совпадающий с моментом гибели частицы, то N-процесс является (G, h_u)-процессом). Для функции распределения времени жизни и производящей функции общего числа $\xi=N(\infty)$ непосредственных потомков частицы сохраним обозначения $G(t)$ и $h(s)$.

Для (E, h)- и (M_λ, h)-процессов процесс Z_t, где Z_t — число частиц в процессе в момент t, — марковский; (G, h)-, (G, h_u)- и N-процессы не марковские в том смысле, что соответствующие им процессы Z_t, вообще говоря, не являются марковскими.

Все описанные выше модели ветвящихся процессов можно усложнять, допуская возможность появления новых частиц не только при делении уже существующих частиц, но и за счет иммиграции из внешнего источника. В обозначения таких моделей мы будем вводить символ I, например: $((M_\lambda, h)+I)$-процесс. Характер потока иммигрирующих частиц будет оговариваться специально.

Дальнейшее обобщение этих моделей возможно при отказе от предположения об идентичности вероятностных законов развития частиц. Простейшим примером такого рода является процесс с конечным числом типов частиц. Он определяется заданием нескольких вероятностных законов поведения и размножения частиц, интерпретируемых как законы поведения частиц разных типов; при этом законы размножения описывают распределение как числа, так и типов частиц-потомков. Например, ветвящийся процесс Беллмана—Харриса с k типами частиц мы будем называть $(G, h)^k$-процессом, имея в виду, что i-му ($i=1, \ldots, k$) типу частиц соответствуют функция распределения $G^{(i)}(t)$ времени жизни и производящая функция

$$h^{(i)}(s) = \mathbf{M} s_1^{\xi_1^{(i)}} s_2^{\xi_2^{(i)}} \ldots s_k^{\xi_k^{(i)}} = \mathbf{M} s^{\xi^{(i)}}$$

распределения вектора $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_k^{(i)})$ чисел частиц-потомков типов $1, \ldots, k$, порождаемых одной частицей i-го типа.

1.2. Основные понятия и обозначения. Число частиц ветвящегося процесса, существующих в момент t, будем обозначать символом Z_t, а число частиц ветвящегося процесса с иммиграцией — Y_t. При рассмотрении (E, h)-процессов момент времени, как правило, обозначается буквой n. Для процессов с $k>1$ типами частиц $\mathbf{Z}_t = (Z_{t1}, \ldots, Z_{tk})$ — вектор, Z_{ti} — число частиц i-го типа в момент t; запись $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_j$ означает, что процесс начинается в момент $t=0$ с одной частицы j-го типа (нулевого возраста). Случайная величина ξ всюду обозначает число непосредственных потомков одной частицы; для процессов с $k>1$ типами частиц $\xi_j^{(i)}$ — число потомков частицы i-го типа, имеющих j-й тип, и $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_k^{(i)})$. Случайная величина η (или вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$) обозначает число одновременно иммигрирующих частиц. Выражения типа $\mathbf{M}\xi \log \xi$ всюду следует понимать как $\mathbf{M}\xi \max(0, \ln \xi)$.

Свойства ветвящегося процесса с одним типом частиц во многом определяются значениями вероятности вырождения $q = \lim_t \mathbf{P}\{Z_t = 0 \mid Z_0 = 1\}$ (равной наименьшему неотрицательному корню уравнения $h(s) = s$) и среднего числа потомков $m = \mathbf{M}\xi$ (для (G, h)-процесса $m = h'(1)$, для (G, h_u)-процесса $m = \int (d/ds) h_u(s)|_{s=1} dG(u)$, для N-процесса $m = \mathbf{M}N(\infty)$). Для процессов с $k>1$ типами частиц аналогичными характеристиками являются вектор вероятностей вырождения $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_k)$, $q_j = \lim_t \mathbf{P}\{\mathbf{Z}_t = 0 \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_j\}$, удовлетворяющий уравнению $\mathbf{q} = \mathbf{h}(\mathbf{q})$, $\mathbf{h} = (h^{(1)}, \ldots, h^{(k)})$, перронов корень (максимальное по модулю собственное число) ρ матрицы первых моментов $A = \|\mathbf{M}\xi_j^{(i)}\|_{i,j=1}^k$ и соответствующие перронову корню левый $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ и правый $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$ собственные векторы матрицы A, определяемые условиями

$$\mathbf{v}A=\rho\mathbf{v}, \quad A\mathbf{u}=\rho\mathbf{u}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})=1, \quad \sum_{i=1}^{k} u_i=1. \tag{1}$$

Важную роль в предельных теоремах играет так называемый мальтусовский параметр α, который для N-процессов определяется как действительный корень уравнения

$$\mathbf{M}\int_0^\infty e^{-\alpha t}dN(t)=1$$

(если $m<1$, то α может не существовать). Для (E, h)-процессов $e^\alpha=m$, для (M_λ, h)-процессов $\alpha=\lambda(m-1)$. Процессы с $m=1$ ($\rho=1$, $\alpha=0$) называются *критическими*, с $m>1$ ($\rho>1$, $\alpha>0$) — *надкритическими*, с $m<1$ ($\rho<1$, $\alpha<0$ — *докритическими*.

Ветвящиеся процессы с $k>1$ типами частиц допускают дополнительную классификацию. Процесс называется *разложимым*, если существуют такие $i, j\in\{1, \ldots, k\}$, что

$$\sup_{t\geq 0}\mathbf{P}\{Z_{tj}>0\,|\,\mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_i\}>0, \quad \sup_{t\geq 0}\mathbf{P}\{Z_{ti}>0\,|\,\mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_j\}=0,$$

и *неразложимым* — в противном случае. Класс $S\subseteq\{1, \ldots, k\}$ типов частиц называется *финальным*, если число потомков частицы каждого типа $j\in S$ с вероятностью 1 равно 1, тип частицы-потомка тоже принадлежит S и никакое подмножество S этим свойством не обладает. Неразложимый $(E, h)^k$-процесс называется *апериодическим*, если

$$\text{НОД}\,\{n: \mathbf{P}\{Z_{ni}>0\,|\,\mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_i\}>0\}=1.$$

Кроме характеристик, определяемых в терминах Z_t, изучаются, например, свойства случайных генеалогических деревьев, соответствующих реализациям ветвящегося процесса, и свойства процесса

$$X_t=\sum_x \chi_x(t-\sigma_x), \quad t\geq 0,$$

где суммирование ведется по всем когда-либо появляющимся в процессе частицам x, $\{\chi_x(u)\}$ — совокупность (как правило, независимых и одинаково распределенных) случайных процессов, σ_x — момент появления частицы x. При различных выборах процессов $\chi(\cdot)$ величины X_t могут иметь разнообразные интерпретации.

Всюду в дальнейшем символ $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению, п. н. — сходимость с вероятностью 1, символы $L(x)$, $L_i(x)$ обозначают медленно меняющиеся (м. м.) функции,

$$\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

Запись $h_n(s)$ для (E, h)-процессов и $\mathbf{h}_n(\mathbf{s})$ для $(E, h)^k$-процессов будет обозначать n-ю итерацию скалярной функции h или векторной функции $\mathbf{h}$; $|\mathbf{Z}_t|=Z_{t1}+\ldots+Z_{tk}$; асимптотические соотношения (если не оговорено противное) справедливы при $n\to\infty$ или $t\to\infty$.

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

2.1. Вложимость. Численности последовательных поколений N-процесса Z_t образуют вложенный (E, h)-процесс Z_n^*. Гольдштейн [261] вывел неравенства, связывающие производящую функцию $F(t, s)=\mathbf{M}s^{Z_t}$ для (G, h)-процесса и n-кратную итерацию $h_n(s)=h(h(\ldots(h(s))\ldots))=\mathbf{M}s^{Z_n^*}$, где Z_n^* — вложенный (E, h)-процесс:

$$|q-h_n(s)|-|q-s|\,\theta^n G^{*n}(t)\leqslant|q-F(t, s)|\leqslant$$

$$\leqslant|q-h_n(s)|+|q-s|\sum_{k=0}^{n-1}\theta^k\left[G^{*k}(t)-G^{*(k+1)}(t)\right]. \qquad (2)$$

Здесь $\theta=h'(q)$ при $0\leqslant s\leqslant q$ и $\theta=h'(1)$ при $q<s<1$, а $G^{*k}(t)$ — k-кратная свертка функции $G(t)$ с собой. Аналог неравенств (2) при $\mathbf{s}=0$ для $(G, h)^k$-процессов получил Гольдштейн [261], а для N-процессов — Холте [295].

Для (M_λ, h)-процесса Z_t существует другой способ вложения (E, h^*)-процесса: при любом $\delta>0$ последовательность $Z_{\delta n}$ образует (E, h^*)-процесс с $h^*(s)=\mathbf{M}\left[s^{Z_\delta}\,|\,Z_0=1\right]$. Карлин, Мак-Грегор [334] показали, что для (E, h^*)-процесса с $h^*(s)=s((1-p)/(1-ps))^{1/k}$ существует (M_λ, h)-процесс Z_t, для которого $\mathbf{M}[s^{Z_1}\,|\,Z_0=1]=h^*(s)$. Другие примеры вложения (E, h^*)-процессов в (M_λ, h)-процессы и использования такого вложения при переносе предельных теорем с дискретного на непрерывное время имеются в книге Атрея, Ней [170] и в работе Пейкс [400]. Грей [272] доказал, что если (E, h^*)-процесс с $h^*(s)\neq h_0^*+h_1^*s$ вложим в (M_λ, h)-процесс, то $I=\{j:h_j^*>0\}$ — полугруппа по сложению, $\inf_{j\in I}j^{-1}\log h_j^*>-\infty$, и если $h_0^*=0$, то $s^{-1}h^*(s)$ — производящая функция безгранично делимого распределения.

Зе [472] установил, что для любого (E, h)-процесса с $m=h'(1)=1$ и $h(s)=s+o((1-s)/\log(1-s))$, $s\uparrow 1$, существует такой (M_λ, h^*)-процесс Z_t^*, что $F(t, s)=\mathbf{M}\left[s^{Z_t^*}\,\middle|\,Z_0^*=1\right]$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{s}^{F(t,s)} (f(u)-u)^{-1}du = t,$$

и $1-\mathbf{M}s^{Z_n}=1-h_n(s)\sim 1-F(n,\ s)$ при $n\to\infty$, $s\in[0,\ 1]$. Имаи [310] показал, что для $(M_\lambda,\ h)$-процесса $F(t,\ s)=\mathbf{M}s^{Z_t}=\lim h_n(n,\ s)$, где $h_n(n,\ s)$ — n-я итерация функции $h(n,\ s)=s+(1-e^{-\lambda t/n})(h(s)-s)$, причем скорость сходимости есть $O(n^{-1})$.

2.2. Стационарные меры. Множество неотрицательных чисел $\{\eta_j\}_{j\in\mathbf{Z}_+^k}$, $\mathbf{Z}_+=\{0,\ 1,\ 2,\ldots\}$, называется *стационарной мерой* $(E,\ h)^k$-процесса, если

$$\eta_j=\sum \eta_i \mathbf{P}\{\mathbf{Z}_1=j\mid \mathbf{Z}_0=i\} \text{ при всех } j\in\mathbf{Z}_+^k.$$

Хоппе [299, 302] указал, что при $\mathbf{M}\,|\,\mathbf{Z}_1|\log|\mathbf{Z}_1|<\infty$ стационарные меры $(E,\ h)^k$- и $((E,\ h)+I)^k$-процессов с $\rho\leqslant 1$ существуют и единственны; при $\rho<1$ функция $\eta(\mathbf{s})=\sum\eta_j\mathbf{s}^j$ для $(E,\ h)^k$-процесса меняется около 1 правильно с показателем 1, а для $((E,\ h)+I)^k$-процесса — медленно. Для $(E,\ h)$-процесса с $m=h'(1)=1$ и $h_1>0$ (см. Папанжелоу [406])

$$\eta_j=\lim_n \mathbf{P}\{Z_n=j\mid Z_0=1\}/\mathbf{P}\{Z_n=1\mid Z_0=1\}.$$

Поммеренке [411] установил, что $\eta_j\to 2/\sigma^2\ (j\to\infty)$ для $(E,\ h)$-процесса с $m=1$, $h''(1)=\sigma^2<\infty$. Для $(E,\ h)$-процесса с $h(s)=s+(1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, $\alpha\in(0,\ 1]$, Слэк [463] показал, что $\sum\eta_j s^j\sim(1-s)/\alpha(h(s)-s)$, $s\to 1$. Сенета [454] доказал, что для $(E,\ h)$- и $((E,\ h)+I)$-процессов с $m>1$ стационарная мера $\{\eta_j\}$ существует, но единственна лишь при условии, что $\eta(s)$ правильно меняется при $s\uparrow 1$. Сато [434] установил неединственность $\{\eta_j\}$ для $((E,\ h)+I)$-процесса Y_n с $m>1$ и иммиграцией, происходящей только в такие моменты τ, что $Y_{\tau-1}=0$.

Свойства мер $\{\eta_j\}$ для $(E,\ h)$-процессов при $m\neq 1$ изучала Липов (см. [170]), а при $m>1$ — Лотжете [360].

Для $(E,\ h)^k$-процесса с $\mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_l$ Буикулеску [190] нашла

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{j}\mid n<\tau<\infty\}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{j}\mid n+m<\tau<\infty\},$$

где $\tau=\min\{n{:}\,\mathbf{Z}_n=0\}$, а Хоппе [302] вычислил $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\mathbf{Z}_n=\mathbf{j}\mid\tau=n+r\}$ при $\rho=1$.

Таназе [474] для $(E,\ h)^k$-процесса с $\rho=1$ и $\sum\mathbf{M}(\xi_j^{(i)})^2<\infty$ доказал существование $\lim n^2(\mathbf{v},\ \mathbf{h}_n(\mathbf{s})-\mathbf{h}_n(0))$.

Многие из этих результатов перенесли на $(M_\lambda,\ h)$-процессы

Янг [496, 497], Чеонг [198], Танака [473]. Согласно [496] для $((M_\lambda, h)+I)$-процессов мера $\{\eta_j\}$ единственна даже при $m>1$.

Нагасава [371, 372] для (M_λ, h)-процесса указал условия существования мультипликативной эксцесивной меры, т. е. такого числа μ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \mathbf{P}\{Z_t=m \mid Z_0=n\} \leqslant \mu^m, \quad t \geqslant 0, \quad m=1, 2, \ldots$$

Даянити [218, 219] изучал спектральные свойства переходной матрицы цепи Маркова ((E, h)-процесса) Z_n при $m \geqslant 1$; при $m>1$ спектр ограничен и ненулевым собственным значениям $(h'(q))^j$ соответствуют одномерные собственные подпространства.

2.3. Гармонические функции. Множество неотрицательных чисел $\{g_i\}$ называется *гармонической функцией* (E, h)-процесса, если

$$g_i=\sum_j g_j \mathbf{P}\{Z_1=j \mid Z_0=i\} \text{ при всех } i \geqslant 0.$$

При $m=h'(1)=1$ гармоническая функция единственна с точностью до мультипликативной константы (см. Атрея, Ней [170]) и, как показал Лотжьете [359], имеет вид $\alpha+\beta i$. Дюбук [231] установил взаимно однозначное соответствие между гармоническими функциями (E, h)-процесса и гармоническими функциями диагональной матрицы.

Дюбук [232] для (E, h)-процесса с $m>1$ и $\mathbf{M}\xi\log^2\xi<\infty$ перечислил крайние точки выпуклого множества гармонических функций. Кон [202] описал множество всех ограниченных гармонических функций (E, h)-процесса с $m>1$. При $m>1$, $h''(1)<\infty$ любая гармоническая функция $\{g_i\}$ удовлетворяет условию (см. Дюбук [233])

$$0<\liminf_{n\to\infty} n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} i^{-1/2} g_i \leqslant \limsup_{n\to\infty} n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} i^{-1/2} g_i<\infty .$$

Савитс [436, 437] указал, что с помощью гармонических функций можно строить связанные с ветвящимися процессами мартингалы и доказывать предельные теоремы.

2.4. Регулярность. Ветвящийся процесс Z_t называется *регулярным*, если $\mathbf{P}\{Z_t<\infty\}=1$ для любого $t>0$, и *нерегулярным* в противном случае. Шух [440] нашел новое (по сравнению с приведенным в книге Б. А. Севастьянова [117]) доказательство того, что (M_λ, h)-процесс регулярен тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\varepsilon} (1-h(1-u))^{-1} du=\infty \text{ при любом } \varepsilon>0.$$

Полные аналоги этого результата пока не получены ни для $(M_\lambda, h)^k$-, ни для (G, h)-процессов. Б. А. Севастьянов [113, 117] показал, что для регулярного (G, h)-процесса существуют такие ε, $\theta > 0$, что

$$\int_{\delta}^{\varepsilon} G_{-1}((1+\theta)/w(x))\, x^{-1} dx = \infty, \qquad (3)$$

где $G_{-1}(t) = \sup\{x : G(x) \leqslant t\}$ и $xw(x) = 1 - h(1-x)$. В случае, когда $c_1 t^\alpha \leqslant G(t) \leqslant c_2 t^\alpha$ при $0 < t \leqslant t_0$ и некоторых c_1, c_2, $\alpha > 0$, условие (3) с $\theta = 0$ необходимо и достаточно для регулярности (G, h)-процесса (см. Б. А. Севастьянов [117] и В. А. Ватутин [31]). Более жесткие условия регулярности указал Грей [271].

2.5. Экстремальные задачи и неравенства для ветвящихся процессов. Так как для (E, h)-процесса $\mathrm{P}\{Z_n = 0\} = h_n(0)$, то величина $q = \lim \mathrm{P}\{Z_n = 0\}$ и распределение момента вырождения $\tau = \min\{n : Z_n = 0\}$ ветвящегося процесса монотонно зависят от h (например, Стоян [469] показал, что если $h'(1) \leqslant 1$, $h^{*\prime}(1) \leqslant 1$, $h^*(s) \geqslant h(s)$, то $\mathrm{M}s^{\tau^*} \geqslant \mathrm{M}s^\tau$, $s \in [0, 1]$, для (E, h)- и (E, h^*)-процессов Z_n и Z_n^*). В ряде работ Браун [186, 187], Далей [213, 214], Фридман, Первс [258], Холгейт, Лакхани [293], Ланг [352], Квайн [419] при различной степени общности фактически устанавливалось, что верхняя и нижняя огибающие семейства производящих функций $h(s) = \sum h_j s^j$ с заданными значениями $h^{(i)}(0)$, $i = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$, и $h^{(i)}(1)$, $i = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$, являются производящими функциями, у которых не более $(m_0 + m_1 + 1)/2$ коэффициентов отличны от 0; и в качестве следствий получались неравенства для величины q.

Сенета [444], Поллак [407, 408] для (E, h)-процессов с $m = h'(1) < 1$ указали оценки величины $\lim m^{-n} \mathrm{P}\{Z_n > 0 \mid Z_0 = 1\}$ в терминах $h^{(i)}(1)$, $i = 1, \ldots, k$. Двусторонние неравенства для $\mathrm{M}\tau^\gamma$ и $\mathrm{P}\{\tau \leqslant n\}$, зависящие от значений $h^{(i)}(1)$, получили Агрести [151] и Ванг [480]. Ланг, Бохнке, Карсон [353] для $(E, h)^k$-процесса с $\rho < 1$ оценили сверху и снизу

$$R_n = \sum_{j > n} [(j+1)^r - j^r]\, \mathrm{P}\{\tau > j\} \quad (R_{-1} = \mathrm{M}\tau^r).$$

Накагава [375], обобщая Агрести [151], нашел соотношения между $m = h'(1)$, $h''(1)$, B_1 и B_2, при которых

$$h_{m, B_1}(s) \leqslant h(s) \leqslant h_{m, B_2}(s),$$

где $h_{m,B}(s) = 1 - m(1-s)\{1 + B(1-s)/2m\}^{-1}$.

Брокуелл [188] и Сенета, Вебер [460] указали двусторонние неравенства для мальтусовского параметра (G, h)-процесса в случае, когда заданы значения $m=h'(1)$, $\int u\,dG(u)$ $\Bigl($и, возможно, $\int u^2 dG(u)\Bigr)$.

§ 3. ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ Z_t

3.1. Асимптотика $Q_t=\mathbf{P}\{Z_t\neq 0\,|\,Z_0=1\}$.

Для $(E, h)^k$-процесса (и, значит, для любого процесса с k типами частиц) вектор $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_k)$, $q_i=\lim\mathbf{P}\{\mathbf{Z}_t=\mathbf{0}\,|\,\mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_i\}$ является наименьшим неотрицательным решением системы уравнений $s_i=h^{(i)}(\mathbf{s})$, $i=1,\ldots,k$, и $\{\mathbf{q}=\mathbf{1}\}\Leftrightarrow\{\rho\leqslant 1$ и финальные классы типов отсутствуют$\}$ (см. Б. А. Севастьянов [177], Иржина [319]).

В. Д. Жуков [50] показал, что для (M_λ, h)-процесса функция Q_t и ее производные в точке $t\geqslant 0$ однозначно определяют функцию $\mathbf{M}s^{Z_t}$.

3.1.1. Некритические процессы. Равенство $q-h(s)=q(1-h^*(s/q))$, где $q=h(q)<1$, $h^*(u)=q^{-1}h(qu)$, $h^{*\prime}(1)=h'(q)$, и его аналог для (M_λ, h)-процессов показывают, что исследование Q_t при $m>1$ сводится к случаю $m<1$. Более того, условное распределение на множестве траекторий Z_t с $m>1$ при условии $\lim Z_t=0$ совпадает с распределением на множестве траекторий соответствующего процесса с $m<1$ (см., например, Атрея, Ней [170]). Вопросы такого типа рассматривали Уо [481], Дали [215]. Шух [439] отметил, что если

$$h_z(s)=(h((1-z)s+z)-z)/(1-s),$$

то $h_z'(1)=h'(1)$ и при изменении z от 0 до q корень $q_z=h_z(q_z)<1$ изменяется от q до 0.

Для (E, h)- и (M_λ, h)-процессов с $m<1$ (см. Б. А. Севастьянов [117]; Хиткот, Сенета, Вер-Джонс [279]; А. В. Нагаев, И. С. Бадалбаев [87])

$$Q_t\sim Km^t,\quad t\to\infty\Leftrightarrow\mathbf{M}\xi\log\xi<\infty\Leftrightarrow$$
$$-\int_0^1(1-mx-h(1-x))\,x^{-2}dx<\infty, \tag{4}$$

причем для (M_λ, h)-процессов K явно выражается через $h(s)$. Если $m>1$, то $q-Q_t\sim K(h'(q))^t$, поскольку условие в правой части (4) выполняется автоматически.

В. М. Золотарев [53], Р. И. Мухамедханова, С. В. Нагаев (см. РЖМат, 1964, 4В43) получали следующие члены разложения Q_t при условиях типа $\mathbf{M}\xi^r<\infty$, $r\geqslant 2$, а Сенета [449] нашел второй член асимптотики Q_n для (E, h)-процесса с $h(1-u)=1-mu+u^{1+\alpha}L(u)$, $0<\alpha\leqslant 1$.

Если $m<1$, $\mathbf{M}\xi\log\xi=\infty$, то (см. Сенета [456]) $Q_n\sim$

$\sim m^n L(m^n)$ при $n \to \infty$. Утияма [476] изучил асимптотику Q_n для (E, h)-процесса с $m < 1$ и $\sum_{j \geqslant n} j h_j \sim (\log n)^{-\alpha} L(\log n)$.

Аналог (4) для $(E, h)^k$-процессов с $\rho < 1$ доказали Иоффе, Спицер [323], а случай $\rho > 1$ рассмотрел Поллак [409]. Он же [410] получил явные формулы для Q_n в $(E, h)^k$-процессе с дробно-линейными функциями $h^{(i)}$ с общим знаменателем.

Доней [230] указал условия, необходимые и достаточные для существования и положительности $\lim_t e^{-\alpha t}(1-\mathbf{M}s^{Z_t})$ в случае N-процесса Z_t с $m < 1$.

3.1.2. Критические процессы. Соотношение

$$Q_t = \mathbf{P}\{Z_t \neq 0\} \sim 2/bt, \quad t \to \infty, \tag{5}$$

где $b = h''(1)$ для (E, h)-процессов, $b = \lambda h''(1)$ для (M_λ, h)-процессов, справедливо при $h'(1) = 1$, $0 < h''(1) < \infty$; формула (5) имеет место и для процессов с несколькими типами частиц, если $\mathbf{M}\Sigma(\xi_j^{(i)})^2 < \infty$. Следующий член асимптотики Q_t для (M_λ, h)-процессов получил В. М. Золотарёв [53]; для (E, h)-процессов Р. И. Мухамедханова, А. Ганиев [83] показали, что при $h^{(r)}(1) < \infty$, $r \geqslant 3$,

$$Q_n = \frac{2}{bn} + \sum_{j=2}^{r-1} n^{-j} \sum_{k=0}^{j} A_{jk} \ln^k n + O(n^{1-r} \ln n).$$

Для (M_λ, h)- и (E, h)-процессов с $h(1-u) = 1 - u + u^{1+\alpha} L(u)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. В. М. Золотарёв [53] и Слэк [462] доказали, что

$$Q_t = t^{-1/\alpha} L_1(t), \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Аналог (6) для $(E, h)^k$- и $(M_\lambda, h)^k$-процессов (при условиях (12), см. п. 3.4.2) получил В. А. Ватутин [37].

В ряде работ формулы (5) и (6) распространялись на ветвящиеся процессы с размножением, зависящим от возраста частиц. В. А. Топчий [122] указал минимальные моментные условия, обеспечивающие для (G, h)-процессов с решетчатым распределением G справедливость (5) с $b = (\int t dG(t))^{-1} \mathbf{D}\xi$. Вайнер [490] предложил новый способ доказательства (5) для (G, h)-процессов с $1 - G(t) = o(t^{-2})$. В. А. Ватутин [34] улучшил результаты, которые получили ранее Б. А. Севастьянов [112], В. П. Чистяков [137] и Гольдштейн [261], относящиеся к аналогу (5) для $(G, h_u)^k$-процессов с $\rho = 1$.

Крамп, Мод [210], Холте [294] доказали (5) для N-процессов с $b = (\int t d\mathbf{M}N(t))^{-1} \mathbf{D}\xi$; В. А. Топчий [125, 127] показал, что в этом случае (5) справедливо при $1 - G(t) = o(t^{-2})$, $1 - \mathbf{M}N(t) = o(t^{-2})$ и что если $\mathbf{M}\xi = 1$, $1 - G(t) \sim ct^{-2}$, $0 < c < \infty$, то число $2/b$ в (5) является корнем уравнения

$$x^2 \mathbf{D}\xi - 2c - 2x \int t d\mathbf{M}N(t) = 0.$$

В этих же работах он привел оценки верхнего и нижнего пределов Q_t, $t\to\infty$, через соответствующие пределы $t^2(1-G(t))$.

В. А. Ватутин [40] для (G, h)-процессов с $h(1-u)=1-u+u^{1+\alpha}L(u)$, $\alpha\in(0, 1]$, и $\lim n(1-G(n))/(1-h_n(0))=c\in[0, \infty)$ показал, что

$$Q_t\sim\rho(c)\,t^{-1/\alpha}L_1(t),\quad \rho=\rho(c)\in(0, 1].$$

Если же $n(1-G(n))/(1-h_n(0))\to\infty$ и $1-G(t)\sim t^{-\beta}L_2(t)$, то [35]

$$Q_t^{1+\alpha}L(Q_t)\sim 1-G(t),\quad t\to\infty.$$

Сенета [445] показал, что в (E, h)-процессе с $h'(1)=1$, $Z_0=1$,

$$\mathbf{M}\tau=\infty\ (\tau=\min\{n: Z_n=0\})\Leftrightarrow\int_0^1(1-u)(h(u)-u)^{-1}du<\infty,$$

а Эриксон [243] доказал соотношения

$$\mathbf{M}Z_1^{1+\alpha}<\infty,\ 0<\alpha<1\Rightarrow\mathbf{M}\tau^{\beta}=\infty \text{ при любом } \beta>1/\alpha;$$

$$\mathbf{P}\{Z_1>x\}\sim x^{-1-\alpha}L(x),\ 0<\alpha<1\Rightarrow\mathbf{M}\tau^{\beta}<\infty \text{ при } \beta<1/\alpha.$$

Для (M_λ, h)-процессов с $m=1$, $h''(1)=b<\infty$ Б. А. Севастьянов [118] показал, что при фиксированных $p\geqslant r>0$

$$\mathbf{P}\{\min_{0<u<t} Z_u>r\mid Z_0=p\}\sim 2(p-r)/(\lambda bt),\quad t\to\infty.$$

Эта асимптотика не переносится на (E, h)-процессы.

3.2. Асимптотика моментов числа частиц. Асимптотические формулы для моментов числа частиц в $(G, h_u)^h$- и более простых процессах имеются, например, в книге Б. А. Севастьянова [117] и в работах Б. А. Севастьянова, В. П. Чистякова [115, 119, 120], см. также Квайн [417], Крамп [205, 207]. Простой метод анализа соответствующей системы интегральных уравнений типа уравнения восстановления предложил В. М. Шуренков [140]. Для (G, h)-процесса с $m=h'(1)>1$ при $t\to\infty$

$$\mathbf{M}Z_t\sim c_te^{\alpha t},\quad c_t=(m-1)\left[\alpha m^2\int_0^t e^{\alpha u}u\,dG(u)\right]^{-1}.$$

Для частного случая (G, h)-процесса асимптотику $\mathbf{M}Z_t$ и $\mathbf{D}Z_t$ получил Л. Г. Левин [73].

В. Д. Жуков [49] вывел явные рекуррентные формулы для $\mathbf{M}Z_n^{[r]}=\frac{d^r}{ds^r}\mathbf{M}s^{Z_n}\big|_{s=1}$ в случае (E, h)-процесса, а Б. И. Селиванов [121] указал способ получения асимптотических разложений $\mathbf{M}Z_n^{[r]}$ и $\mathbf{P}\{Z_n=r\mid Z_0=1\}$ при $n\to\infty$ по степеням m^{nk}, $m\neq1$.

Вайнер [488] для (G, h)-процессов с $m=1$, $h(1+\varepsilon)<\infty$, $\varepsilon>0$, нашел асимптотики всех моментов Z_t и общего числа S_t

частиц, существовавших на $[0, t]$, при условиях $t\to\infty$, $Z_{ct}>0$, $c>0$.

3.3. Предельные теоремы для докритических процессов

3.3.1. (E, h)- и $(\mathbf{M}_\lambda, h)$-процессы. Для (E, h)-процесса существует $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}[s^{Z_n}|Z_n>0]=B(s)$, и $B'(1)<\infty\Leftrightarrow\mathbf{M}\xi\log\xi<\infty$ (см. А. В. Нагаев, И. С. Бадалбаев [87]; Хиткот, Сенета, Вер-Джонс [279]), причем $B(s)$ — единственное решение уравнения

$$B(h(s))=1-m+mh(s),\quad B(0)=0.$$

Спатару [465, 466] указал условия, при которых для $Q(s)=\lim m^{-n}(1-\mathbf{M}s^{Z_n})$

$$\sum|m^{-n}(1-\mathbf{M}s^{Z_n})-Q(s)|<\infty \text{ и } n(m^{-n}(1-\mathbf{M}s^{Z_n})-Q(s))\to 0.$$

Эванс [249] доказал, что $B'(1)\leqslant 1+h''(1)/m(1-m)$. Если в (E, h)-процессе величина Z_0 случайная, $\mathbf{M}s^{Z_0}=\Pi(s)$, то (см. Рубин, Вер-Джонс [430])

$$1-B(h(s))=m^\alpha(1-B(s)),\quad \alpha\in(0, 1),\quad B(0)=0, \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда $1-\Pi(1-x)\sim x^\alpha L(x)$, $x\to 0$. Сенета [454] описал множество всех возможных предельных функций $B(s)$ при случайном Z_0. Хоппе [301, 305] показал, что при $\alpha<1$ решение (7) не единственно. Он же [303, 304] перенес свои результаты на $(E, h)^k$-процессы и получил еще одно (ср. Б. А. Севастьянов [117], Иоффе, Спицер [323]) доказательство существования $\lim\mathbf{M}[\mathbf{s}^{Z_n}|\mathbf{Z}_n\neq\mathbf{0}]=B(\mathbf{s})$ для неразложимого $(E, h)^k$-процесса с $\rho<1$. На (M_λ, h)-процессы эти результаты можно перенести методом вложения (см. п. 2.1).

Пейкс [387] доказал, что для (E, h)-процесса с $m<1$, $h''(1)<\infty$

$$\mathbf{P}\{(Z_0+Z_1+\ldots+Z_n-nB'(1))/\sqrt{nH}\leqslant x\,|\,Z_n>0\}\to\Phi(x),\ n\to\infty.$$

Баглей [173] установил, что если $\alpha>1$ и $\mathbf{M}s^V=B(s)$, то

$$\mathbf{P}\{Z_1>x\}\sim x^{-\alpha}L(x),\quad x\to\infty\Leftrightarrow$$
$$\mathbf{P}\{V>x\}\sim x^{-\alpha}L(x)\,\mathbf{M}V/(m-m^\alpha);$$
$$\mathbf{M}Z_1^\alpha L(Z_1)<\infty\Leftrightarrow\mathbf{M}V^\alpha L(V)<\infty.$$

Сенета [456] показал, что при $m<1$, $\mathbf{M}\xi\log\xi=\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x\mathbf{P}\{Z_n>y\,|\,Z_n>0\}\,dy\sim L(1/x),\quad x\to\infty,$$

для некоторой м. м. функции L.

3.3.2. (G, h)- и N-процессы. Если для N-процесса с $m<1$ существует мальтусовский параметр α, то

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}(1-\mathbf{M}s^{Z_t})=Q(s)$$

и $Q(s)\equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{M}\xi\log\xi=\infty$ (см., например, Ягерс [316], Доней [230]); для N-процесса специального вида это доказал Утияма [475]. Для неразложимых $(G, h)^k$-процессов с $\rho<1$ (при некоторых условиях на $\mathbf{1}-\mathbf{G}(t)$) существует $\lim \mathbf{M}[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}_t} \mid \mathbf{Z}_t \neq 0]$ (см., например, Б. А. Севастьянов [117], Нейр Мод, [374]).

Пример (G, h)-процесса с $m<1$, $h(s)=1-m(1-s^2)/2$, для которого не существуют $\lim \mathbf{P}\{Z_t=j \mid Z_t>0\}$, привели Курц, Вайнгер [349]. Човер, Ней, Вайнгер [199] указали совокупность условий на функции G и h, при которых для (G, h)-процесса

$$\lim \mathbf{M}[s^{Z_t} \mid Z_t>0]=s \text{ или } \lim \mathbf{M}[s^{Z_t} \mid Z_t>0] \neq s.$$

Частичное обобщение этого результата на $(G, h)^k$-процессы с $\rho<1$ получил В. А. Ватутин [41].

3.4. Предельные теоремы для критических процессов

3.4.1. «Классические» предельные теоремы для $(E, h)^k$- и $(M_\lambda, h)^k$-процессов (см. Б. А. Севастьянов [117], Атрея, Ней [170]). Если $\mathbf{M}\xi=1$, $0<\mathbf{D}\xi<\infty$, то

$$\mathbf{P}\{2Z_t/bt \leqslant x \mid Z_0=1,\ Z_t>0\} \to 1-e^{-x}, \quad t\to\infty, \tag{8}$$

где для (E, h)-процессов $b=h''(1)$, а для (M_λ, h)-процессов $b=\lambda h''(1)$; если в (E, h)-процессе $\mathbf{M}\xi^2\log\xi<\infty$ и $k, n\to\infty$, $k=O(n)$, то при каждом фиксированном i

$$\lim i^{-1}(n\gamma)^2\mathbf{P}\{Z_n=j \mid Z_0=i\}\, e^{j/n\gamma}=1, \quad \gamma=\mathbf{D}\xi/2. \tag{9}$$

Скорость сходимости в (8) при $\mathbf{M}\xi^3<\infty$ имеет порядок $O(n^{-1}\ln^2 n)$ (см. Р. И. Мухамедханова [81]). В. М. Золотарёв [53] показал, что если в (M_λ, h)-процессе

$$h(s)=s+(1-s)^{1+\alpha}L(1-s), \quad 0<\alpha\leqslant 1, \tag{10}$$

то при $Z_0=1$, $t\to\infty$,

$$\mathbf{M}[\exp\{-sZ_tQ_t\} \mid Z_t>0] \to 1-s(1+s^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad s\geqslant 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{P}\{Z_t=k\} \sim Q_t c_k/\alpha t, \quad \sum kc_k s^{k-1}=1/h(s).$$

Для неразложимых $(M_\lambda, h)^k$- и неразложимых апериодических $(E, h)^k$-процессов с $\rho=1$ и $\sum\limits_{i,j}\mathbf{M}(\xi_j^{(i)})^2<\infty$ условное распределение вектора $t^{-1}\mathbf{Z}_t$ при условиях $\mathbf{Z}_0=1$, $\mathbf{Z}_t\neq\mathbf{0}$ сходится к распределению случайного вектора $W\mathbf{v}$, где вектор $\mathbf{v}$ тот же, что и в (1), $\mathbf{P}\{W\leqslant x\}=1-e^{-Bx}$, $x\geqslant 0$, а B определяется значениями $\mathbf{M}\xi_j^{(i)}\xi_l^{(i)}$ и $\mathbf{M}\xi_j^{(i)}$.

3.4.2. Новые результаты для $(E, h)^k$- и $(M_\lambda, h)^k$-процессов. Слэк [462, 463] доказал (11) для (E, h)-процессов и установил, что условие (10) необходимо и достаточно для существования $\lim \mathbf{M}[\exp\{-sZ_tQ_t\}\,|\,Z_t\neq 0]\neq 1$. В. А. Ватутин [37] и Гольдштейн, Хоппе [262, 264] получили аналоги этих утверждений для $(E, h)^k$- и $(M_\lambda, h)^k$-процессов, заменив (10) условием

$$(\mathbf{v}, \mathbf{1}-\mathbf{h}(\mathbf{1}-y\mathbf{u}))=y-y^{1+\alpha}L(y),\quad 0<\alpha\leqslant 1. \tag{12}$$

Для (E, h)-процессов с $m=1$, $\mathbf{D}\xi>0$, $h(1+\varepsilon)<\infty$, $\varepsilon>0$ С. В. Нагаев, Н. В. Вахрушев [92] указали оценку сверху для $\mathbf{P}\{Z_n\geqslant k\}$, а Г. Д. Макаров [74] при тех же условиях доказал, что соотношения (9) и

$$e^x\mathbf{P}\{2Z_t/bt>x\,|\,Z_t>0\}\to 1,\quad t\to\infty,$$

выполняются равномерно по $x=o(t/\ln\ldots\ln t)$; в [77] Г. Д. Макаров перенес свои результаты на (M_λ, h)-процессы (см. также п. 6.2).

Ней (см. Атрея, Ней [170]) для $(E, h)^k$-процессов и Атрея, Ней [171] для $(M_\lambda, h)^k$-процессов показали, что если $\rho=1$, $\sum\limits_{i,j}\mathbf{M}\,(\xi_j^{(i)})^2<\infty$, $(\mathbf{a}, \mathbf{v})=0$, то

$$\mathbf{P}\{(\mathbf{Z}_t, \mathbf{a})/B_{\mathbf{a}}(\mathbf{Z}_t, \mathbf{u})^{1/2}\leqslant x\,|\,\mathbf{Z}_t\neq\mathbf{0}\}\to\Phi(x),\quad t\to\infty,$$

$$\frac{d}{dx}\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{(\mathbf{Z}_t, \mathbf{a})/t^{1/2}\leqslant x\,|\,\mathbf{Z}_t\neq\mathbf{0}\}=\gamma e^{-\gamma|x|/2}.$$

Карлин, Мак-Грегор [333] установили, что если $h'(1)=1$, $0<h''(1)<\infty$,

$$A(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{h''(1)}\left\{\frac{1}{1-h_n(s)}-\frac{1}{1-h_n(0)}\right\},$$

а $B(A(s))\equiv s$, то $1-B(w)$ — преобразование Лапласа неотрицательной функции. Пури [413] для (M_λ, h)-процессов с $m\geqslant 1$ нашел предельное распределение $\left(Z_t, \int\limits_0^t Z_u du, D_t\right)$ при условиях $Z_t>0$, $t\to\infty$, где D_t — число частиц, исчезнувших на $[0, t]$

3.4.3. $(G, h)^k$-процессы. Используя неравенства (2), Гольдштейн [261] доказал, что для (G, h)-процессов с $m=1$, $\mathbf{M}\xi^2<\infty$, $1-G(t)=o(t^{-2})$, $t\to\infty$, $\sigma^2=\mathbf{D}\xi$, $\mu=\int t\,dG(t)$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-s)+1\right]\cdot\frac{1-\mathbf{M}s^{Z_t}}{1-s}=1,$$

и получил аналог (8). При тех же условиях Пейкс [393] установил, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}\left[\exp\left\{-st^{-2}\int\limits_0^t Z_u du\right\}\middle|\,Z_t>0\right]=Cs^{1/2}\operatorname{cosech}(Cs^{1/2}).$$

Существование $\lim_t t^2\mathbf{P}\{Z_t=k\}$, $k\geqslant 1$, для (G, h)-процессов доказывали Вайнер [489] и Куигг [414, 415]; В. А. Топчий

[126] доказал соотношение (9) с $\gamma=\sigma^2/2\mu$ при решетчатом распределении G и условии $\int t^3 dG(t)<\infty$.

В. А. Ватутин [32] распространил упомянутые в п. 3.4.2 результаты Слэка на (G, h)-процессы, для которых

$$n(1-G(n))/(1-h_n(0))\to 0,\ n\to\infty \tag{13}$$

(см. также Гольдштейн [262]). Гольдштейн, Хоппе [266] показали, что для (G, h)-процесса, удовлетворяющего (10), условия (11) и (13) эквивалентны.

Случаи, когда (13) не выполнено, детально изучил В. А. Ватутин [35, 40, 44]. В [35] доказано, что если выполнено (10), $1-G(t)=t^{-\beta}L_1(t)$ и $n(1-G(n))/(1-h_n(0))\to\infty$, то

$$\mathbf{M}\left[s^{Z_t}\mid Z_t>0\right]\to 1-(1-s)^{1/(1+\alpha)},\quad s\in[0, 1]. \tag{14}$$

А. Л. Якымив [145] нашел предельное распределение вектора $(Z_{c_1 t}, \ldots, Z_{c_n t})$, $0<c_1<\ldots<c_n<1$, при условиях $Z_t>0$, $\beta<1$, $t\to\infty$. Если же $n(1-G(n))/(1-h_n(0))\to c\in(0, \infty)$, то (см. [40]) при $t\to\infty$

$$\mathbf{M}\left[\exp\{-sZ_tQ_t\}\mid Z_t>0\right]\to 1-\rho s(1+s^\alpha)^{-1/\alpha},\quad s\geqslant 0, \tag{15}$$

$$\mathbf{M}\left[s^{Z_t}\mid Z_t>0\right]\to(1-\rho)\left(1-(1-s)^{1/(1+\alpha)}\right),\quad s\in[0, 1], \tag{16}$$

где $\rho=\rho(c)\in(0, 1)$. В [44] показано, что если предел в (13) не существует, то можно выбрать подпоследовательности моментов времени, для которых предельные условные распределения Z_t оказываются различными. Аналоги (11), (14)—(16) для $(G, h)^k$-процессов также получил В. А. Ватутин [38, 41, 42].

При условиях (10) и (13) В. А. Ватутин [43] доказал, что

$$\mathbf{P}\{Z_t=j\}\sim c_j Q_t t^{-\gamma}L_1(t),\quad t\to\infty,\quad c_j\neq 0,$$

где $\gamma\in[0, 1]$ зависит от асимптотики $1-G(t)$, $t\to\infty$.

Вайнер [484] распространил предельную теорему для $(M_\lambda, h)^k$-процессов из п. 3.4.1 на $(G, h)^k$-процессы с $\mathbf{M}(\xi_j^{(i)})^r<\infty$ для всех $r<\infty$. Ней [382] указал метод, позволяющий заменить в последнем условии $r<\infty$ на $r\leqslant 2$, и доказал предельную теорему для $(G, h)^k$-процессов, предполагая дополнительно, что $\max(1-G_j(t))=o(t^{-2})$. Гольдштейн [263] получил для $(G, h)^k$-процессов разложение $\mathbf{M}s^{Z_t}$, аналогичное случаю $(E, h)^k$-процессов.

3.4.4. $(G, h_u)^k$-**процессы.** В. П. Чистяков [138] доказал для (G, h_u)-процессов предельные теоремы в случаях $m<1$, $m>1$, $m=1$; в более поздних работах его результаты были получены при более слабых условиях.

В. М. Шуренков [142] доказал, что для (G, h_u)-процесса и введенного в п. 1.2. функционала X_t отношение X_t/Z_t при условии $Z_t>0$ стремится по распределению к константе, когда $t\to\infty$.

В [141] В. М. Шуренков предложил новую форму предельной теоремы в случае $\rho=1$: для неразложимого $(G, h_u)^k$-процесса с $\sum_{i,j} \mathbf{M}(\xi_j^{(i)})^2 < \infty$ и нерешетчатыми распределениями $G^{(i)}(t)$ при $t \to \infty$ и $x_1, \ldots, x_k > 0$

$$\lim tP\{Z_{tj}/tv_j \geqslant x_j,\ j=1, \ldots, k \mid Z_0=e_i\} = \frac{2u_i}{B} \exp\left\{-\frac{2}{B} \max x_i\right\}.$$

В близкой постановке предельную теорему для $(G, h_u)^1$-процесса доказал В. А. Топчий [123].

3.4.5. N-процессы Дурхэм [237] доказал предельную теорему для N-процессов с $m=1$ и $\mathbf{M}\xi^r<\infty$, $r=1, 2, \ldots$ В. А. Топчий [124] доказал аналог (8) для N-процессов с решетчатым распределением моментов скачков $N(t)$. Холте [295] получил для N-процессов аналог результата Гольдштейна [261] (см. 3.4.3).

Грин [269] показал, что для N-процесса с $m=1$, $\mathbf{D}\xi<\infty$ и функционала X_t (см. п. 1.2) при $t\to\infty$

$$\lim \mathbf{P}\{t^{-1}X_t \leqslant y \mid Z_t>0\} = 1-e^{-cy}, \quad y \geqslant 0.$$

Холте [296] перенес этот результат на $(N)^k$-процессы.

С. М. Сагитов [109] нашел условия на Q_t, необходимые и достаточные для существования невырожденного

$$\lim_t \mathbf{P}\{Z_tQ_t/\mathbf{M}Z_t \leqslant x \mid Z_t>0\},$$

и получил аналог (11).

3.5. Предельные теоремы для надкритических процессов

3.5.1. Интегральные предельные теоремы.

3.5.1. а. *(E, h)- и (M_λ, h)-процессы.* Так как для (E, h)-процесса $\{m^{-n}Z_n\}_{n\geqslant 0}$ — неотрицательный мартингал, то

$$m^{-n}Z_n \to W\ (n\to\infty) \text{ п. н.,} \tag{17}$$

причем при $1<m<\infty$ (см. Кестен, Стигум [340])

$$\mathbf{P}\{W>0\}>0 \Leftrightarrow \mathbf{M}\xi \log \xi < \infty.$$

Оценки скорости сходимости в (17) приводятся в п. 3.5.4, а скорость сходимости функций распределения оценивали Д. Атакузиев, Р. Ибрагимов [6, 58, 62]. Сенета [456] установил, что при $m>1$, $\mathbf{M}\xi\log\xi=\infty$ существует такая функция $L(x)$, м. м. при $x\to 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \mathbf{P}\{Z_n m^{-n} L(m^n) > y\}\, dy \sim L(1/x), \quad x\to\infty.$$

В [448, 457] Сенета показал, что при $1<m<\infty$

$$c_nZ_n \xrightarrow{d} W, \quad \mathbf{P}\{W\neq 0\}=q, \tag{18}$$

где $c_n = k_n^*(u)$, — значение n-й итерации функции $k^*(u)$, $u \in (0, -\log q)$, обратной к $k(s) = -\log \mathbf{M} e^{-s\xi}$ и $\{\mathbf{M}W < \infty, c_n \sim \sim Cm^{-n}\} \Leftrightarrow \mathbf{M}\xi \log \xi < \infty$. Хейди [281] доказал, что в (18) имеет место п. н. сходимость (другим способом это доказал **Грей** [277]), что $c_n/c_{n+1} \to m$ и распределение W непрерывно на $(0, \infty)$. (Свойства плотности W см. п. 3.5.2). Грей [275] показал, **что** для любой последовательности $c_n \downarrow 0$ существует (E, h)-**процесс** с $1 < m \leqslant \infty$, для которого $\mathbf{P}\{c_n Z_n \to \infty\} = 1 - q$, а если $c_n/c_{n+1} \to \to m \in (1, \infty)$, то существует (E, h)-процесс с $h'(1) = m$, для которого $\mathbf{P}\{c_n Z_n < \varepsilon\} \to 1$ при $n \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$.

Для W из (17) и (18) функция $H(u) = -\log \mathbf{M} e^{-uW}$ — единственное (с точностью до линейной замены переменной) решение уравнения $H(mu) = k(H(u))$, $H(\infty) = -\log q$. в классе выпуклых строго возрастающих функций.

Соотношения $\mathbf{M}W^p L(W) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{M}\xi^p L(\xi) < \infty$ (при **нецелом** $p > 1$) и

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} \sim x^{-\alpha} L(x) \Rightarrow \mathbf{P}\{W > x\} \sim x^{-\alpha} L(x)/(m^\alpha - m)$$

(при $\alpha > 1$) доказали Бингхэм, Доней [183] и де Мейер [365].

Многие из приведенных здесь утверждений справедливы и для (M_λ, h)-процессов, см., например, Атрея, Ней [170].

Биггинс, Шанбхаг [182] установили, что $\beta(s) = \mathbf{M} e^{-sW}$ — целая функция без нулей тогда и только тогда, когда $h(s) = = \mathbf{M} s^\xi = s^k e^{Q(s)}$, где $k \geqslant 0$, а $Q(s)$ — целая функция. Отсюда следует, в частности, что распределение W не может быть безгранично делимым, если $\mathbf{P}\{\xi > x\} < e^{-\lambda x \log x}$ при всех $x \geqslant x_0$.

Пейкс [387] отметил, что $m^{-n}(Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n) \xrightarrow{d} Wm/(m-1)$. Пури [413] для (M_λ, h)-процесса с $m > 1$ нашел предельное распределение вектора

$$\left(Z_t, \int_0^t Z_u du, \max\{n : \theta_n \leqslant t\} \right),$$

где θ_n — момент n-го скачка траектории Z_t. Спатару [465, **466**] для (E, h)-процесса с $m > 1$ указал условия, при которых **функции**

$$\Delta_n(s) = |q - \mathbf{M} s^{Z_n}| (h'(q))^n - \lim_{t \to \infty} |q - \mathbf{M} s^{Z_t}| (h'(q))^{-t}$$

удовлетворяют соотношениям $\sum |\Delta_n(s)| < \infty$ и $\Delta_n(s) = o(n^{-1})$.

3.5.1. б. *(G, h)-процессы.* Шух [441] доказал для (G, h)-процессов с $m > 1$ аналог (17):

$$Z_t/(-\log F_t^*(s)) \to W(s) \text{ п. н., } t \to \infty, \; q < s < 1,$$

где $F_t^*(\cdot)$ — функция, обратная к $F_t(s) = \mathbf{M}[s^{Z_t} | Z_0 = 1]$, $W(s)$ удовлетворяет закону больших чисел, имеет непрерывное на $(0, \infty)$ распределение и $\mathbf{P}\{0 < W(s) < \infty\} = 1 - q$. Атрея [161] установил для (G, h)-процессов аналоги соотношений (17) и (18):

если $m>1$, $\mathbf{M}\xi\log\xi<\infty$, $G(t)$ нерешетчата и $Z_0=1$, то $Z_te^{-\alpha t}\xrightarrow{d}W$, $t\to\infty$, причем $\mathbf{M}W=1$, распределение W абсолютно непрерывно на $(0, \infty)$, а функция $\varphi(s)=\mathbf{M}e^{-sW}$ — единственное решение уравнения

$$\varphi(u)=\int_0^\infty h(\varphi(ue^{-\alpha y}))\,dG(y)$$

в классе $\{\varphi:\varphi(0)=q,\ \varphi'(0)=-1,\ \varphi(u)=\mathbf{M}e^{-uX},\ X\geqslant 0\}$. Если же $\mathbf{M}\xi\log\xi=\infty$, то $Z_t/\mathbf{M}Z_t\to 0$ п. н.

Ягерс [312] показал, что $Z_te^{-\alpha t}\to W$ п. н. и в L^2 для (G, h)-процессов с $m>1$, $h''(1)<\infty$. В [165] Атрея установил, что $\mathbf{M}W\log^p W<\infty\Leftrightarrow\mathbf{M}\xi\log^{p+1}\xi<\infty$.

Доней [225] отметил, что если $Z_t/\mathbf{M}Z_t\xrightarrow{d}W$ для (G, h)-процесса с $m>1$ и S_t — общее число частиц, появившихся на $[0, t]$, то $(Z_t/\mathbf{M}Z_t,\ S_t/\mathbf{M}S_t)\xrightarrow{d}(W, W)$.

Горостица [268] для (G, h)-процесса Z_t и вложенного (E, h)-процесса Z_n^* показал, что при $\mathbf{M}\xi\log\xi<\infty$ $(Z_t/\mathbf{M}Z_t,\ Z_n^*/\mathbf{M}Z_n^*)\xrightarrow{d}(W_1, W_2)$ п. н. и

$$\psi(u_1, u_2)\overset{\text{def}}{=}\mathbf{M}\exp\{-(u_1W_1+u_2W_2)\}=$$
$$=\int_0^\infty h(\psi(u_1e^{-\alpha x},\ u_2m^{-1}))\,dG(x).$$

3.5.1. в. *N-процессы*. Для частных случаев N-процессов с $m>1$ теоремы о сходимости $Z_t/\mathbf{M}Z_t$ получили Савитс [438] и Доней [226]. Крамп, Мод [211] доказали, что если в N-процессе

$$h'(1)>1,\quad h''(1)<\infty,\quad \frac{d}{dt}\mathbf{M}N(t)\in L^p,\quad p>1,$$

то $Z_te^{-\alpha t}\to W$ п. н. и в L^2; Мод, Нейр [369] нашли условия, при которых распределение W абсолютно непрерывно на $(0, \infty)$. Каплан [331] указал условия, при которых $Z_te^{-\alpha t}\xrightarrow{d}0$.

Положим $\zeta_k=\int_0^\infty t^ke^{-\alpha t}dN(t)$. Доней [227] установил, что

$$\{Z_t/\mathbf{M}Z_t\xrightarrow{d}W,\ \mathbf{P}\{W=0\}<1\}\Leftrightarrow\mathbf{M}\zeta_0\log\zeta_0<\infty.$$

Гануза, Дурхэм [260] показали, что $Z_t/\mathbf{M}Z_t$ сходится в L^2, если $\mathbf{M}(\zeta_0^2+\zeta_1^2)<\infty$, и сходится п. н., если $\mathbf{M}(\zeta_2+\zeta_0\zeta_1)<\infty$.

Доней [227, 228] (для $\beta\in(0, 1)$ и $\beta\in(1, 2)$) и Бингхэм, Доней [184] (для нецелых $\beta>1$) показали, что

$$\mathbf{M}W^\beta L(W)<\infty\Leftrightarrow\mathbf{M}\zeta_0^\beta L(\zeta_0)<\infty,$$
$$\mathbf{P}\{\zeta_0>x\}\sim x^{-\beta}L(x)\Leftrightarrow\mathbf{P}\{W>x\}\sim cx^{-\beta}L(x).$$

Гани, Саундерс [259] для N-процессов с $G(t)=1-e^{-\lambda t}$, в которых $N(t)$ — пуассоновский процесс, останавливающийся в момент гибели частицы (и для аналогичных процессов с дискретным временем), доказали, что если $Z_t(m)$ — число частиц, породивших к моменту t ровно m потомков, то $Z_t(m)/Z_t \to 2^{-m}$ п. н., $m=1, 2, \ldots$

Доней [229] изучил асимптотику $\mathbf{M}Z_t$ для $(N)^h$-процессов, в которых потомки частицы могут появляться и после ее гибели.

3.5.2. Эмпирическое распределение возраста и его обобщения. Эмпирическое распределение возраста в ветвящемся процессе Z_t в момент t имеет случайную функцию распределения $F_t(x)=Z_t^*(x)/Z_t$, $0\leqslant x<\infty$, где $Z_t^*(x)$ — число частиц в момент t, возраст которых не превосходит x.

Предельное поведение $F_t(x)$ при $t\to\infty$ (для (G, h)-процесса, в котором $h(s)=s^2$, а $G(t)$ — функция гамма-распределения, изучал Санков [432]. Атрея, Каплан [168] показали, что для (G, h)-процесса с $h(0)=0$, $m=h'(1)\in(1, \infty)$ и $\sum jh_j \log j<\infty$ при $n\to\infty$

$$F_t(x)\to\int\limits_0^x e^{-\alpha u}(1-G(u))\,du \Bigg/ \int\limits_0^\infty e^{-\alpha u}(1-G(u))\,du \text{ п. н.}$$

Аналогичные результаты получил Кучек [345]; он же [346] установли, что Z_{t-a}/Z_t, S_{t-a}/S_t, D_{t-a}/D_t сходятся п. н. к $e^{-a\alpha}$, где S_u — общее число частиц, появившихся к моменту u, а D_u — число делений на $[0, u]$.

Предельные теоремы о сходимости п. н. описанного в п. 1.2 функционала $X_t=\sum\limits_x \chi_x(t-\sigma_x)$ в случае N-процессов с $m>1$ при $t\to\infty$ и различных предположениях о процессе $N(t)$ доказывали Ягерс [315], Грин [270], Нерман [380], Нерман, Ягерс [381], а сходимость X_t по распределению для $(G, h)^h$-процессов — Рама [427].

Кучек [346] и Нерман, Ягерс [381] вывели из результатов, относящихся к X_t, что если в N-процессе с $m>1$ случайно выбрать частицу из числа существующих в момент t, то при $t\to\infty$ распределение ее остаточного времени жизни сходится к показательному, последовательность моментов появления ее предков сходится к процессу восстановления, а числа их непосредственных потомков асимптотически независимы. Берндсон, Ягерс [179] обнаружили, что для (G, h)-процесса с $m>1$ условие $\mathbf{M}Z_t=e^{\alpha t}\mathbf{M}Z_0$ однозначно определяет распределение остаточного времени жизни случайно выбранной частицы, которое (при дополнительных условиях) является стационарным.

Пусть x — частица, случайно выбранная из n-го поколения (E, h)-процесса, а $Z_n^{(k)}(j)$ — число частиц $(n-j)$-го поколения, имеющих общего с x предка в $(n-k)$-м поколении. Yo [482] и Иоффе, Y [324] нашли совместное распределение $Z_n^{(k)}(0), \ldots$ $\ldots, Z_n^{(k)}(k+1)$ и показали, что

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{P}\{Z_n^{(k)}(0)=j \mid Z_0=z,\ Z_n\neq 0\}=m^{-k} j \mathrm{P}\{Z_k=j \mid Z_0=1\}.$$

Ягерс [317] для N-процесса изучал зависимость между общим числом потомков, порожденных частицей к моменту достижения ею возраста t, и возрастом ее i-го непосредственного потомка.

3.5.3. Локальные предельные теоремы при $1<m<\infty$. Для (E, h)-процесса с $h_0=0$ и $1<m<\infty$ распределение W в (18) абсолютно непрерывно (см. Атрея [164]; при условии $\mathrm{M}\xi \log \xi<\infty$ — Кестен, Стигум [340]).

Пусть $w^{(i)}(x)=\frac{d}{dx} \mathrm{P}\left\{W^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \lim m^{-n} Z_n \leqslant x \mid Z_0=i\right\}$. Если в (E, h)-процессе $\mathrm{M}\xi \log \xi<\infty$, распределение ξ имеет шаг 1 и $n,\ j=j(n) \to \infty$ так, что $j m^{-n} \to c \in (0, \infty)$, то

$$j \mathrm{P}\{Z_n=j \mid Z_0=i\} \to c w^{(i)}(c)$$

при любом фиксированном i (см. Дюбук [233]; при более жестких условиях — Имаи [308, 309]. Обобщение на случай, когда шаг распределения больше 1, получили Дюбук, Сенета [235].

Атрея, Ней [169] доказали что если $\mathrm{M}\xi^2<\infty$, то при любом $i \geqslant 1$ и любом $\beta_0<\beta=m^{\delta/(3+\delta)},\ \delta=-(\log h'(q))/\log m$, существует такое $c=c(i, \beta_0)$, что

$$\left| m^n \mathrm{P}_n(i, j)-w^{(i)}(m^{-n} j)\right| \leqslant \beta_0^{-n}+c m^n/(j \beta^n)$$

при всех $n \geqslant 1,\ j \geqslant 1$, поэтому

$$\left| \mathrm{P}\{x_1<m^{-n} Z_n \leqslant x_2 \mid Z_0=i\}-\mathrm{P}\{x_1<W^{(i)} \leqslant x_2\}\right|=o(\beta^{-n})$$

при любых $x_1,\ x_2>0$; кроме того, $w^{(i)}(x)>0$ при всех $x>0$, но $\lim w^{(i)}(x)$ при $x \to 0$ может не существовать.

Дюбук [233] и Ямазато [494] указали условия, при которых $c_1 t^{\alpha-1} \leqslant w^{(i)}(t) \leqslant c_2 t^{\alpha-1}$ $(0<t \leqslant 1,\ c_1,\ c_2,\ \alpha>0)$, и привели примеры (E, h)-процессов, для которых $\lim t^{1-\alpha} w^{(i)}(t),\ t \downarrow 0$, не существует. Локальную предельную теорему для (M_λ, h)-процессов сформулировал Р. Ибрагимов [59].

Н. А. Берестова [28] для (M_λ, h)-процесса с $h_i=0,\ i \notin [2, N]$, нашла асимптотику $\mathrm{P}\{Z_t=j\}$ при $t=\mathrm{const},\ j \to \infty$ и доказала существование таких функций $H_t(x)$, что $H_t(x) \to \exp\{\lambda(m-1) \times$ $\times (x-t)\}$ при $t>x \to \infty$ и при любых $\varepsilon>0,\ t<\infty$

$$\mathrm{P}\{\sup_{x<t} \left| j^{-1} Z_x-H_t(x)\right|>\varepsilon \mid Z_t=j\} \to 0,\quad j \to \infty.$$

3.5.4. Предельные теоремы со случайными нормировкой и центрировкой. В (E, h)-процессе условное распределение Z_{n+r} (или $W=\lim m^{-n} Z_n$ при фиксированном значении Z_n совпадает с распределением суммы Z_n независимых случайных величин, распределенных так же, как Z_r (соответственно, как Wm^{-n}). Кроме того, при $m>1$ вся масса распределения Z_n на множестве $\{Z_n>0\}$ уходит в ∞. Это замечание делает понятными следующие результаты, в которых $\sigma^2=\mathbf{D}\xi$, $\sigma_r^2=\mathbf{D}[Z_r|Z_0=1]=\sigma^2m^{r-1}(1+\dots+m^{r-1})$,

$$x_r(n)=\frac{Z_{n+r}-m^rZ_n}{\sigma_rZ_n^{1/2}},\quad y_r(n)=\frac{Z_{n+r}-m^rZ_n}{\sigma m^{r-1}Z_n^{1/2}},$$

$$w(n)=\frac{m^nW-Z_n}{\sigma Z_n^{1/2}}(m^2-m)^{1/2}:$$

а) $\sup|\mathbf{P}\{x_r(n)\leqslant x\mid Z_n>0\}-\Phi(x)|\to 0$, $n\to\infty$; при условиях $\{Z_n>0\}$, $n\to\infty$ величины $\{y_r(n)-y_{r-1}(n)\}_{r=1}^R$ асимптотически нормальны и независимы (Бюлер [192]);

б) оценки скорости сходимости в соотношении из п. а) и в соотношении $\sup\limits_x|\mathbf{P}\{w(n)\leqslant x|Z_n>0\}-\Phi(x)|\to 0$ получали Хейди, Сенета [288], Хейди, Лесли [287], Хейди, Браун [286];

в) если $\mathbf{D}\xi<\infty$, то

$$\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} x_k(n)/(2\log n)^{1/2}=1\}=\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} w(n)/(2\log n)^{1/2}=1\}=1,$$

а соответствующие нижние пределы равны —1 п. н. (Хейди [283], Хейди, Лесли [287]). Свойством в) обладает также последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

Лесли [354] перенес утверждения п. в) на (M_λ, h)-процессы.

Хейди [280] доказал, что если $m>1$, $\mathbf{M}\xi^2<\infty$ и $h(0)=0$, то предельное при $n\to\infty$ распределение случайных величин

$$w^*(n)=m^{n/2}(W-m^{-n}Z_n)$$

совпадает с распределением $\zeta W^{1/2}$, где ζ не зависит от W, $\mathbf{P}\{\zeta\leqslant x\sigma/(m^2-m)^{1/2}\}=\Phi(x)$. Он же [282] нашел предельное распределение $w^*(n)$ в случае, когда распределение ξ принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha\in(1, 2]$

Асмуссен [152] показал, что если $m>1$, $1<p<2$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$, то

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} m^{n/q}(W-m^{-n}Z_n)=0\}=1\Leftrightarrow \mathbf{M}\xi^p<\infty.$$

В [154] Асмуссен получил аналогичные результаты для (G, h)-процессов.

3.5.5. Процессы с несколькими типами частиц. Кестен, Стигум [339] (см. также Атрея, Ней [170]) доказали, что если надкритический $(E, h)^k$-процесс с $\rho>1$ неразложим и апериодичен, то (в обозначениях п. 1.2)

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty}\rho^{-n}\mathbf{Z}_n=W_j\mathbf{v}\mid \mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_j\}=1,\quad j=1,\dots,k, \tag{19}$$

причем все $W_j\equiv 0$, если $\Sigma_{i,j}\mathbf{M}\xi_i^j\log\xi_i^j=\infty$, в противном случае при каждом $j=1, \ldots, k$ распределение W_j имеет положительную плотность на $(0, \infty)$ и $\mathbf{M}W_j = u_j$.

Дейстлер, Фейхтингер [220] использовали для доказательства (19) соотношение $\mathbf{Z}_{n+1} = A\mathbf{Z}_n + \varepsilon_{n+1}$, где $A = \|\mathbf{M}\xi_i^{(j)}\|$, а ε_{n+1} — вектор «случайных ошибок».

Хоппе [300] показал, что даже при $\Sigma_{i,j}\mathbf{M}\xi_i^{(j)} \log \xi_i^{(j)} = \infty$ существуют такая последовательность чисел γ_n, $\gamma_n/\gamma_{n+1} \to \rho$ и такие случайные величины W_j, $j=1, \ldots, k$, что $\mathbf{P}\{W_j = 0\} = q_j$, $\mathbf{P}\{W_j < \infty\} = 1$ и при условии $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_j$

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n \mathbf{Z}_n \stackrel{d}{=} W_j \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} \gamma_n (\mathbf{Z}_n, \mathbf{u}) = W_j \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_j\} = 1.$$

Кестен, Стигум [340] доказали асимптотическую (при $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_j$ и $n \to \infty$) независимость величин W_j и $((\mathbf{Z}_n, \mathbf{u}) - W_j\rho^n)/(\mathbf{Z}_n, \mathbf{u})^{1/2}$ на множестве $\{W_j > 0\}$ и асимптотическую нормальность последней величины; кроме того, они нашли предельное распределение скалярного произведения $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{a})$ при $n \to \infty$ в случае, когда $(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0$. Если $\Sigma_{i,j}\mathbf{M}(\xi_j^{(i)})^2 < \infty$, то вектору $\mathbf{a}$ соответствует собственное значение $\rho_1 = \rho_1(\mathbf{a}, A)$ матрицы $A = \|\mathbf{M}\xi_i^{(j)}\|$ и число $\theta = \theta(\mathbf{a}, A)$, причем если $|\rho_1|^2 \leqslant \rho$, то предельным распределением $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{a}) n^{-\theta} \rho^{-n/2}$ является смесь нормальных распределений с нулевыми средними, а если $|\rho_1|^2 > \rho$, то при некотором $\lambda > 0$ последовательность $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{a}) n^{-\lambda} |\rho_1|^{-n}$ сходится п. н. к невырожденной случайной величине, когда $n \to \infty$. Асмуссен [153] обобщил эти результаты на случай, когда $\Sigma_{i,j}\mathbf{M}(\xi_j^{(i)})^2 < \infty$, и, кроме того, доказал для $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{a})(\mathbf{Z}_n, \mathbf{u})^{-1/2}$ аналог соотношений в) из п. 3.5.4. Аналогичные вопросы рассматривал С. Рахман [104].

Для $(E, h)^2$-процессов эффекты, связанные с переходом квадрата второго собственного числа матрицы первых моментов через перронов корень, обсуждали Мур, Снелл [370].

Атрея [158—160, 162] перенес упомянутые выше результаты Кестена и Стигума на $(M_\lambda, h)^k$-процессы. Р. Ибрагимов [60] для $(E, h)^2$-процессов, И. Рахимов [64] для $(E, h)^k$-процессов, М. М. Маматов, Р. Ибрагимов [79] для $(M_\lambda, h)^k$-процессов с конечными третьими моментами векторов ξ^j указали оценки скорости сходимости распределения $\rho^{n/2}(W - (\mathbf{u}, \rho^{-n}\mathbf{Z}_n))$ к предельному. Локальные предельные теоремы для $(E, h)^2$-процессов получили Ш. К. Форманов, Р. Ибрагимов [129], а для $(M_\lambda, h)^2$-процессов — М. М. Маматов, Р. Ибрагимов [78].

Аналог соотношения (19) для $(G, h)^k$-процессов доказал Каплан [329], а для $(N)^k$-процессов с $\rho > 1$ — Мод [367].

3.5.6. Задачи о моменте первого выхода из области. Для определенной по (E, h)-процессу Z_n с $Z_0 = 1$, $\mathbf{M}\xi = m > 1$ случайной величины $\tau(x) = \max\{n : Z_1, Z_2, \ldots, Z_n < x\}$ А. В. Нагаев [86] (при $\mathbf{M}\xi^2 < \infty$), А. В. Нагаев, И. С. Бадалбаев [88] (при $\mathbf{M}\xi \log \xi < \infty$) показали, что

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{k=0,\pm1,\ldots}|\mathbf{P}\{\tau(m^x)=[x]+k\}-$$
$$-\mathbf{P}\{m^{\{x\}-k-1}<W<m^{\{x\}-k}\}|=0, \qquad (20)$$

где W — предельная случайная величина из (17), $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная доли x. И. С. Бадалбаев [11] нашел предельное совместное распределение $\tau(x)$, $x-Z_{\tau(x)}$, $Z_{\tau(x)+1}-x$ при $x\to\infty$. Аналог (20) для (M_λ, h)-процессов также получен И. С. Бадалбаевым [9]. В работах И. С. Бадалбаева, Р. Ибрагимова [12, 15, 63] аналогичные результаты получены для момента первого выхода $(E, h)^2$-процесса из прямоугольных, круговых или треугольных областей. Ответ при этом зависит не от вида области, а лишь от точки пересечения ее границы с лучом, содержащим вектор v.

3.5.7. Надкритические ветвящиеся процессы с $m=\mathbf{M}\xi=\infty$. Первую предельную теорему для (E, h)-процесса с $m=\infty$ получил Дарлинг [216]: если $g(1-h(1-s))=s$ и $g'(x)=ax^{b-1}(1+O(x^\delta))$ при $x\downarrow 0$, $a>0$, $b>1$, $\delta>0$, то

$$b^{-n}\log(1+Z_n)\xrightarrow{d}W,\quad n\to\infty,\quad \text{и}\quad \mathbf{P}\{W\leqslant x\}\uparrow 1,\ x\uparrow\infty. \qquad (21)$$

Дэвис [217] показал, что в (21) имеет место сходимость п. н. и $\mathbf{P}\{W>x\}=e^{-x+o(1)}$, $x\to\infty$, если при $x\geqslant x_0$

$$x^{-b-\gamma(x)}\leqslant\mathbf{P}\{\xi>x\}\leqslant x^{-b+\gamma(x)},\quad \text{а}\quad \int_0^\infty\gamma(\exp(e^x))\,dx<\infty.$$

Результат Дарлинга последовательно обобщали Сенета [455, 456] и Хадсон, Сенета [307]. В последней работе показано, что если $L(t)\uparrow\infty$, $t\uparrow\infty$, — м. м. функция, $\omega(L(t))\equiv t$, а функция

$$\varphi(t)=L([1-h(1-1/\omega(t))]^{-1})\sim ct,\quad t\to\infty,\ c\in(0, 1),$$

выпукла или вогнута на $(0,\infty)$, то существует такая функция $\Delta(t)=tL_1(t)$, что $L(1+Z_n)/\Delta(c^{-n})$ сходится п. н. к случайной величине W, причем $\mathbf{P}\{W>x\}=1/\omega(\Delta(x))$.

Пусть $h(1-g(y))=1-y$, $0<y<1-q$, и $g_n(y)$ — n-я итерация $g(y)$. Кон [200], Грей [274] доказали, что если существуют числа $\{c_n\}$ и медленно меняющаяся функция $L(y)\uparrow\infty$, $y\downarrow 0$, для которых $\lim c_nL(g_n(y))=v(y)$ — непрерывная неубывающая функция, то

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}c_nL(Z_n^{-1})=W\,|\,Z_0=1\right\}=1,\quad \lim c_{n+1}/c_n=\alpha\in(0,\infty),$$

где $\mathbf{P}\{W=0\}=q$, $\mathbf{P}\{W<\infty\}=1$. Аналогичный результат получен и для (M_λ, h)-процессов. Кон, Пейкс [203] показали, что $W\overset{d}{=}\alpha^{-n}\max\{W_1,\ldots,W_{Z_n}\}$, где W_i независимы и $W\overset{d}{=}W_i$, и указали условия, при которых предельное распределение случайной величины $R_n=\alpha^{-n}W-L(Z_n^{-1})$ является дважды экспоненциальным.

Шух, Барбур [442] назвали (E, h)-процесс с $m=\infty$ правильным (regular), если из существования п. н. $\lim c_n Z_n$ следует, что

$$\mathbf{P}\{\lim c_n Z_n=0\}+\mathbf{P}\{\lim c_n Z_n=\infty\}=1$$

и неправильным (irregular) — в противном случае. Указаны условия правильности процесса и условия сходимости п. н. $c_n L(Z_n)$. Построены примеры неправильных (E, h)-процессов, для которых распределение $\lim c_n Z_n$ на $(0, \infty)$: а) абсолютно непрерывно, б) имеет атомы, в) непрерывно, но не абсолютно непрерывно, г) приписывает нулевую меру некоторым интервалам. Кон, Шух [204] показали, что для любого (E, h)-процесса с $m=\infty$ существует такая функция $U(t)$, что

$$\mathbf{P}\{\lim_n e^{-n} U(Z_n)=W\}=1, \quad \mathbf{P}\{W=0\}=q,$$

а распределение W на $(0, \infty)$ непрерывно. (Зависимость вида $U(t)$ от $h(s)$ изучали Барбур, Шух [175]).

Тот же термин «правильный» (regular) использовал Грей [276] для обозначения такого (E, h)-процесса Z_n, что если Z_n и $Z_n{}^*$ — две его независимые реализации, то

$$\mathbf{P}\{\lim Z_n{}^*/Z_n=0\}+\mathbf{P}\{\lim Z_n{}^*/Z_n=\infty\}=1.$$

Процесс обладает этим свойством, если распределение Z_1 (при $Z_0=1$) принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (0, 1)$. Доказано, что для правильных по Грею процессов случайные величины

$$U(\{Z_n\}_{n=0}^{\infty})=\mathbf{P}\{\lim Z_n{}^*/Z_n=0 \mid Z_0{}^*=1, \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}\}$$

равномерно распределены на $[0, 1]$ и что при любом $\beta>1$ существует возрастающая функция $\Psi_\beta:(0, 1) \to (0, \infty)$, для которой

$$\mathbf{P}\{\lim \beta^{-n} \Psi_\beta(1-(1/Z_n))=\Psi_\beta(U(\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}))\}=1.$$

3.6. Предельные теоремы для разложимых ветвящихся процессов. Для разложимых процессов асимптотика вероятности невырождения и предельные распределения числа частиц имеют вид, отличающийся от неразложимого случая. Чтобы упростить формулы, приведем лишь их простейшие варианты.

3.6.1. Надкритические процессы. Кестен, Стигум [341] изучали $(E, h)^k$-процессы с разложимой матрицей $A=\|\mathbf{M}\xi_j^{(i)}\|$. Из их результатов следует, в частности, что для $(E, h)^2$-процесса с $A=\begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 \\ r & \rho_2 \end{Vmatrix}$, $r>0$, $\rho_1, \rho_2>1$, существует такая случайная величина W, что при $\mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_2$ с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \rho^{-n} Z_n=\begin{cases} W\mathbf{e}_1, & \text{если } \rho=\rho_1>\rho_2, \\ W(r/(\rho-\rho_1), 1), & \text{если } \rho=\rho_2>\rho_1, \end{cases}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^{-n}(Z_{n1}/n, Z_{n2})=W(r/\rho, 1)$ при $\rho=\rho_1=\rho_2$. Нейр, Мод [373] получили аналогичные результаты для $(G, h)^k$-процессов.

Крамп [206] показал, что для разложимых $(G, h)^k$-процессов $\mathbf{M}Z_{ti} \sim c_i t^{r_i} e^{a_i t}$ при некоторых c_i, $a_i > 0$ и целых $r_i \geqslant 0$. Филдс [251] установил, что если в этом случае $\rho > 1$, то $Z_{ti}/\mathbf{M}Z_{ti}$ при $t \to \infty$ сходится в L^2 к случайной величине W_i.

Ягерс [313] для разложимых $(G, h_u)^2$-процессов нашел условия невырождения, асимптотики первых двух моментов, а при $\alpha > 0$ доказал теоремы о сходимости $e^{-\alpha t} Z_t$ п. н. и в L^2 и указал условия, при которых Z_{t1}/Z_{t2} сходится п. н. к константе.

3.6.2. Критические процессы. А. А. Савин, В. П. Чистяков [105] для $(M_\lambda, h)^k$-процессов, Фостер, Ней [255] для $(E, h)^k$-процессов с $\max \mathbf{M}\xi_i^{(i)} = 1$, $0 < \mathbf{D}\xi_i^{(i)} < \infty$, $\mathbf{M}\xi_j^{(i)} = 0$ $(j > i)$, $\max \mathbf{M}\xi_j^{(i)} < \infty$ показали, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{Z}_t \neq 0 \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_k\} \sim ct^{-\beta},$$

где $c > 0$, $\beta = 2^{1-p}$, p — число таких $i = 1, \ldots, k$, что $\mathbf{M}\xi_i^{(i)} = 1$. Аналог этого соотношения для разложимых $(G, h_u)^k$-процессов получил В. А. Ватутин [39]. А. К. Полин [93] установил, что если при тех же условиях для $(M_\lambda, h)^k$-процесса $\mathbf{M}\xi_{i_1}^{(i_1)} = 1$, $\mathbf{M}\xi_i^{(i)} < 1$, $i < i_1$, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\left[\exp\left\{-\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{i_1} c_i s_i Z_{ti}\right\} \middle| \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_k,\ \mathbf{Z}_t \neq 0\right] =$$
$$= 1 - (1 + (s_1 + \ldots + s_{i_1})^{-1})^{-\beta}.$$

Аналогичные предельные теоремы для произвольных разложимых $(E, h)^k$-процессов с $\rho = 1$ без финальных типов доказал Огура [385]. Из работ Фостера, Нея [255, 256] следует, что если для $(E, h)^k$-процесса выполнены указанные в начале этого пункта условия и $\mathbf{M}\xi_i^{(i)} = 1$, $i = 1, \ldots, k$, то при любом $i_1 \in \{1, \ldots, k\}$ распределение вектора $(n^{-1} Z_{n, i_1}, n^{-2} Z_{n, i_1 - 1}, \ldots, n^{-i_1} Z_{n,1})$ при условиях $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_k$, $Z_{n i_1} \neq 0$, $n \to \infty$ сходится к распределению вектора $(W_{i_1}, \ldots, W_1)$ с зависимыми компонентами.

Обобщая результаты В. П. Чистякова [135], А. К. Полин [94] и Сугитани [470] доказали предельные теоремы для разложимых $(M_\lambda, h)^k$- и $(E, h)^k$-процессов с $\rho = 1$ и с финальными типами.

А. М. Зубков [56] для $(E, h)^2$-процессов с

$$h^{(1)}(s_1, s_2) = s_1 + (1 - s_1)^{1+\alpha_1} L(1 - s_1),$$
$$h^{(2)}(s_1, s_2) = s_2 + (1 - s_2)^{1+\alpha_2} L_2(1 - s_2) - A_{21}(1 - s_1) + \varepsilon(s_1, s_2),$$

где $0 < \alpha_1$, $\alpha_2 \leqslant 1$, $\varepsilon(s_1, s_2) = o(1 - s_1)$ при s_1, $s_2 \uparrow 1$, нашел асимптотики $\mathbf{P}\{\mathbf{Z}_n \neq 0 \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_2\}$ и доказал предельные теоремы для $\mathbf{Z}_n$ в случаях, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\mathbf{P}\{Z_{n1} > 0 \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_1\}}{\mathbf{P}\{Z_{n2} > 0 \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_2\}} \text{ равен } 0 \text{ или } \infty.$$

§ 4. ДРУГИЕ ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

В §§ 2, 3 ветвящиеся процессы рассматривались фактически как случайные процессы с пространством состояний $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ или $\mathbf{Z}_+^k$. В этом параграфе описываются свойства, отражающие специфическую структуру ветвящихся процессов.

4.1. Характеристики процессов, связанные с их генеалогическими деревьями

4.1.1. Распределение по поколениям. Пусть $Z_t(n)$ — число частиц n-го поколения, существующих в момент t, $Z_t(0, x) = Z_t(0) + \ldots + Z_t([x])$. Б. П. Харламов [131] установил, что для (M_λ, h)-процесса с $m > 1$ при $t \to \infty$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{M}Z_t(n)/\mathbf{M}Z_t \sim (mt/\lambda)^n e^{-mt/\lambda}/n!,$$

$$\mathbf{P}\{|Z_t(0, mt/\lambda + x\sqrt{t/\lambda}) - \Phi(x)| > \varepsilon \mid Z_t > 0\} \to 0. \qquad (22)$$

Локальные аналоги (22) получили: Самуэльс [431] — для (G, h)-процессов и Ягерс [316] — для N-процессов. В [431] показано также, что если $Z_n^*[0, t]$ — число частиц n-го поколения вложенного (E, h)-процесса Z_n^*, появившихся на $[0, t]$, то $m^{-n}Z_n^*[0, an + x\sigma\sqrt{n}] \to \Phi(x)W$ п. н. и в L^2 при $n \to \infty$, где $W = \lim m^{-n}Z_n^*$.

Бюлер [193, 195] для модификации (M_λ, h)-процесса с $m > 1$, в которой каждая частица, породив потомков, с вероятностью α остается жить вечно, доказал аналог (22) (в [194] Бюлер получил обобщение на (G, h)-процессы). Иоффе, Монкайо [322] доказали аналог (22) для величин более общего вида, чем $Z_t(0, x)$.

Пусть $\theta_n^{(j)}$ — момент появления j-й частицы n-го поколения вложенного (E, h)-процесса Z_n^*. Бюлер [195] отметил, что для (G, h)-процесса $\mathbf{P}\{\theta_n^{(1)} \leqslant t\}$ при $t \downarrow 0$ монотонно убывает как t^n, если $m > 1$, $G(+0) = 0$, $0 < G'(0) < \infty$, а в [194] нашел асимптотику $\mathbf{P}\{\theta_n^{(1)} \geqslant t\}$ и $\mathbf{P}\left\{\theta_n^{(Z_n^*)} \geqslant t\right\}$ при $t \to \infty$. Кингман [344] и Биггинс [181] для N-процессов с $m > 1$ доказали, что $n^{-1}\theta_n^{(1)}$ и $n^{-1}\theta_n^{(Z_n^*)}$ при $n \to \infty$ сходятся п. н. к неслучайным пределам; Дюрре [240] для (G, h)-процессов с $m = 1$ установил, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|n^{-1}\theta_n^{(j)} - \mu| > \varepsilon \mid \theta_n^{(j)} < \infty\} \to 0, \quad n \to \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant Z_n^*.$$

Эдлер [242] изучал аналогичные $\theta_n^{(j)}$ величины для неразложимых $(M_\lambda, h)^k$-процессов. Более детально свойства величин типа $\theta_n^{(j)}$ изучаются в связи с ветвящимися случайными блужданиями.

4.1.2. Редуцированные процессы. Число частиц $Z_{(T)t}$ редуцированного процесса в момент $t\leqslant T$, построенного по ветвящемуся процессу Z_u, совпадает с числом тех частиц исходного процесса, которые существуют в момент t и потомство которых не выродилось к моменту T. Величина $\tau(T)=\sup\{t\in[0,T]:\ Z_{(T)t}=1\}$ — это момент деления ближайшего общего предка всех Z_T частиц, существующих в момент T.

Фляйшманн, Прен [252] установили, что для неразложимых $(E,h)^k$-процессов с $\rho<1$ распределение $T-\tau(T)$ при $T\to\infty$ и условии $Z_T\neq 0$ сходится к предельному (и, см. Прен [412], для (E,h)-процесса

$$\lim_T\mathbf{M}\,[T-\tau(T)\,|\,Z_T>0]<\infty\Leftrightarrow\mathbf{M}\xi\log\xi<\infty.)$$

А. М. Зубков [55] показал, кроме того, что для $(E,h)^k$- и $(M_\lambda,h)^k$-процессов с $\rho>1$ величина $\tau(T)\to\tau<\infty$, $T\to\infty$, п. н. на множестве $\{\lim_t Z_t>0\}$, и что при $\rho=1$ и $\Sigma_{i,j}\mathbf{M}\,(\xi_j^{(i)})^2<\infty$ (а также для (E,h)-процессов и (M_λ,h)-процессов с $m=1$ и $h(s)=s+(1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, $0<\alpha\leqslant 1$)

$$\mathbf{P}\{T^{-1}\tau(T)\leqslant x\,|\,Z_T\neq 0\}\to x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{23}$$

Фляйшман, Зигмунд-Шульце [253] для (E,h)-процесса с $m=1$ доказали, что процессы $Z_{(T)T-x}/Z_T$ при $T\to\infty$, $Z_T>0$ сходятся к детерминированной функции $\eta(x)$, а процессы $T^{-1}Z_{(T)uT}$, $0\leqslant u\leqslant 1$, — к неоднородному процессу чистого размножения с интенсивностью деления частиц в момент u, равной $(1-u)^{-1}$.

В. А. Ватутин [37] распространил (23) на $(E,h)^k$- и $(M_\lambda,h)^k$-процессы, удовлетворяющие условию (12), а в [39] — на (G,h)-процессы при условиях (13) и $m=1$. С. М. Сагитов [107] для $(G,h)^k$-процессов нашел предельные конечномерные распределения процесса $Z_{(T)uT}$, $0\leqslant u\leqslant 1$, при $T\to\infty$ и $\lim_T\mathbf{P}\{\inf\{u:Z_{(T)uT}>k\}\leqslant x\}$. А. Л. Якымив в [143] изучал свойства $Z_{(T)uT}$ для неразложимых $(M_\lambda,h)^k$-процессов с $\rho\neq 1$, а в [144] — при условии (12).

Аналог утверждения о п. н. сходимости $\tau(T)\to\tau$ при $T\to\infty$ получил О'Брайн [384]: если $\{x_n\}$ — последовательность частиц (E,h)-процесса с $m>1$, в которой x_{n+1} — непосредственный потомок x_n, то доля частиц, являющихся потомками x_n, стремится к 0 при $n\to\infty$.

В нескольких работах изучались предельные свойства момента D_t деления ближайшего общего предка двух частиц, случайно выбранных из Z_t частиц, существующих в момент $t\to\infty$. Бюлер [193—195] доказал асимптотическую нормальность числа ребер на генеалогическом дереве (M_λ,h)-процесса с $m>1$, соединяющих две такие частицы. Иоффе [321] показал, что предельное распределение D_t для (E,h)-процесса с $m>1$ — собственное. Дюрре [240] для (M_λ,h)-процесса с $m=1$, $h''(1)<\infty$ установил, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{D_t > rt \mid Z_t > 0\} = (1-r)\left(1+2\sum_{j=1}^{\infty}(j+2)r^j\right), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

кроме того, в [240] найдены $\lim_T \mathbf{P}\{Z_{(T)u_1T} = j \mid Z_{(T)u_0T} = i\}$.

4.1.3. Условные распределения в (E, h)-процессах при заданном общем числе частиц. Пусть для (E, h)-процесса $S_\infty = Z_0 + Z_1 + \ldots$ при $Z_0 = 1$. Кеннеди [338] установил, что если уравнение $h(\alpha) = \alpha h'(\alpha)$ имеет решение $\alpha > 0$ и $\beta = \alpha h''(\alpha)/2h'(\alpha)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{Z_n \leqslant \beta n x \mid S_\infty = N\} = 1 - (1+x)e^{-x}, \tag{24}$$

и нашел $\lim_N \mathbf{P}\{Z_{[\sqrt{Nt}]} \leqslant \beta x \sqrt{Nt} \mid S_\infty = N\}$. В. Ф. Колчин [68—69] показал, что в (24) последовательные предельные переходы можно заменить условием n, $n^{-2}N \to \infty$, а в [67] В. Ф. Колчин доказал, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{(\beta N)^{1/2} \min\{n: Z_n = 0\} \leqslant x \mid S_\infty = N\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1-k^2x^2)e^{-k^2x^2}.$$

В работе В. Ф. Колчина [66] доказана локальная асимптотическая нормальность распределения числа частиц, имевших ровно r непосредственных потомков, при условии $S_\infty = N \to \infty$. Исследованию предельных распределений ряда характеристик ветвящегося процесса при условии $S_\infty = N \to \infty$ посвящена гл. 2 монографии В. Ф. Колчина [69].

4.2. Еще несколько свойств траекторий ветвящихся процессов. Дуосс [241], О. В. Висков [45], Бойд [185] показали, что для (E, h)-процесса

$$\mathbf{P}\{Z_0 + Z_1 + \ldots = j \mid Z_0 = i\} = i j^{-1} \mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_j = j - i\},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathbf{M}s^{\xi_i} = h(s)$. Связь распределения $Z_0 + Z_1 + \ldots$ в $(E, h)^k$-процессе с многомерным распределением Лагранжа отметил Гуд [267].

Линдвалл [357], Нерман [379] установили, что для (E, h)-процессов

$$\lim_{N\to\infty} N\mathbf{P}\left\{\max_{n\geqslant 0} Z_n \geqslant N \mid Z_0 = r\right\} = r, \text{ если } m = h'(1) = 1,\ h''(1) < \infty,$$

и что последовательность $Na^N \mathbf{P}\{\max Z_n \geqslant N \mid Z_0 = r,\ \lim Z_n = 0\}$, $N = 1, 2, \ldots$, отделена от 0 и ∞, если $m > 1$ и $a = 1/q$, или если $m < 1$ и $a > 1$ — корень уравнения $h(s) = s$.

Эсти [247] доказал, что построенная по (E, h)-процессу Z_n цепь Маркова X_n:

$$\mathbf{P}\{X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k \mid X_0 = i_0\} = \\ = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_{n-1} = i_1, \ldots, Z_{n-k} = i_k \mid Z_n = i_0\}$$

положительно возвратна при $m=h'(1)\neq 1$ и $\mathbf{M}\xi\log\xi<\infty$; при $m=1$ цепь X_n невозвратна, а если, кроме того, $h''(1)<\infty$, то распределение $n^{-1}X_n$ при $n\to\infty$ сходится к гамма-распределению. Накагава [376] перенес эти утверждения на $(E, h)^k$-процессы.

Халили-Франсон [343] отметила, что для (E, h)-процесса с $m\leqslant 1$ значения $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{P}\{Z_n=k\,|\,Z_m>0\}$ совпадают с распределением $((E, h)+I)$-процесса при $\mathbf{M}s^{\eta}=m^{-1}h'(s)$.

Для (E, h)-процесса Z_n с $m=1$ Халили [342] описала свойства предельного условного распределения вектора

$$(Z_{n_1}/n_1, \ldots, Z_{n_k}/n_k) \text{ при } n_1\leqslant\ldots\leqslant n_k\to\infty,\ Z_{n_k}>0.$$

§ 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ИММИГРАЦИЕЙ

5.1. $((E, h)+I)$- и $((M_\lambda, h)+I)$-процессы. Всюду в этом параграфе $g(s)=\mathbf{M}s^{\eta}$ обозначает производящую функцию распределения числа η одновременно иммигрирующих частиц. Если не оговорено противное, то в $((E, h)+I)$-процессах иммиграция происходит в каждый момент времени $n=0, 1, 2, \ldots$, в $((M_\lambda, h)+I)$-процессах моменты иммиграции образуют пуассоновский поток с параметром π.

5.1.1. Докритические процессы. Фостер, Вильямсон [257] показали, что для $((S, h)+I)$-процесса Y_n с $m=h'(1)\leqslant 1$ предельное распределение Y_n $(n\to\infty)$ собственное тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 (1-g(u))(h(u)-u)^{-1}\,du<\infty.$$

При $m<1$ эквивалентным условием является $\mathbf{M}\log\eta<\infty$. Условия возвратности $((E, h)+I)$-процесса указал Пейкс [398]. Скорость сходимости $\mathbf{P}\{Y_n=j\,|\,Y_0=i\}\to p_j$ для случаев, когда $\mathbf{M}\eta<\infty$ или $g(s)=1-(1-s)^{\alpha}L(1-s)$, $\alpha\in(0, 1]$, изучал Пейкс в [386, 388]. В [403] Пейкс рассмотрел частные случаи $((E, h)+I)$-процессов, в которых $\mathbf{M}\log\eta=\infty$: например, если $\frac{d}{dx}\ln\Lambda(e^x)=1-g(1-e^{-x})=o(x^{-1})$, $x\to\infty$, то $\Lambda(Y_n)/\Lambda(m^{-n})\xrightarrow{d}V$ и $\mathbf{P}\{V\leqslant x\}=x^{-1/\log m}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

Оукс [383] исследовал свойства последовательности скачков стационарного $((M_\lambda, h)+I)$-процесса с $m<1$.

Квайн [416] указал достаточные (а Каплан [326] — необходимые и достаточные) условия существования предельного стационарного распределения $((E, h)+I)^k$-процесса. (См. также работу К. В. Митова [80], п. 5.1.2).

5.1.2. Критические процессы. Условия существования собственного предельного распределения указывали Сенета

[446], Фостер, Вильямсон [257], Каплан [326] (см. п. 5.1.1). Сенета [453], Ш. К. Форманов, Р. Ибрагимов [128] доказали, что для $((E, h)+I)$-процесса с $m=1$, $0<\mathbf{D}\xi=b<\infty$, $\mathbf{M}\eta<\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{2Y_n/nb \leqslant x\} = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^x u^{\theta-1} e^{-u} du, \quad \theta = 2\mathbf{M}\eta/b; \tag{25}$$

для $((M_\lambda, h)+I)$-процесса $\theta=2\lambda\mathbf{M}\eta/b$.

Г. Д. Макаров [76] для $((E, h)+I)$-процесса указал условия, при которых

$$\mathbf{P}\{Y_n=j\} \sim x^\theta e^{-x}/(j\Gamma(\theta)) \quad \text{при} \quad n\to\infty, \quad x=2j/bn=o(n/\ln n),$$

а Меллайн [363] для $((E, h)+I)$-процесса с $m=1$, $\mathbf{M}\xi^2 \log\xi<\infty$, $\mathbf{M}\eta\log\eta<\infty$ нашел асимптотики $\mathbf{P}\{Y_n=j \mid Y_0=i\}$ при $i=\mathrm{const}$, $j, n\to\infty$, $\sup j/n<\infty$ и при $i, j, n\to\infty$, $\sup(i+j)/n<\infty$. При тех же условиях на ξ и η существование $\lim n^\theta \mathbf{M}\left[s^{Y_n} \mid Y_0=i\right]=u_i(s)\neq\mathrm{const}$ доказал Пейкс [394]. Пейкс [391] и А. М. Зубков [54] указали условия возвратности $((E, h)+I)$- и $((M_\lambda, h)+I)$-процессов. В частности, при $\theta>1$ процесс невозвратен, при $0<\theta<1$ нуль-возвратен. А. М. Зубков [54] нашел также асимптотику

$$\mathbf{P}\{\inf\{x>0: Y_x=0\} \mid Y_{0-}=0<Y_{0+}\} \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

В. А. Ватутин [36] показал, что для $((E, h)+I)$- и $((M_\lambda, h)+I)$ процессов с $m=1$, $0<\mathbf{D}\xi=b<\infty$ при $\theta\leqslant 1$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{2Y_t/bt \leqslant x \mid Y_{0-}=0, \inf_{0<x\leqslant t} Y_x>0\right\} = 1-e^{-x}, \tag{26}$$

а при $\theta>1$ этот предел совпадает с правой частью (25). К. В. Митов [80] и Сенета, Товаре [459] показали, что при $m<1$ и $m>1$ рассмотрение предельных распределений Y_t при том же условии, что в (26), имеет качественно тот же вид, что и без этого условия.

Пейкс [398, 402, 403] для $((E, h)+I)$- и $((M_\lambda, h)+I)$-процессов с $h(s)=s+(1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, $0<\alpha\leqslant 1$, нашел условия возвратности Y_t, доказал серию предельных теорем как для линейных, так и для нелинейных функций от Y_t.

Для $((M_\lambda, h)+I)^k$-процессов при условии (12) из п. 3.4.2. С. М. Сагитов [106] указал нормирующие функции $p(t)$, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{M}\exp\{-\mathbf{s}, \mathbf{Y}_t) p(t)\}$ имеет вид

$$(1+c\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{s}))^{-1/c\alpha} \quad \text{или} \quad \exp\{-(\mathbf{v}, \mathbf{s})^\beta\},$$

и нашел условия, обеспечивающие существование собственного предельного распределения $\mathbf{Y}_t$. Он же [110] указал необходимые и достаточные условия слабой сходимости распределения $\mathbf{Y}_t$ (с нормировкой или без нее).

5.1.3. Надкритические процессы. Если $1<m<\infty$, то $\mathbf{P}\{\lim m^{-n}Y_n=W^*\}=1$. Сенета [451, 452] показал, что для $((E, h)+I)$-процесса Y_n с $m>1$ и чисел c_n, определенных так же, как в формуле (18) из п. 3.5.1,

$$\mathbf{P}\{\lim c_n Y_n=V\}=1,\ \mathbf{P}\{V=0\}=0, \tag{27}$$

причем (см. Пейкс [396]) распределение V абсолютно непрерывно на $(0, \infty)$, если $\mathbf{M}\log\eta<\infty$, и $\mathbf{P}\{V=\infty\}=1$ при $\mathbf{M}\log\eta=\infty$. Кон [201] установил, что условие $\mathbf{M}\log\eta<\infty$ необходимо и достаточно для существования такой последовательности $\{c_n\}$, что в (27) $\mathbf{P}\{V<\infty\}=1$. Условия сходимости c_tY_t в L^2 для $((M_\lambda, h)+I)$-процессов указал И. Рахимов [96].

Пейкс [401] показал, что если $(1-g(s))\log(1-s)\to 0$, $s\uparrow 1$ (в этом случае $\mathbf{M}\log\eta=\infty$), то существуют такие функция $r(x)$ и последовательности $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, что $c_n/c_{n+1}\to\alpha\in(1, \infty)$,

$$\mathbf{P}\{\lim r(c_nY_n)\,d_n=V\}=1, \quad \mathbf{P}\{V\leqslant x\}=x^{1/\log\alpha}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Барбур, Пейкс [174] для $((E, h)+I)$-процессов с $m=\infty$ указали нелинейные функции от Y_t, которые сходятся п. н. или по распределению (в зависимости от свойств функций h и g).

См. также Сенета, Таваре [459] в п. 5.1.2.

5.1.4. Процессы с иммиграцией, зависящей от состояния. Фостер [254] для $((E, h)+I)$-процесса, в котором иммиграция происходит только в такие моменты n, что $Y_{n-1}=0$, показал, что при $m=1$, $h''(1)<\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{(\log Y_n)/\log n\leqslant x\}=x, \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{28}$$

Пейкс [398] получил (28) при $h(s)=s+(1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, $0<\alpha\leqslant 1$, а в [390] Пейкс доказал предельные теоремы при $m<1$ и $m>1$, изучил свойства стационарных мер при $m\leqslant 1$ и показал, что если $m=h'(1)=1$ и ν_n — число таких $k\leqslant n$, что $Y_k=0$, то $n^{-1}\nu_n\ln n\to h''(1)$ п. н. Ямазато [493] получил аналогичные результаты для $((M_\lambda, h)+I)$-процессов, а К. В. Митов [81] — для $((E, h)+I)$- и $((G, h)+I)$-процессов.

Накагава, Сато [377] и Сато [433] рассматривали $((E, h)+I)$-процессы, в которых иммиграция происходит лишь в такие моменты, когда $Y_n\leqslant i_0$, а распределение числа частиц, иммигрирующих в момент n, может зависеть от значения Y_n. Указаны необходимые и достаточные условия положительной возвратности Y_n, изучены свойства стационарных мер, в случае $m>1$ доказана предельная теорема.

5.1.5. Процессы, в которых иммиграция управляется цепью Маркова. В. П. Чистяков [134] доказал предельные теоремы для $((M_\lambda, h)+I)$-процессов, в которых распределение числа η_t частиц, иммигрирующих в момент t, определяется состоянием в момент t не зависящей от ветвящегося процесса конечной цепи Маркова, А. К. Полин

[95] получил аналогичные результаты для $((M_\lambda, h)+I)^k$-процессов.

5.1.6. Неоднородная по времени иммиграция. Рейнольдс [428] исследовал поведение $\operatorname{cov}(Y_{n_1}, Y_{n_2})$ при условии, что $Y_{n_3}=N$, $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$.

Фостер, Вильямсон [257] показали, что если в $((E, h)+I)$-процессе $h'(1)=1$, $h''(1)<\infty$, числа $\eta_0, \eta_1, \ldots$ частиц, иммигрирующих в моменты $n=0, 1, \ldots$, независимы,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\exp\{-un^{-1}(\eta_0+\ldots+\eta_n)\}\right]=\exp\left\{-\int_0^\infty (1-e^{-ux})\, x^{-1}P(dx)\right\},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\exp\{-uY_n/n\}\right]=\exp\left\{-\int_0^\infty (1-e^{-ux})\, x^{-1}Q(dx)\right\}, \tag{29}$$

где Q — свертка меры P и показательного распределения. И. Рахимов [98] получил аналогичные результаты для $((M_\lambda, h)+I)$-процесса.

И. С. Бадалбаев, И. Рахимов [24] для $((M_\lambda, h)+I)$-процесса с $h'(1)=1$, $h''(1)<\infty$ и неординарным пуассоновским потоком иммигрирующих частиц с интенсивностью $c(t)\to 0$, $t\to\infty$, показали, что $\mathbf{P}\{Y_t=0\}\to e^{-2c/b}$, если $\lim c(t)\ln t=c\in[0, \infty]$, и что при $t\to\infty$ и любом $x\in[0, 1]$

$$\mathbf{P}\{(2Y_t/bt)^{2c(t)/b}<x\}\to x, \text{ если } c(t)\sim L(t)/\ln t, \tag{30}$$

$$\mathbf{P}\left\{\left(Y_t^{2c(t)/b}-1\right)/(e^{2c/b}-1)<x\mid Y_t>0\right\}\to x, \text{ если } c(t)\sim c\ln t,$$

$$\mathbf{P}\{(\ln Y_t)/\ln t<x\mid Y_t>0\}\to x, \text{ если } c(t)=o(1/\ln t).$$

В работах И. С. Бадалбаева, Ш. П. Примкулова, И. Рахимова [23, 25] аналогичные результаты получены для $((E, h)+I)$-процессов и для случая, когда числа частиц, иммигрирующих в разные моменты времени, не независимы.

К. В. Митов, Н. М. Янев [366] для $((E, h)+I)$-процесса того же вида, что в работе Фостер [254] из п. 5.1.4 (но с интенсивностью иммиграции $c(t)\to 0$) показали, что при $c(t)\sim t^{-\rho}L(t)$, $0\leqslant\rho<1$, выполняется (28), а при $c(t)\sim c/(t\ln^r t)$, $0\leqslant r\leqslant 1$,

$$\mathbf{P}\{2Y_t/bt\leqslant x\mid Y_t>0\}\to 1-e^{-x}/(2-r),\quad x\geqslant 0,$$

$$\mathbf{P}\{(\ln Y_t)/\ln t\leqslant x\mid Y_t>0\}\to(1-r)\,x/(2-r);\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

И. Рахимов [97, 100] для $((E, h)+I)$-процессов с $m\geqslant 1$, в которых интенсивность $\mathbf{M}\eta_t$ иммиграции стремится к ∞ при $t\to\infty$, указал условия, обеспечивающие асимптотическую нормальность Y_t с параметрами $\mathbf{M}Y_t$, $\mathbf{D}Y_t$. Он же в [99] рассмотрел случай, когда $m>1$, $\mathbf{M}\eta_t\to 0$, а в [102] — случай $m<1$.

И. С. Бадалбаев [16, 18] изучал $((E, h)+I)^k$-процессы с иммиграцией убывающей или растущей интенсивности.

5.2. $((G, h)+I)$- и $(N+I)$-процессы. В $((G, h)+I)$-процессах поток иммигрирующих частиц можно описать, задав последовательность $0<\theta_1<\theta_2<\ldots$ моментов иммиграции и последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$ чисел частиц, иммигрирующих в моменты $\theta_1, \theta_2, \ldots$.

Явные выражения для $\mathbf{M}s^{Y_t}$ получил Шонквиллер [461].

При условии, что $\{\theta_i\}$ — процесс восстановления, а $\{\eta_i\}$ независимы и одинаково распределены, Пейкс, Каплан [404] и И. С. Бадалбаев, И. Рахимов [27] указали необходимые и достаточные условия существования невырожденного предельного распределения Y_t (допуская возможность того, что $\mathbf{M}\log\eta_i = \infty$ или $\int t dG(t)=\infty$), а Пейкс, Партасарати [405] изучали скорость сходимости $\mathbf{M}s^{Y_t}$ к нулю в случае $m=h'(1)\geqslant 1$.

Каплан [330] перенес на $((G, h)+I)$-процессы результат Б. А. Севастьянова [111]: если функция $\psi(x)$, $x\geqslant 0$, такова, что $\psi(xy)\leqslant G\psi(x)\psi(y)$, то $\mathbf{M}\psi(Y_t)<\infty \Leftrightarrow \mathbf{M}\psi(\xi)+\mathbf{M}\psi(\eta)<\infty$.

Для $((G, h)+I)$-процесса асимптотику $\mathbf{M}Y_t$ (и предельную теорему при $m<1$) получил Ягерс [311], а Н. М. Янев [147] для пуассоновского процесса $\{\theta_i\}$ нашел асимптотику $\mathbf{M}Y_t (Y_t-1)$ и получил предельные теоремы во всех трех случаях ($m<1$, $m=1$, $m>1$).

5.2.1. Некритические процессы. Для $((G, h)+ +I)$-процессов с $m>1$ и процессом восстановления $\{\theta_i\}$ Радклифф [424, 426] доказал, что $Y_t e^{-\alpha t}$ сходится п. н. и в L^2 к случайной величине W; Каплан, Пейкс [332] получили аналогичный результат для случая, когда $\Delta_i=\theta_{i+1}-\theta_i$ — эргодический процесс, а Атрея, Партасарати, Санкаранарайанан [172] — когда эргодична последовательность $\{(\Delta_i, \eta_i)\}$.

Н. М. Янев [146] доказал предельные теоремы для $((G, h_u)+I)$-процессов с $m\neq 1$, а Дурхэм [239] — для $(N+I)$-процессов с $m\geqslant 1$. Возможные скорости роста $(N+I)$-процесса изучал Грей [273].

Асмуссен, Херинг [155] для $(N+I)^k$-процесса $\mathbf{Y}_t$, соответствующего сумме независимых $(N)^k$-процессов $\mathbf{Z}_t(0)$, $\mathbf{Z}_t(1), \ldots$, начинающихся в моменты $0\leqslant\tau_0<\tau_1<\ldots$ иммиграции частиц, доказали, что если $\mathbf{P}\{\lim \rho^{-t}\mathbf{Z}_t(i)=\mathbf{W}_i\}=1$ при $\rho>1$, то при некоторых условиях на $\{\tau_i\}$

$$\mathbf{P}\left\{\lim \rho^{-t}\mathbf{Y}_t=\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{-\tau_i}\mathbf{W}_i\right\}=1.$$

Каплан [327] указал условия существования невырожденного предельного распределения вектора $\mathbf{Y}_t$ для $((G, h)+I)^k$-процесса с $\rho\leqslant 1$ при $t\to\infty$.

Для $((G, h)+I)$-процессов Y_t с $m<1$ Пейкс [397] доказал асимптотическую нормальность интеграла U_t от траектории Y_u по отрезку $[0, t]$ и существование собственного предельного распределения U_t-t в случае, когда мальтусовский параметр

α не существует, а Каплан [328] нашел предельное распределение доли времени, проведенного процессом Y_u в состоянии j на отрезке $[0, t]$.

Вайнер [483] для $((G, h)+I)$-процесса нашел асимптотику моментов и предельные распределения суммы времени жизни всех частиц, существующих в момент t, и суммы времен жизни частиц, появившихся до момента t.

Радклифф [423, 425] для $((G, h)+I)^k$-процессов с $\rho>1$ изучал отношения чисел частиц разных типов.

5.2.2. Критические процессы. Дурхэм [238, 239], Пейкс [395], С. В. Нагаев [90] указали условия, при которых для $((G, h)+I)$- и $(N+I)$-процессов справедливо соотношение (25). Его аналог для $((G, h)+I)^k$-процессов доказывали Вайнер [484—486] и В. А. Ватутин [30], а для $((G, h_u)+I)^k$-процессов В. М. Шуренков [141].

Для $((G, h)+I)^k$-процесса Вайнер [487] нашел предельное распределение вектора $\mathbf{S}_t$ чисел частиц, появившихся до момента t, а в [491] он получил асимптотические формулы для $\mathbf{P}\{\mathbf{Y}_t=(y_1, \ldots, y_k)\}$ и $\mathbf{P}\{S_t=(s_1, \ldots, s_k)\}$ при $t\to\infty$; в частности, если $k=1$, то

$$\mathbf{P}\{Y_t=j\}\sim c_j t^{-d},\ \mathbf{P}\{\mathbf{S}_t=j\}\sim f_j t^{-p},\ d,\ p>0.$$

И. С. Бадалбаев, И. Рахимов [27] доказали для $((G, h)+$ $+I)$-процессов аналог (29), а в [26] — аналоги соотношений (30). Пейкс [395, 397] доказал ряд предельных теорем для интеграла U_t от траектории $((G, h)+I)$-процесса Y_u с $m=1$ по отрезку $[0, t]$, в частности,

$$\mathbf{M}\exp\{-t^{-2}U_t z\}\to(\operatorname{sech}\sqrt{c_1 z})^{c_2},\quad t\to\infty,$$

при c_1, $c_2>0$, $h''(1)<\infty$. Аналогичный результат получил Каплан [328].

И. С. Бадалбаев, А. М. Зубков [20] рассматривали последовательность $Y_t^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ процессов того же типа, что в работе Асмуссен, Херинг [155] (см. п 5.2.1). Показано, что если при некотором $\gamma>0$ равномерно в любой области вида $\{\varepsilon n\leqslant t<n,\ |s|\leqslant 1\}$, $\varepsilon>0$,

$$\mathbf{M}s^{Z_t^{(n)}(t)}=1-(1+o(1))(1-s)/(1+(1-s)t\gamma),\quad n\to\infty,$$

а процессы $n^{-1}\nu(xn)$ (где $\nu(u)$ — число частиц, иммигрировавших на отрезке $[0, u]$) сходятся к процессу $T(x)$, $\mathbf{P}\{T(1)<\infty\}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\exp\{-uY_n^{(n)}/n\gamma\}=$$

$$=\mathbf{M}\exp\left\{-u\gamma^{-1}\int_0^1(1+(1-x)u)^{-1}\,dT(x)\right\}\qquad(31)$$

Частными случаями (31) (соответствующими процессу $T(x)=\lambda x$) являются результаты работ, упомянутых в начале п. 5.2.2, а также работ С. В. Нагаева, М. Х. Асадуллина [5, 91] ($x^{-1}T(x)$ — случайная величина) и И. С. Бадалбаева [17] ($T'(x)=\lambda_0$ при $0\leqslant x<x_0$, $T'(x)=\lambda_1$ при $x_0<x\leqslant 1$).

§ 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМАХ СЕРИЙ

Распределение числа частиц Z_t зависит от величины t, вероятностных законов развития частицы и от значения Z_0. В предельных теоремах, упоминавшихся в §§ 2—5, предполагалось, что $t\to\infty$, а остальные параметры процесса фиксированы. Ситуацию, когда меняются и другие параметры процесса, мы называем *схемой серий*; случаи, когда при этом $m=h'(1)\to 1$ (или $\rho\to 1$), называют *переходными явлениями*.

Отметим, что функция $\mathbf{M}s^{Z_t}$ при фиксированном $t\geqslant 0$ для (M_λ, h)-процессов непрерывно зависит от $h(s)$ (см. И. Д. Черкасов [133]), а для (G, h)-процессов — от G и h (Курц [347]).

6.1. Процессы, начинающиеся с большого числа частиц. Вильямс [492] отметил аналогию между предельным распределением числа частиц в (E, h)-процессе при $Z_0=N\to\infty$ и распределением суммы случайного числа случайных величин, имеющих показательное распределение.

Р. Ибрагимов [57] оценил скорость сходимости

$$\mathbf{P}\{(Z_n-A_n)/B_n<x\,|\,Z_0=C_n\}$$

при n, $C_n\to\infty$ к функции нормального распределения. Хопфнер [298] указал условия, при которых $\mathbf{P}\{Z_n=k\,|\,Z_0=N\}$ (как для (E, h)-, так и для (M_λ, h)-процессов) можно аппроксимировать плотностью нормального распределения, когда k, n, $N\to\infty$.

Меллайн [364] показал, что для (E, h)-процессов Z_n с $h'(1)=\mathbf{M}\xi=1$, $\mathbf{M}\xi^2\log\xi<\infty$ конечномерные распределения $n^{-1}Z_{[nx]}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, при $n\to\infty$ и условиях $Z_0=xn+o(n)$, $Z_n=yn+o(n)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого диффузионного процесса; такой же результат получен для $((E, h)+I)$-процессов.

Слуд [464] изучил предельное поведение при i, $j\to\infty$

$$\mathbf{P}\{\tau'<\tau''\,|\,Z_0'=i,\ Z_0''=j,\ \lim(Z_n'+Z_n'')=0\},$$

где Z_n' и Z_n'' — независимые (E, h)-процессы, $\tau'=\min\{n: Z_n'=0\}$, $\tau''=\min\{n: Z_n''=0\}$.

В. А. Ватутин [29] показал, что для $((E, h)+I)$-процесса при $\mathbf{M}\xi=1$, $\mathbf{M}\xi^2<\infty$, $\mathbf{M}\eta<\infty$ и некоторых c, $\gamma>0$

$$Q(n)\overset{\text{def}}{=}\mathbf{P}\{\min_{k\geqslant 0}Y_k\,|\,Y_0=n\}\sim cn^{-\gamma},\quad n\to\infty, \tag{32}$$

а если $\mathbf{M}\xi>1$, то

$$Q(n)=q^n n^{-\gamma}(W(\log n)+O(n^{-1})),\quad n\to\infty,$$

где $q=h(q)<1$, $\gamma>0$, $W(x)$ — периодическая функция; при переходе к $((M_\lambda, h)+I)$-процессам функция $W(x)$ вырождается в константу.

Для $((M_\lambda, h)+I)^k$-процессов соотношение (32) доказал С. М. Сагитов [108].

Ламперти [350] для (E, h)-процессов описал множество предельных распределений $(Z_n-A_n)/B_n$ при условиях $Z_n=C_n\to\infty$, $n\to\infty$. Р. И. Мухамедханова, Ш. К. Форманов [84] получили аналогичные результаты для (M_λ, h)-процессов, а Р. Ибрагимов [61] — для $(E, h)^2$-процессов.

Для (E, h)-процессов Ламперти, Ней [351], Гримвалл [278] нашли условия сходимости

$$U_t=(Z_{[r_N t]}-A_N)/B_N \text{ при } Z_0=N\to\infty$$

к диффузионным процессам (или к ветвящимся процессам с непрерывным пространством состояний). Для (E, h)-процесса с $m=1$, $h''(1)<\infty$ Линдвалл [355] указал, что при $Z_0=N$, n, $n^{-1}N\to\infty$ процесс $(Z_{[nt]}-N)/(nN)^{1/2}$ сходится к винеровскому процессу, а $Z_{[Nt]}/N$ — к диффузионному. Эсти [246, 248] для (G, h)-процессов с $m=1$, $h''(1)<\infty$, $1-G(t)=o(t^{-2})$ и $Z_0=N\to\infty$ доказал теоремы о сходимости процессов $N^{-1}Z_{tN}$, $0<t<c$, при $Z_T>0$, $Z_{cT}=0$, $c>1$ к диффузионным процессам, а в [245] перенес на (G, h)-процессы результаты Ламперти, Нея [351].

Сходимость $(M_\lambda, h)^k$-процессов к диффузионным изучал В. П. Чистяков [136].

6.2. Переходные явления. Стандартный результат состоит в следующем (см. Б. А. Севастьянов [117]): для (E, h)-процессов при $n\to\infty$, $m=h'(1)\to 1$

$$\sup_x |\mathbf{P}\{Z_n>x\,\mathbf{M}[Z_n\,|\,Z_n>0]\,|\,Z_n>0\}-e^{-x}|\to 0 \qquad (33)$$

равномерно по любому множеству функций h: $h''(1)\geqslant b_0>0$, $h'''(1)\leqslant c_0<\infty$ (Фахади, Квайн, Вер-Джонс [250] показали, что условие $h'''(1)\leqslant c_0$ можно заменить равномерной сходимостью Σj^2h_j). Аналоги (33) для $(M_\lambda, h)^k$-процессов доказал В. П. Чистяков [139], для $(E, h)^k$-процессов — Квайн [418], для (G, h)-процессов с решетчатым распределением G — С. В. Нагаев [89], для $(G, h)^k$-процессов — О. В. Вьюгин [47]. В [46] О. В. Вьюгин нашел асимптотику $\mathbf{M}Z_t$ и $\mathbf{M}Z_t(Z_t-1)$ для (G, h)-процессов в случае переходных явлений.

Г. Д. Макаров [75] для (E, h)- и (M_λ, h)-процессов показал, что при $h(1+\varepsilon)\leqslant d_0<\infty$, $|h'(1)-1|=O(n^{-1})$, $n\to\infty$, относительная (а не абсолютная, как в (33)) погрешность аппроксимации стремится к 0 равномерно по $x=o(n/\ln n)$ и что при $j=o(n^2/\ln n)$, $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{Z_n=j\,|\,Z_0=1\}\sim\gamma_n^2 m^n\exp\{-K\gamma_n\},$$
$$\gamma_n=2/[h''(1)(1+m+\ldots+m^{n-1})].$$

Аналоги соотношения (25) для переходных явлений в $((E,\ h)+I)$-процессах получили Квайн, Сенета [422], Пейкс [392], Фахади, Квайн, Вер-Джонс [250], а для $((M_\lambda,\ h)+I)$-процессов — И. Рахимов [101].

Иржина [318] показал, что если $r(h'_{(r)}(1)-1)\to\alpha,\ h''_{(r)}(1)\to\beta$ при $r\to\infty$, то построенные по $(E,\ h_{(r)})$-процессам $Z_n^{(r)}$ с $Z_0^{(r)}=r$ процессы $Z_t^{(r)*}=r^{-1}Z_{[rt]}^{(r)}$ сходятся к ветвящемуся процессу с непрерывным временем и непрерывным пространством состояний. В [320] Иржина перенес это утверждение на $(E,\ h)^k$-процессы, Е. А. Лебедев [70] получил его аналог для $((E,\ h)+I)$-процессов, а Ягерс [314] — для $(G,\ h)$-процессов.

Е. А. Лебедев [71] доказал, что к ветвящемуся процессу с непрерывным пространством состояний и несколькими типами частиц сходится последовательность $r^{-1}Z_{[rt]}^{(r)}$, где $(E,\ h_{(r)})^k$-процесс $Z_n^{(r)}$ (с $Z_0^{(r)}=([rx_1],\ldots,\ [rx_k])$ имеет матрицу первых моментов $A_r=A_0+r^{-1}C_0+o(r^{-1})$, A_0 — блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой соответствуют неразложимым критическим процессам, а матрица $C_0>0$. Для $(E,\ h)^2$-процессов аналогичную теорему доказал Курц [348], а при условии $r^{-1}Z_0^{(r)}\xrightarrow{d}\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$ — Бухгольц, Вазан [189]. В [72] Е. А. Лебедев получил аналоги результатов Ламперти [350] и Линдвалла (см. п. 6.1) для переходных явлений.

С. А. Алиев, В. М. Шуренков [3, 4] изучали, при каких условиях на последовательность $h_{(r)}(s)$ для $(E,\ h_{(r)})$-процессов $Z_n^{(r)}$ (и для $(M_\lambda,\ h_{(r)})$-процессов — см. С. А. Алиев [1, 2]) существует такая последовательность $b_n^{(r)}$, что при $n\to\infty$, $n(h'_{(r)}-1)\to c\in(0,\ \infty)$

$$b_n^{(r)}\mathbf{P}\{Z_n^{(r)}\geqslant b_n^{(r)}x\}\to\Pi(x) \tag{34}$$

в каждой точке непрерывности функции $\Pi(x)$. Необходимые и достаточные условия получены в [4]. Соотношение (34) эквивалентно сходимости конечномерных распределений процессов $Z_{[nt]}^{(r)}/b_n^{(r)}$ при $Z_0^{(r)}=[xb_n^{(r)}]$, $n\to\infty$, к конечномерным распределениям ветвящегося процесса с непрерывным пространством состояний.

Сенета [447] доказал, что если $\tau=\min\{n{:}Z_n=0\}$ для $(E,\ h)$-процесса Z_n с $Z_0=1$, то при $h(s)\to\varphi(s)$, $\varphi'(1)=1$, $\varphi''(1)>0$, $h'''(1)\leqslant c<\infty$, $m=h'(1)\uparrow 1$

$$\mathbf{M}\tau\sim-\frac{2}{\varphi''(1)}\log(1-m),$$

$$\sum j^\alpha\mathbf{P}\{\tau>j\}\sim\frac{2}{\varphi''(1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\zeta(\alpha+1)}{(1-m)^\alpha},\quad \alpha>0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $\zeta(\cdot)$ — дзета-функция Римана. Линдвалл [356] получил предельные теоремы для τ, $\max Z_n$, $Z_1+\ldots+Z_n$ при $Z_0=N\to\infty$, используя диффузионное приближение ветвящихся процессов, близких к критическим.

Бюлер [191] установил, что для (E, h)-процессов с $h(s)=(1-p)s+pf(s)$ при $Z_0=N\to\infty$, $Np\to\lambda\in(0,\infty)$ приращения $Z_{n+1}-Z_n$ асимптотически независимы и

$$\mathbf{M}\exp\{iu(Z_{n+1}-Z_n)\}\to\exp\{\lambda f(e^{iu})e^{-iu}-1\},\quad n=0,1,\ldots$$

Для (M_λ, h)-процессов аналогичного вида Саваж, Шими [434] показали, что при $N\to\infty$, $t=\mathrm{const}$ главный вклад в $Z_t^{(N)}-Z_0^{(N)}$ дают лишь непосредственные потомки $Z_0^{(N)}=N$ исходных частиц.

Пейкс [389] доказал, что для случайных величин $V(m)=\lim m^{-n}Y_n$, построенных по $((E, h)+I)$-процессам с $m=\mathbf{M}\xi<\infty$, $1-\mathbf{M}s^{\eta}=(1-s)^{\alpha}L(1-s)$, $0<\alpha<1$, существует такая функция $f(x)$, что $f(m)V(m)$ при $m\downarrow 1$ слабо сходится к устойчивому распределению с параметром α.

О. В. Вьюгин [48] нашел семейство функций распределения, являющихся предельными для

$$\mathbf{P}\{(\lim Z_{n1}-a_r)/b_r\leqslant x\mid \mathbf{Z}_0=r\mathbf{e}_2\}$$

при $r\to\infty$, $\mathbf{M}[Z_{12}\mid \mathbf{Z}_0=\mathbf{e}_2]\to 1$, где $\mathbf{Z}_n=(Z_{n1}, Z_{n2})$ — $(E, h)^2$-процессы с $h_{(1)}(s_1, s_2)\equiv s_1$.

§ 7. СТАТИСТИКА ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

В собранных в этом параграфе статьях изучаются предельные свойства таких функций от траекторий ветвящихся процессов, которые в том или ином смысле сходятся к параметрам, определяющим ветвящийся процесс. Работами общего характера (кроме упомянутых во введении обзоров) являются статья Локхарта [358], в которой показано, что для (E, h)-процесса функции от $Z_0=1, Z_1,\ldots$ могут быть состоятельными оценками только для $m=\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$, и статья Венкатарамана, Нанти [479], где установлена совместная асимптотическая нормальность статистик $V_n(r)=(Z_{n+r}-Z_n(Z_{n+1}/Z_n)^2)Z_n^{-1/2}$, $2\leqslant r\leqslant T$, и сходимость $W_n(r)=V_n(r+2)-2(Z_{n+1}/Z_n)V_n(r+1)-(Z_{n+1}/Z_n)^2V_n(r)$, $2\leqslant r\leqslant T$, к нормальному распределению с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Статистики $W_n(r)$ можно использовать для проверки гипотезы о том, что наблюдаемый процесс Z_n является ветвящимся.

7.1. Оценки для $m=h'(1)$ в (E, h)-процессах. Если $Z_n(j)$ — число частиц n-го поколения (E, h)-процесса с $h(s)=\Sigma h_j s^j$, имеющих ровно j непосредственных потомков, $S_n=Z_0+\ldots+Z_n$, $S_n(j)=Z_0(j)+\ldots+Z_n(j)$, то $S_{n-1}(j)/S_{n-1}$ — оценка максимального правдоподобия для h_j; оценку

$$L_n=\sum jS_{n-1}(j)/S_{n-1}=(S_n-Z_0)/S_{n-1}=$$
$$=(Z_1+\ldots+Z_n)/(Z_0+\ldots+Z_{n-1})$$

называют оценкой максимального правдоподобия для $m=h'(1)$. Кейдинг, Лаурицен [336] показали, что для ряда однопараметрических семейств (E, h)-процессов L_n является оценкой максимального правдоподобия, даже если n — случайная величина, не зависящая от $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$, однако Кейдинг [335] отметил, что для семейства $h_{(\theta)}(s)=\sum s^j(1+j)^{-\theta} \Big/ \sum (1+j)^{-\theta}$ это не так.

Харрис (см. [132]) показал, что для (E, h)-процесса с $m>1$, $\mathbf{D}\xi=\sigma^2<\infty$ оценка L_n состоятельна на множестве $\{\lim Z_n=\infty\}$. Дион [221] установил, что при тех же условиях и $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{\sigma^{-1}(L_n-m)\sqrt{S_{n-1}}\leqslant x\mid Z_n>0\}\to\Phi(x), \tag{35}$$

$$\mathbf{P}\{\sigma^{-1}(L_n-m)Z_0\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}\leqslant x\mid Z_n>0\}\to$$
$$\to\int_0^{\infty}\Phi(x\sqrt{u})\,d\mathbf{P}\{W\leqslant x\},$$

где $W=\lim m^{-n}Z_n$ п. н. Асмуссен, Кейдинг [157] доказали для L_n утверждения типа закона повторного логарифма. При условиях n, $N=Z_0\to\infty$ Н. М. Янев [148] доказал состоятельность L_n и получил ряд предельных теорем. В частности, если $m=1$, то при $nN^{-1}\to\infty$ величина $(L_n-1)\sigma^{-1}\sqrt{nN}$ асимптотически нормальна, а при $nN^{-2}\to\infty$ предельное распределение $\sigma^2/[2N^2(1-L_n)]$ — устойчивое с параметром $^1/_2$.

Даби, Роуолт [236] при n, $Z_0\to\infty$ построили основанную на L_n оценку для $(m, \mathbf{D}\xi)$.

А. В. Нагаев [85] показал, что оценка $\Delta_n=Z_{n+1}/Z_n$ при $Z_n>0$ условно несмещенная: $\mathbf{M}[\Delta_n\mid Z_n>0]=m$ и что пределы

$$\mathbf{P}\{\sigma^{-1}(\Delta_n-m)\sqrt{Z_n}\leqslant x\mid Z_n>0\},$$
$$\mathbf{P}\{\sigma^{-1}(\Delta_n-m)\,m^{n/2}\leqslant x\mid Z_n>0\}$$

те же, что в (35) (см. также Дион [221]). И. С. Бадалбаев [10] установил, что при $m=1$, $h'''(1)<\infty$, $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{(\Delta_n-1)\,\sigma\sqrt{n/2}\leqslant x\mid Z_n>0\}-\int_0^{\infty}\Phi(x\sqrt{y})\,e^{-y}dy=O\,(n^{-1/2}\ln n).$$

Асимптотику $\mathbf{D}[\Delta_n\mid Z_n>0]$ изучали А. В. Нагаев [85], И. С. Бадалбаев [7, 8], Крамп, Хоув [208]. В [14] И. С. Бадалбаев изучил свойства оценки $Z_{n+1}/(Z_n+1)$ при $n=\mathrm{const}$, $Z_0\to\infty$.

Скотт [443] доказал предельные теоремы для L_n и Δ_n мартингальными методами. Хейди [285] сравнил эффективность оценок L_n и Δ_n и указал еще одну состоятельную оценку: $Z_n^{1/n}\to m$ п. н. на множестве $\{\lim Z_n=\infty\}$. Басава, Скотт [176] и Свитинг [471] изучали асимптотическую эффективность критериев для различения сближающихся гипотез, построенных по L_n или по достаточной статистике (L_n, S_{n-1}) в случае однопараметрического семейства $(E, h_{(\theta)})$-процессов с $\mathbf{M}s^{\xi}=h(s\theta)/h(\theta)$, $\theta>0$, $h(0)=0$. Беккер [177] в аналогичной ситуации построил оценки для θ по общему числу S_∞ частиц в процессе вплоть до его вырождения.

7.2. Оценки дисперсии. Хейди [284] показал, что для (E, h)-процесса с $m=\mathbf{M}\xi>1$, $\sigma^2=\mathbf{D}\xi<\infty$ и $Z_0=1$

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Z_j\left(\frac{Z_{j+1}}{Z_j}-\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right)^2=\sigma \mid \lim_{n\to\infty}m^{-n}Z_n>0\right\}=1,$$

что эта оценка σ асимптотически нормальна и удовлетворяет закону повторного логарифма.

Дион [222] доказал, что при $m>1$, $\mathbf{M}\xi^4<\infty$ оценки

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}Z_j\left(\frac{Z_{j+1}}{Z_j}-m\right)^2 \quad\text{и}\quad \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}Z_j\left(\frac{Z_{j+1}}{Z_j}-L_n\right)^2$$

величины $\sigma^2=\mathbf{D}\xi$ состоятельны, а первая из них — несмещенная. С. Рахман [103] доказал L^2-сходимость первой оценки к σ^2.

7.3. Оценки для коэффициентов $h(s)$ и вероятности вырождения. Производящая функция $h(s)=\sum h_j s^j$ задает распределение на множестве $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть $\hat{h}_j(n)$ — относительная частота появления исхода j в n независимых испытаниях с распределением $\{h_j\}_{j=0}^{\infty}$. Стиглер [468] показал, что величина $\hat{q}_n=\inf\left\{s\geqslant 0:\sum\hat{h}_j(n)s^j=s\right\}$ при $n\to\infty$ распределена асимптотически нормально, если $m>1$, сходится по распределению к 1 при $m<1$ и

$$\mathbf{P}\{(1-\hat{q}_n)n^{1/2}\leqslant x\}\to\Phi(x(h''(1))^{1/2}/2),\quad x\geqslant 0,\ \text{при } m=1.$$

Крайер, Робертсон [212] получили аналогичное утверждение для корня $\bar{q}_n$ уравнения $\sum\bar{h}_j(n)s^j=s$, где

$$\bar{h}_j(n)=\begin{cases}\max\limits_{0\leqslant r\leqslant j}\ \min\limits_{j\leqslant p<k}(\hat{h}_r(n)+\ldots+\hat{h}_p(n))/(p-r+1), & j\leqslant n-1,\\ \min\limits_{k\leqslant r\leqslant j}\ \max\limits_{j\leqslant p}(\hat{h}_r(n)+\ldots+\hat{h}_p(n))/(p-r+1), & j\geqslant n.\end{cases}$$

Пейкс [399] для (E, h)-процессов с $m\geqslant 1$ доказал, что при условии $Z_n>0$ оценки $h_j^*(n)=Z_n(j)/Z_n$ (где $Z_n(j)$ — число частиц n-го поколения, имеющих j потомков) состоятельны, а оценка $q_n^*=\inf\left\{s\geqslant 0:\sum h_j^*(n)s^j=s\right\}$ состоятельна и асимптотически нормальна.

Непараметрические оценки вероятности вырождения изучал Мартин [361], а оценки максимального правдоподобия для h_j, построенные по одной реализации — Эшенбах, Винклер [244].

Дион, Лабель, Латур [224] исследовали поведение оценок максимального правдоподобия для h_j, $m=\mathbf{M}\xi$ и $\sigma^2=\mathbf{D}\xi$, построенных по $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ при малых n, при дополнительном условии $h(0)=0$.

7.4. Оценки параметров $((E, h)+I)$-процессов. Хейди, Сенета [290, 291] изучали свойства некоторых оценок для $m=h'(1)$ и $r=g'(1)$. Квайн [420], уточняя их результаты, показал, что при $m<1$, $n\to\infty$ оценки

$$\hat{m}_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i\,(Y_{i+1}-S_n/n)\Big/\sum_{i=1}^{n}(Y_i-S_n/n)^2,$$

$$\hat{r}_n=(S_n/2n)\sum_{i=1}^{n}(Y_{i+1}-Y_i)\Big/\sum_{i=1}^{n}(Y_i-S_n/n)^2$$

(где $S_n=Y_1+\cdots+Y_n$) сходятся п. н. к m и r, асимптотически нормальны и удовлетворяют закону повторного логарифма. Состоятельность оценок максимального правдоподобия для двупараметрического семейства $((E, h)+I)$-процессов доказали Бхат, Адке [180].

Н. М. Янев, С. Данчева [149] предложили оценку параметра $c=g''(1)$ и доказана ее состоятельность и асимптотическую нормальность; в [495] для оценок параметров $((E, h)+I)$-процессов доказали также теоремы типа закона повторного логарифма. Венкатараман [477] установил асимптотическую нормальность вектора $(n^{-1}S_n, m_n^*, r_n^*)$ при $n\to\infty$, где m_n^* и r_n^* — оценки наименьших квадратов для m и r. Венкатараман, Нанти [478] показали, что при $m<1$, $n\to\infty$ вектор

$$n^{-1/2}\,(S_n-r/(1-m),\ n^{-1}N_n-r,\ (S_n-N_n)/(Y_0+S_{n-1})^{-m})$$

(где $N_n=\eta_1+\cdots+\eta_n$ — число частиц, иммигрировавших на отрезке $[1, n]$) имеет вырожденное асимптотически нормальное распределение, а оценка $n^{-1}N_n/(1-(S_n-N_n)(Y_0+S_{n-1})^{-1})$ величины $r/(1-m)$ асимптотически нормальна.

Ю. Т. Жураев [51, 52] для $((E, h)+I)$-процессов изучал свойства оценки $Y_{n+1}/(Y_n+1)$ при различных предположениях о характере изменения вектора (n, Y_0).

7.5. Статистика $(E, h)^k$-процессов. Основными параметрами $(E, h)^k$-процесса $\mathbf{Z}_n=(Z_{n1}, \ldots, Z_{nk})$ являются матрица $\|m_{ij}\|=\|\mathbf{M}\xi_j^{(i)}\|$ и ее перронов корень ρ.

Кейдинг, Лаурицен [336] показали, что если $Z_{n,j}^{(i)}$ — число частиц типа j в n-м поколении, порожденных частицами типа i, то оценки

$$\hat{m}_{ij}(n)=(S_{n,j}^{(i)}-Z_{0,j}^{(i)})/S_{n-1,j}^{(i)}$$

(где $S_{n,j}^{(i)}=Z_{0,j}^{(i)}+\ldots+Z_{n,j}^{(i)}$) элементов матрицы $\|m_{ij}\|$ состоятельны. Асмуссен, Кейдинг [157] нашли условия, при которых $\|\hat{m}_{ij}(n)\| \to \|m_{ij}\|$ и $\hat{\rho}_n \to \rho$ при $n \to \infty$ п. н., где $\hat{\rho}_n$ — перронов корень $\|\hat{m}_{ij}(n)\|$, и доказали асимптотическую нормальность $(\hat{\rho}_n - \rho)(W\rho^n)^{1/2}$, где $W = \lim \rho^{-n}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{u})$ п. н. Карвалхо, Мюллер [197] указали состоятельную и асимптотически нормальную оценку для дисперсии предельного нормального распределения $(\hat{\rho}_n - \rho)(W\rho^n)^{1/2}$.

Беккер [178] установил состоятельность оценки

$$\tilde{\rho}_n = \frac{|\mathbf{Z}_1| + \ldots |\mathbf{Z}_n|}{|\mathbf{Z}_0| + \ldots + |\mathbf{Z}_{n-1}|}, \quad |\mathbf{Z}_t| = Z_{t1} + \ldots + Z_{tk},$$

при $n \to \infty$ и $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i$; Асмуссен, Кейдинг [157] и Дион, Кейдинг [223] доказали, что $(\tilde{\rho}_n - \rho)(W\rho^n)^{1/2}$ асимптотически нормальна при $n \to \infty$, если все собственные значения λ_l матрицы $\|m_{ij}\|$, отличные от ее перронова корня ρ, удовлетворяют условию $|\lambda_l|^2 < \rho$.

И. С. Бадалбаев, Р. Ибрагимов, Ю. Т. Жураев [13, 21, 19] получили ряд предельных теорем для оценок

$$Z_{n+1,\, j}/(1 + Z_{n,\, j}), \quad |\mathbf{Z}_{n+1}|/(1 + |\mathbf{Z}_n|)$$

перронова корня ρ в $(E, h)^2$-процессах, где $|\mathbf{Z}_n| = Z_{n1} + Z_{n2}$. Р. И. Хайрулин [130] указал состоятельные оценки для ρ, которые строятся по усеченному генеалогическому дереву процесса (такие оценки удобны при моделировании ветвящегося процесса на ЭВМ с ограниченным объемом памяти).

Нанти [378] доказал состоятельность и асимптотическую нормальность оценок максимального правдоподобия элементов матрицы $\|\mathrm{cov}(\xi_j^{(i)}, \xi_l^{(j)})\|$ и ее перронова корня для $(E, h)^k$-процесса. Квайн, Дурхэм [419] доказали асимптотическую нормальность оценки $\hat{\mu}_n = n^{-1}(Y_1 + \ldots + Y_n)$ вектора средних стационарного распределения $((E, h) + I)^k$-процесса с $\rho < 1$ и оценки матрицы $\|\mathbf{M}\xi_j^{(i)}\|$.

7.6. Оценки возраста ветвящегося процесса. Стиглер [467], Крамп, Хау [208] указали состоятельные оценки для момента наблюдения N, построенные по значению (E, h)-процесса при $m = h'(1) > 1$ и $Z_0 = 1$:

$$\hat{N}_0 = (\log m)^{-1} \log((1-q) Z_N + q),$$

$$\hat{N}_1 = (\log m)^{-1} \log((1-q) Z_N);$$

в этих оценках m и q можно заменять их состоятельными оценками $\hat{m}$ и $\hat{q}$. Адес, Дион, Лабель, Нанти [150] построили оценку максимального правдоподобия для N и приближения к ней в случае (E, h)-процесса с $h(s) = ((1-p)/(1-ps))^r$. Мартин [362], кроме точечных, построил и интервальные оценки для N.

Крамп, Хау [209] предложили аналогичные оценки для (G, h)-процессов.

7.7. Оценки параметров (M_λ, h)- и (G, h)-процессов. Атрея, Кейдинг [168] показали, что для (M_λ, h)-процессов с $m=h'(1)>1$ и $h(0)=0$

$$\hat{\lambda}_t = N_t/S_t \quad \left(S_t = \int_0^t Z_u du\right) \quad \text{и} \quad \hat{h}_{tj} = N_t(j)/N_t \quad (j \geqslant 2),$$

(где N_t — число скачков Z_u на $[0, t]$, а $N_t(k)$ — число скачков величины $k-1$), являются оценками максимального правдоподобия для λ и вероятностей h_j появления j потомков у одной частицы и что $\hat{\lambda}_t \to \lambda$ и $\hat{h}_{tj} \to h_j$ при $t \to \infty$ п. н., а величины $\hat{\lambda}_t$, $\hat{h}_{tj}$ асимптотически нормальны; оценки $\hat{m} = \sum_{j=1}^{\infty} j\hat{h}_{tj}$ и $\hat{\alpha} = \hat{\lambda}_t(\hat{m}-1)$ асимптотически нормальны при $Z_0 \to \infty$. В этой же работе все утверждения перенесены на $(M_\lambda, h)^k$-процессы.

Хоуэль, Крамп [292] построили для (G, h)-процесса с $h(s)=s^2$ состоятельные оценки величин α, β из соотношения $\mathbf{M}Z_t \sim Z_0\beta e^{\alpha t}$, определяемые значениями Z_{t_1}, Z_{t_2} $(t_1 > t_2 \to \infty)$.

Джонсон, Сусарла, Ван Рузин [325] предлжили использовать в качестве оценок $\hat{G}$ и $\hat{h}_j$ для $(G, \Sigma h_j s^j)$-процесса значения, минимизирующие

$$a_1 \sum_{j=0}^{\infty} w_1(j)\,(h_j - \hat{h}_j)^2 + a_2 \int_0^{\infty} (\hat{G}(t) - G(t))^2 dw_2(t),$$

где a_1, $a_2 \geqslant 0$, а $w_i(t)$ определяются реализацией процесса Z_t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиев С. А.*, Предельная теорема для ветвящихся процессов с непрерывным временем. Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1980, № 5, 24—27 (РЖМат, 1981, 8В129)
2. —, О переходных явлениях ветвящихся процессов. Вероятн. методы в бесконечномерном анализе. Киев, 1980, 3—13 (РЖМат, 1981, 9В78)
3. — *Шуренков В. М.* Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона—Ватсона. Теория случайн. процессов. Киев, 1981, № 9, 3—8 (РЖМат, 1981, 11В94)
4. —, —, Переходные явления и сходимость процессов Гальтона—Ватсона к процессам Иржины. Теория вероятностей и ее применения, 1982, *27*, № 3, 443—455 (РЖМат, 1983, 1В141)
5. *Асадуллин М. Х., Нагаев С. В.*, Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией. Мат. заметки, 1982, *32*, № 4, 537—548 (РЖМат, 1983, 2В113)
6. *Атакузиев Д., Ибрагимов Р.*, О скорости сходимости в предельной теореме для надкритических ветвящихся процессов и ее применение для сумм случайного числа случайных слагаемых. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 2, 3—8 (РЖМат, 1979, 1В133)
7. *Бадалбаев И. С.*, О свойствах оценки регулирующего параметра ветвящегося случайного процесса. В сб. «Случайн. процессы и смежн. вопр. Ч. I». Ташкент: Фан, 1970, 31—42 (РЖМат, 1970, 12В80)

8. —, Об одном свойстве оценки для регулирующего параметра в ветвящемся случайном процессе. В сб. «Случайн. процессы и стат. выводы». Ташкент: Фан, 1971, 11—17 (РЖМат, 1973, 1В221)
9. —, Об одном свойстве надкритического ветвящегося случайного процесса с непрерывным временем. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1973, № 5, 9—13 (РЖМат, 1974, 7В128)
10. —, Об одной теореме для критического ветвящегося процесса с дискретным временем. В сб. «Случайн. процессы и стат. выводы». Вып. 4. Ташкент: Фан, 1974, 32—34 (РЖМат, 1975, 3В108)
11. —, Об одной предельной теореме для надкритического процесса Гальтона — Ватсона. Мат. заметки, 1975, *18*, № 1, 123—128 (РЖМат, 1975, 11В86)
12. —, О распределении момента первого выхода за растущую область надкритическим ветвящимся случайным процессом с двумя типами частиц. В сб. «Предельн. теоремы и мат. статистика». Ташкент: Фан, 1976, 18—23 (РЖМат, 1976, 8В102)
13. —, Об одной оценке для собственного числа матрицы математических ожиданий ветвящегося случайного процесса с двумя типами частиц. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1976, *8*, № 5, 8—13 (РЖМат, 1977, 5В161)
14. —, О некоторых свойствах оценки для среднего в ветвящемся процессе. В сб. «Предельн. теоремы для случайн. процессов». Ташкент: Фан, 1977, 21—27 (РЖМат, 1977, 7В80)
15. —, О свойствах некоторых функционалов от траекторий надкритических ветвящихся процессов с несколькими типами частиц. В сб. «Вероятностн. процессы и мат. стат.». Ташкент: Фан, 1978, 19—23 (РЖМат, 1978, 12В150)
16. —, Предельные теоремы для многотипных критических марковских ветвящихся процессов с иммиграцией убывающей интенсивности. В сб. «Предельн. теоремы для случайн. процессов и статист. выводы». Ташкент: Фан, 1981, 6—19 (РЖМат, 1982, 2В93)
17. —, Предельная теорема для марковских ветвящихся процессов с иммиграцией с переходным режимом. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1982, № 1, 8—12 (РЖМат, 1982, 7В10)
18. —, Предельные теоремы для многомерных ветвящихся процессов с иммиграцией растущей интенсивности. Докл. АН УзССР, 1983, № 2, 3—5 (РЖМат, 1983, 9В95)
19. —, *Жураев Ю.*, О свойствах оценки для собственного числа матрицы математических ожиданий ветвящегося процесса с несколькими типами частиц, начинающегося с большого числа частиц. В сб. «Предельн. теоремы, случайн. процессы и их прилож.». Ташкент: Фан, 1979, 35—46 (РЖМат, 1979, 12В136)
20. —, *Зубков А. М.*, Предельные теоремы для последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1983, *28*, № 2, 382—388 (РЖМат, 1983, 9В52)
21. —, *Ибрагимов Р.*, О статистике ветвящихся процессов с двумя типами частиц. В сб. «Вероятн. процессы и мат. стат.». Ташкент: Фан, 1978, 24—31 (РЖМат, 1978, 11В320)
22. —, *Машраббаев А.*, Периоды жизни $r>1$-типного процесса Гальтона — Ватсона с иммиграцией. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1983, № 2, 7—13 (РЖМат, 1983, 9В94)
23. —, *Примкулов Ш. П.* Одна предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией убывающей интенсивности. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 4, 5—8 (РЖМат, 1982, 2В88)
24. —, *Рахимов И.*, Критические ветвящиеся процессы с иммиграцией убывающей интенсивности. Теория вероятностей и ее применения, 1978, *23*, № 2, 275—283 (РЖМат, 1978, 11В132)
25. —, —, Предельные теоремы для критических процессов Гальтона —

Ватсона с иммиграцией убывающей интенсивности. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 2, 9—14 (РЖМат, 1979, 1В134)
26. —, —, Критические, зависящие от возраста ветвящиеся процессы, с иммиграцией убывающей интенсивности. В сб. «Предельн. теоремы, случайн. процессы и их прилож.». Ташкент: Фан, 1979, 46—59 (РЖМат, 1979, 12В137)
27. —, —, Две предельные теоремы для процессов Беллмана — Харриса с иммиграцией. В сб. «Предельн. теоремы для случайн. процессов и статист. выводы». Ташкент: Фан, 1981, 19—29 (РЖМат, 1982, 2В89)
28. *Берестова Н. А.*, О больших уклонениях для ветвящихся процессов на конечном интервале времени. Докл. АН СССР, 1981, *261*, № 6, 1289—1292 (РЖМат, 1982, 4В65)
29. *Ватутин В. А.*, Асимптотика вероятности попадания в нуль ветвящихся процессов с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1974, *19*, № 1, 26—35 (РЖМат, 1974, 7В126)
30. —, Критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса с иммиграцией и несколькими типами частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 2, 447—454 (РЖМат, 1976, 12В154)
31. —, Условие регулярности ветвящегося процесса Беллмана — Харриса. Докл. АН СССР, 1976, *230*, № 1, 15—18 (РЖМат, 1976, 12В155)
32. —, Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса с бесконечной дисперсией. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 4, 861—863 (РЖМат, 1977, 4В96)
33. —, Асимптотика вероятности продолжения для разложимого ветвящегося процесса с превращениями, зависящими от возраста частиц. Мат. сб., 1977, *102*, № 1, 109—123 (РЖМат, 1977, 6В106)
34. —, Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 1, 143—149 (РЖМат, 1977, 8В117)
35. —, Дискретные предельные распределения числа частиц в критических ветвящихся процессах Беллмана — Харриса. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 1, 150—155 (РЖМат, 1977, 8В118)
36. —, Условная предельная теорема для критического ветвящегося процесса с иммиграцией. Мат. заметки, 1977, *21*, № 5, 727—736 (РЖМат, 1977, 9В86)
37. —, Предельные теоремы для критических марковских ветвящихся процессов с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами. Мат. сб., 1977, *103*, № 6, 253—264 (РЖМат, 1977, 11В77)
38. —, Предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами. Теория вероятностей и ее применения, 1978, *23*, № 4, 807—818 (РЖМат, 1979, 5В147)
39. —, О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана — Харриса. Мат. заметки, 1979, *25*, № 5, 733—741 (РЖМат, 1979, 10В89)
40. —, Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса. Мат. сб., 1979, *109*, № 9, 440—452 (РЖМат, 1979, 11В105)
41. —, Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана — Харриса с несколькими типами частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1979, *24*, № 3, 503—514 (РЖМат, 1979, 12В135)
42. —, Об одном классе критических ветвящихся процессов Беллмана — Харриса с несколькими типами частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1980, *25*, № 4, 771—781 (РЖМат, 1981, 4В94)
43. —, Локальная предельная теорема для критических ветвящихся процессов Беллмана — Харриса. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1981, *158*, 9—30 (РЖМат, 1982, 3В77)
44. —, Об одном классе предельных теорем для критического ветвящегося

процесса Беллмана — Харриса. Теория вероятностей и ее применения, 1981, *26*, № 4, 818—824 (РЖМат, 1982, 4В138)
45. *Висков О. В.*, Несколько замечаний о ветвящихся процессах. Мат. заметки, 1970, *8*, № 4, 409—418 (РЖМат, 1971, 5В93)
46. *Вьюгин О. В.*, Асимптотика моментов ветвящихся процессов, близких к критическим. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 4, 845—853 (РЖМат, 1977, 5В88)
47. —, О переходных явлениях в ветвящихся процессах Беллмана — Харриса. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 4, 856—860 (РЖМат, 1978, 5В90)
48. —, Переходные явления в ветвящихся процессах с финальным типом. Теория вероятностей и ее применения, 1978, *23*, № 1, 169—175 (РЖМат, 1978, 8В130)
49. *Жуков В. Д.*, О моментах ветвящегося процесса. Исслед. по геомагнетизму, аэрон. и физ. Солнца. Вып. 35. М.: Наука, 1975, 6—7 (РЖМат, 1975, 10В78)
50. —, Соотношения между вероятностями однородного ветвящегося процесса с однотипными частицами. Исслед. по геомагнетизму, аэрон. и физ. Солнца. Вып. 49. М.: Наука, 1979, 190—195
51. *Жураев Ю. Т.*, Об оценке математического ожидания в ветвящемся случайном процессе с иммиграцией. В сб. «Предельн. теоремы для случайн. процессов». Ташкент: Фан, 1977, 47—51 (РЖМат, 1977, 7В193)
52. —, О свойствах оценки для среднего числа непосредственных потомков частицы в ветвящемся процессе с иммиграцией. В сб. «Вероятностн. процессы и мат. стат.». Ташкент: Фан, 1978, 48—55 (РЖМат, 1979, 1В136)
53. *Золотарев В. М.*, Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1957, *2*, № 2, 256—266 (РЖМат, 1958, 6952)
54. *Зубков А. М.*, Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1972, *17*, № 1, 179—188 (РЖМат, 1972, 6В63)
55. —, Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20*, № 3, 614—623 (РЖМат, 1976, 3В153)
56. —, Предельное поведение разложимых критических ветвящихся процессов с двумя типами частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1982, *27*, № 2, 228—238 (РЖМат, 1982, 11В113)
57. *Ибрагимов Р.*, О предельных теоремах для ветвящихся случайных процессов. В сб. «Случайн. процессы и стат. выводы». Вып. 2. Ташкент: Фан, 1972, 67—72 (РЖМат, 1973, 2В84)
58. —, Об одной предельной теореме для надкритического ветвящегося процесса. Изв. АН УзССР, Сер. физ.-мат. н., 1973, № 4, 89—90 (РЖМат, 1974, 3В63)
59. —, Локальная предельная теорема для надкритических ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем. В сб. «Случайн. процессы и стат. вывод». Вып. 3. Ташкент: Фан, 1973, 78—84 (РЖМат, 1973, 11В161)
60. —, Некоторые теоремы для надкритических ветвящихся процессов с двумя типами частиц. В сб. «Случайн. процессы и стат. выводы». Вып. 4. Ташкент: Фан, 1974, 52—57 (РЖМат, 1975, 3В124)
61. —, Обобщение теоремы Ламперти на ветвящиеся процессы с двумя типами частиц. В сб. «Случайн. процессы и стат. выводы». Вып. 5. Ташкент: Фан, 1975, 49—54 (РЖМат, 1975, 9В52)
62. —, Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах для ветвящихся случайных процессов. В сб. «Предельн. теоремы для случайн. процессов». Ташкент: Фан, 1977, 51—59 (РЖМат, 1977, 7В78)
63. —, *Бадалбаев И. С.*, Об одном свойстве надкритического ветвящегося

процесса с двумя типами частиц. I, II. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1974, № 2, 3—6; 1975, № 1, 10—14 (РЖМат, 1974, 8В81; 1975, 9В51)
64. —, *Рахимов И.*, О предельных теоремах для надкритических процессов Гальтона — Ватсона с многими типами частиц. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1979, № 1, 9—15 (РЖМат, 1979, 7В117)
65. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М.*, Случайные процессы. Справочник. Киев: Наукова Думка, 1983, 366 с.
66. *Колчин В. Ф.*, Ветвящиеся процессы, случайные деревья и обобщенная схема размещения частиц. Мат. заметки, 1977, *21*, № 5, 691—705 (РЖМат, 1977, 9В85)
67. —, Момент вырождения случайного процесса и высота случайного дерева. Мат. заметки, 1978, *24*, № 6, 859—870 (РЖМат, 1979, 5В146)
68. —, Ветвящиеся процессы и случайные деревья. В сб. «Вопр. кибернет.». М.: 1980, № 64, 85—97 (РЖМат, 1981, 2В62)
69. —, Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с. (РЖМат, 1984, 9В1К)
70. *Лебедев Е. А.*, Уточнение одной предельной теоремы для ветвящихся процессов. Докл. АН УССР, 1979, *А*, № 5, 334—337 (РЖМат, 1979, 10В91)
71. —, Одна предельная теорема для ветвящихся процессов с k типами частиц. Аналит. методы исслед. в теории вероятностей. Киев, 1981, 113—122 (РЖМат, 1982, 5В41)
72. —, О сходимости к винеровскому процессу ветвящихся процессов, близких к критическому. Теория вероятн. и мат. стат.». Киев: 1982, № 26, 96—106 (РЖМат, 1982, 6В114)
73. *Левін Л. Г.* Про дослід одного типу гілястого процесу. Доповіді АН УССР, 1975, *А*, № 5, 441—444 (РЖМат, 1975, 10В79)
74. *Макаров Г. Д.*, Большие уклонения для критического процесса Гальтона — Ватсона. Теория вероятностей и ее применения, 1980, *25*, № 3, 490—501 (РЖМат, 1981, 1В127)
75. —, Большие уклонения в ветвящихся процессах, близких к критическим. Теория вероятностей и ее применения, 1982, *27*, № 1, 142—147 (РЖМат, 1982, 6В116)
76. —, Большие уклонения для ветвящихся процессов с иммиграцией. Мат. заметки, 1982, *32*, № 3, 401—410 (РЖМат, 1983, 1В140)
77. —, Асимптотика вероятностей больших уклонений для критических марковских ветвящихся процессов. Вестник МГУ. Сер. мат., мех., 1983, № 1, 7—9 (РЖМат, 1983, 4В63)
78. *Маматов М. М., Ибрагимов Р.*, Локальная предельная теорема для надкритических ветвящихся процессов с непрерывным временем с двумя типами частиц. В сб. «Предельн. теоремы, случайн. процессы и их прилож.». Ташкент: Фан, 1979, 143—150 (РЖМат, 1979, 12В138)
79. —, —, О предельных теоремах для надкритических ветвящихся процессов непрерывного времени с конечными типами частиц. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 6, 26—28 (РЖМат, 1982, 7В106)
80. *Митов К. В.*, Условная предельная теорема для докритического ветвящегося процесса с иммиграцией. Мат. и мат. образов. Докл. 11 пролет. конф. Съюза мат. България, Слънчев бряг, 6—9 апр., 1982. София, 1982, 398—403 (РЖМат, 1982, 11В123)
81. —, Предельные теоремы для ветвящихся процессов с иммиграцией, зависящей от состояния процесса. Докл. Болг. АН 1983, *36*, № 2, 189—192 (РЖМат, 1983, 9В97)
82. *Мухамедханова Р. И.*, Оценка скорости сходимости к показательному закону в критическом ветвящемся случайном процессе с непрерывным временем. В сб. «Случайн. процессы и статист. выводы». Ташкент: Фан, 1971, 42—45 (РЖМат, 1973, 1В122)
83. —, *Ганиев А.*, Асимптотическое разложение для вероятности продолжения ветвящегося случайного процесса с дискретным временем в крити-

ческом случае. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1969, № 6, 59—61 (РЖМат, 1970, 11В71)
84. —, *Форманов Ш. К.*, Предельные теоремы для ветвящихся процессов с непрерывным временем, начинающихся с большого числа частиц. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 5, 10—14 (РЖМат, 1971, 5В94)
85. *Нагаев А. В.*, Об оценке среднего числа непосредственных потомков частицы в ветвящемся случайном процессе. Теория вероятностей и ее применения, 1967, *12*, № 2, 363—369 (РЖМат, 1968, 1В47)
86. —, Одна предельная теорема для надкритического ветвящегося процесса. Мат. заметки, 1971, *9*, № 5, 585—592 (РЖМат, 1971, 11В126)
87. —, *Бадалбаев И.*, Уточнение некоторых теорем о ветвящихся случайных процессах. Лит. мат. сб., 1967, *7*, № 1, 129—136 (РЖМат, 1968, 10В65)
88. —, —, О моменте перескока растущего уровня надкритическим процессом Гальтона — Ватсона. В сб. «Случайн. процессы и стат. выводы». Вып. 3. Ташкент: Фан, 1973, 132—135 (РЖМат, 1973, 11В160)
89. *Нагаев С. В.*, Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем. I, II. Сиб. мат. ж., 1974, *15*, № 2, 368—394; № 3, 570—579 (РЖМат, 1974, 8В80; 11В97)
90. —, Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20*, № 1, 178—180 (РЖМат, 1975, 10В75)
91. —, *Асадуллин М. Х.*, Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1981, *26*, № 2, 427—428 (РЖМат, 1981, 10В119)
92. —, *Вахрушев Н. В.*, Оценка вероятностей больших уклонений для критического процесса Гальтона — Ватсона. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20*, № 1, 181—182 (РЖМат, 1975, 10В76)
93. *Полин А. К.*, Предельные теоремы для разложимых критических ветвящихся процессов. Мат. сб., 1976, *100*, № 3, 420—435 (РЖМат, 1976, 12В156)
94. —, Предельные теоремы для разложимых ветвящихся процессов с финальными типами. Мат. сб., 1977, *104*, № 1, 151—161 (РЖМат, 1978, 2В122)
95. —, Предельные теоремы для ветвящихся процессов с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 4, 766—773 (РЖМат, 1978, 5В89)
96. *Рахимов И.*, О некоторых свойствах надкритических ветвящихся процессов с иммиграцией. В сб. «Вероятностн. процессы и мат. стат.». Ташкент: Фан, 1978, 138—143 (РЖМат, 1978, 12В149)
97. —, О критических процессах Гальтона — Ватсона с растущей иммиграцией. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 4, 22—27 (РЖМат, 1979, 1В135)
98. —, Некоторые теоремы для ветвящихся процессов с непрерывным временем и зависящей от времени иммиграцией. Сб. научн. тр. Ташкент. гос. пед. ин-та им. Низами, 1978, *240*, 57—63 (РЖМат, 1979, 8В92)
99. —, Надкритические ветвящиеся процессы с иммиграцией убывающей интенсивности. В сб. «Предельн. теоремы, случайн. процессы и их прилож.». Ташкент: Фан, 1979, 171—175 (РЖМат, 1979, 12В139)
100. —, О ветвящихся случайных процессах с растущей иммиграцией. Докл. АН УзССР, 1981, № 1, 3—5 (РЖМат, 1981, 8В127)
101. —, Переходные явления в ветвящихся случайных процессах с иммиграцией. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 5, 30—35 (РЖМат, 1982, 5В103)
102. —, Докритические ветвящиеся процессы с неоднородной иммиграцией. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1983, № 3, 14—19 (РЖМат, 1983, 12В83)
103. *Рахман С.*, О статистическом определении параметров ветвящегося процесса с одним типом частиц. В сб. «Теория случайн. процессов. Вопр. стат. и упр.». Киев: 1974, 161—165 (РЖМат, 1976, 1В377)

104. —, Некоторые предельные теоремы для ветвящихся процессов. В сб. «Теория случайн. процессов. Вопр. стат. и упр.». Киев: 1974, 150—160 (РЖМат, 1976, 3В147)
105. *Савин А. А., Чистяков В. П.*, Некоторые теоремы для ветвящихся процессов с несколькими типами частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1962, *7*, № 1, 95—104 (РЖМат, 1964, 4В44)
106. *Сагитов С. М.*, Критические ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц и иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1982, *27*, № 2, 348—353 (РЖМат, 1982, 10В70)
107. —, Общие предки в критических ветвящихся процессах Беллмана — Харриса с несколькими типами частиц. Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1982, № 3, 66—69 (РЖМат, 1983, 3В121)
108. —, Вероятность попадания в нуль критического ветвящегося процесса с иммиграцией. Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. н., 1982, № 5, 63—65 (РЖМат, 1983, 4В176)
109. —, Предельная теорема для критического ветвящегося процесса общего вида. Мат. заметки, 1983, *34*, № 3, 453—461 (РЖМат, 1984, 1В144)
110. —, Предельные теоремы для многомерных критических ветвящихся процессов с иммиграцией. Докл. АН СССР, 1983, *271*, № 5, 1066—1069 (РЖМат, 1984, 1В145)
111. *Севастьянов Б. А.*, Математические ожидания функций от сумм случайного числа независимых слагаемых. Мат. заметки, 1968, *3*, № 4, 387—394 (РЖМат, 1968, 10В14)
112. —, Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса. Теория вероятностей и ее применения, 1967, *12*, № 1, 179—183 (РЖМат, 1967, 9В50)
113. —, О регулярности ветвящихся процессов. Мат. заметки, 1967, *1*, № 1, 53—62 (РЖМат, 1967, 9В51)
114. —, Теория ветвящихся процессов. В сб. «Теория вероятностей. Матем. статистика. Теор. кибернетика». 1967. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М.: 1968, 5—48 (РЖМат, 1969, 8В40)
115. —, Уравнения типа восстановления и моменты ветвящихся процессов. Мат. заметки. 1968, *3*, № 1, 3—14 (РЖМат, 1968, 9В54)
116. —, Необходимое условие регулярности ветвящихся процессов. Мат. заметки, 1970, *7*, № 4, 389—396 (РЖМат, 1970, 11В68)
117. —, Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
118. —, Ограниченные снизу ветвящиеся процессы. Докл. АН СССР, 1978, *238*, № 4, 811—813 (РЖМат, 1978, 8В129)
119. —, *Чистяков В. П.*, Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов. В сб. «Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969. Ч. I». Новосибирск: 1969, 253—268 (РЖМат, 1970, 5В91)
120. —, —, Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1971, *16*, № 2, 201—217 (РЖМат, 1971, 12В195)
121. *Селиванов Б. И.*, Некоторые явные формулы в теории ветвящихся случайных процессов с дискретным временем и одним типом частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1969, *14*, № 2, 348—354 (РЖМат, 1970, 1В92)
122. *Топчий В. А.*, Асимптотическое разложение для вероятности продолжения критических процессов Беллмана — Харриса. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 3,665—674 (РЖМат, 1977, 11В78)
123. —, Предельные теоремы для критических, зависящих от возраста частиц ветвящихся процессов. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 5, 1176—1187 (РЖМат, 1978, 5В95)
124. —, Интегральная предельная теорема для критических ветвящихся процессов Крампа — Мода — Ягерса с дискретным временем. Препринт. Новосибирск: 1977, 15 с., илл. (РЖМат, 1978, 11В133)
125. —, Об асимптотике вероятности продолжения критических общих вет-

вящихся процессов. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 1, 55—57 (РЖМат, 1980, 8В81)
126. —, Локальная предельная теорема для критических процессов Беллмана — Харриса с дискретным временем. Предел. теоремы теории вероятностей и смеж. вопр. Новосибирск: 1982, 97—122 (РЖМат, 1982, 8В116)
127. —, Асимптотика вероятности продолжения критических общих ветвящихся процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1982, *27*, № 4, 667—683 (РЖМат, 1983, 6В99)
128. *Форманов Ш. К., Ибрагимов Р.*, Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией в критическом случае. В сб. «Научн. труды Ташкент. ун-та», 1970, вып. 394, 176—184 (РЖМат, 1972, 1В169)
129. —, —, Локальная предельная теорема для надкритических ветвящихся случайных процессов с двумя типами частиц. В сб. «Предельн. теоремы для случайн. процессов». Ташкент: Фан, 1977, 128—141 (РЖМат, 1977, 7В79)
130. *Хайруллин Р. Х.*, Об оценивании критического параметра ветвящегося процесса с n типами частиц. В сб. «Исследов. по прикл. мат.», Казань: 1979, № 6, 104—112 (РЖМат, 1980, 3В239)
131. *Харламов Б. П.*, О номерах поколений частиц в ветвящемся процессе с перекрывающимися генерациями. Теория вероятностей и ее применения, 1969, *14*, № 1, 44—50 (РЖМат, 1969, 11В78)
132. *Харрис Т. Е.*, Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с. (РЖМат, 1966, 12В44К)
133. *Черкасов И. Д.*, Об одном свойстве производящей функции ветвящегося процесса. В сб. «Материалы 27-ой Межвузовск. научн. конференции матем. кафедр пед. ин-тов Уральской зоны, 1969». Ижевск: 1969, 143—145 (РЖМат, 1969, 12В77)
134. *Чистяков В. П.*, Некоторые предельные теоремы для ветвящихся процессов с иммиграцией. Теория вероятностей и ее применения, 1970, *15*, № 2, 254—268 (РЖМат, 1970, 11В76)
135. —, Некоторые предельные теоремы для ветвящихся процессов с финальным типом. Теория вероятностей и ее применения, 1970, *15*, № 3, 529—535 (РЖМат, 1971, 3В66)
136. —, О сходимости ветвящихся процессов к диффузионным. Теория вероятностей и ее применения, 1970, *15*, № 4, 727—731 (РЖМат, 1971, 5В92)
137. —, Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса. Теория вероятностей и ее применения, 1971, *16*, № 4, 638—648 (РЖМат, 1972, 4В69)
138. —, Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1972, *17*, № 1, 55—70 (РЖМат, 1972, 6В62)
139. —, О переходных явлениях в ветвящихся процессах с несколькими типами частиц. Теория вероятностей и ее применения, 1972, *17*, № 4, 669—678 (РЖМат, 1973, 4В114)
140. *Шуренков В. М.*, Замечание об уравнении многомерного восстановления. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20*, № 4, 848—851
141. —, Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 3, 548—558 (РЖМат, 1977, 1В115)
142. —, Об аддитивных функционалах от ветвящихся процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1979, *24*, № 2, 389—394 (РЖМат, 1979, 10В90)
143. *Якымив А. Л.*, Докритические и надкритические редуцированные ветвящиеся процессы. МГУ. М., 1980. 19 с. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 5 июня 1980 г., № 2226—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9В112)

144. —, Редуцированные ветвящиеся процессы. Теория вероятностей и ее применения, 1980, *25*, № 3, 593—596 (РЖМат, 1981, 1В129)
145. —, Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана—Харриса. Мат. сб., 1981, *115*, № 3, 463—477 (РЖМат, 1981, 12В178)
146. *Янев Н. М.*, Об одном классе разложимых ветвящихся процессов, зависящих от возраста частиц. «Math. balkan.», 1972, *2*, 58—75 (РЖМат, 1973, 8В82)
147. —, Разклоняващи се случайни процеси с имиграция. Изв. Мат. ин-т. Бълг. АН, 1974, *15*, 71—88 (РЖМат, 1975, 8В66)
148. —, О статистике ветвящихся процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20*, № 3, 623—633 (РЖМат, 1976, 1В380)
149. —, *Данчева С.*, Оценивание дисперсии в ветвящемся процессе с иммиграцией. В сб. «Мат. и мат. образов. Докл. 8-ма пролет. конф. Съюза мат. България, Слънчев бряг, 1979». София: 1979, 608—616
150. *Ades M., Dion J.-P., L'abelle G., Nanthi K.*, Recurrence formula and the maximum likelihood estimation of the age in a simple branching process. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 4, 776—784 (РЖМат, 1983, 6В263)
151. *Agresti A.*, Bounds on the extinction time distribution of a branching process. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 2, 322—335 (РЖМат, 1975, 1В153)
152. *Asmussen S.*, Convergence rates for branching processes. Ann. Probab., 1976, *4*, № 1, 139—146 (РЖМат, 1977, 1В110)
153. —, Almost sure behavior of linear functionals of supercritical branching processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *231*, № 1, 233—248 (РЖМат, 1978, 5В94)
154. —, Some martingale methods in the limit theory of supercritical branching processes. Branch. Process., New York — Basel, 1978, 1—26 (РЖМат, 1979, 10В80)
155. —, *Hering H.*, Strong limit theorems for supercritical immigration-branching processes. Math. scand., 1976, *39*, № 2, 327—342 (РЖМат, 1978, 5В93)
156. —, —, Branching processes. Boston et al.: Birkhäuser, 1983, 461 pp.
157. —, *Keiding N.*, Martingale central limit theorems and asymptotic estimation theory for multitype branching processes. Adv. Appl. Probab., 1978, *10*, № 1, 109—129 (РЖМат, 1978, 12В356)
158. *Athreya K. B.*, Some results on multitype continuous time Markov branching processes. Ann. Math. Stat., 1968, *39*, № 2, 347—357 (РЖМат, 1971, 7В110)
159. —, Limit theorems for multitype continuous time Markov branching processes. I. The case of an eigenvector linear functional. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, *12*, № 4, 320—322 (РЖМат, 1969, 12В73)
160. —, Limit theorems for multitype continuous time Markov branching processes. II. The case of an arbitrary linear functional. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, *13*, № 3—4, 204—214 (РЖМат, 1970, 6В92)
161. —, On the supercritical one dimensional age-dependent branching processes. Ann. Math. Stat., 1969, *40*, № 3, 743—763 (РЖМат, 1971, 6В94)
162. —, A simple proof of a result of Kesten and Stigum on supercritical multitype Galton-Watson branching process. Ann. Math. Stat., 1970, *41*, № 1, 195—202 (РЖМат, 1971, 7В112)
163. —, Some refinements in the theory of supercritical multitype Markov branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *20*, № 1, 47—57 (РЖМат, 1972, 2В84)
164. —, On the absolute continuity of the limit random variable in the supercritical Galton—Watson branching process. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 30, № 3, 563—565 (РЖМат, 1973, 11В153)
165. —, A note on a functional equation arising in Galton—Watson branching processes. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 3, 589—598 (РЖМат, 1972, 3В96)
166. —, *Kaplan N.*, Convergence of the age distribution in the one-dimensional

supercritical age-dependent branching process. Ann. Probab., 1976, *4*, № 1, 38—50 (РЖМат, 1977, 1В114)

167. —, —, Additive property and its applications in branching processes. Branch. Process., New York—Basel, 1978, 27—60 (РЖМат, 1979, 9В83)

168. —, *Keiding N.*, Estimation theory for continuous-time branching processes. Sankhya, 1977, *A39*, № 2, 101—123 (РЖМат, 1978, 11В316)

169. —, *Ney P.*, The local limit theorem and some related aspects of supercritical branching processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, *152*, № 1, 233—251 (РЖМат, 1971, 7В111)

170. —, —, Branching processes. Berlin et al., Springer, 1972. xi, 287 pp. (РЖМат, 1973, 5В109)

171. —, —, Functionals of critical multitype branching processes. Ann. Probab., 1974, *2*, № 2, 339—343 (РЖМат, 1975, 1В150)

172. —, *Parthasarathy P. R.*, *Sankaranarayanan G.*, Supercritical age-dependent branching processes with immigration. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 4, 695—702 (РЖМат, 1975, 8В64)

173. *Bagley J. H.*, Asymptotic properties of subcritical Galton-Watson processes. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 3, 510—517 (РЖМат, 1983, 3В118)

174. *Barbour A. D.*, *Pakes A. G.*, Limit theorems for the simple branching process allowing immigration. II. The case of infinite offspring mean. Adv. Appl. Probab., 1979, *11*, № 1, 31—63 (РЖМат, 1979, 8В90)

175. —, *Schuh H.-J.*, Functional normalizations for the branching process with infinite mean. J. Appl. Probab., 1979, *16*, № 3, 513—525 (РЖМат, 1980, 4В60)

176. *Basawa I. V.*, *Scott D. J.*, Efficient tests for branching processes. Biometrika, 1976, *63*, № 3, 531—536 (РЖМат, 1977, 7В196)

177. *Becker N.*, On parametric estimation for mortal branching processes. Biometrika, 1974, *61*, № 3, 393—399 (РЖМат, 1975, 8В108)

178. —, Estimation for discrete time branching processes with application to epidemics. Biometrics, 1977, *33*, № 3, 515—522 (РЖМат, 1978, 12В357)

179. *Berndtsson B.*, *Jagers P.*, Exponential growth of a branching process usually imply stable age distribution. J. Appl. Probab., 1979, *16*, № 3, 651—656 (РЖМат, 1980, 4В61)

180. *Bhat B. R.*, *Adke S. R.*, Maximum likelyhood estimation for branching processes with immigration. Adv. Appl. Probab., 1981, *13*, № 3, 498—509 (РЖМат, 1982, 1В398)

181. *Biggins J. D.*, The first- and last-birth problems for a multitype age-dependent branching process. Adv. Appl. Probab., 1976, *8*, № 3, 446—459 (РЖМат, 1977, 5В91)

182. —, *Shanbhag D. N.*, Some divisibility problems in branching processes. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1981, *90*, № 2, 321—330 (РЖМат, 1982, 1В212)

183. *Bingham N. H.*, *Doney R. A.*, Asymptotic properties of supercritical branching processes. I. The Galton—Watson process. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 4, 711—731 (РЖМат, 1975, 10В71)

184. —, —, Asymptotic properties of supercritical branching processes. II. Crump-Mode and Jirina processes. Adv. Appl. Probab., 1975, *7*, № 1, 66—82 (РЖМат, 1975, 12В145)

185. *Boyd A. V.*, Formal power series and the total progeny in a branching process. J. Math. Anal. and Appl., 1971, *34*, № 3, 565—566 (РЖМат, 1972, 4В66)

186. *Braun H.*, Polynomial bounds for probability generating functions. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 3, 507—514 (РЖМат, 1976, 5В13)

187. —, Polynomial bounds for probability generating functions, II. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1978, *42*, № 1, 13—21 (РЖМат, 1978, 7В6)

188. *Brockwell P. J.*, Bounds for the asymptotic growth rate of an age-dependent branching process. J. Austral. Math. Soc., 1969, *10*, № 1—2, 231—235 (РЖМат, 1970, 4В87)

189. *Buckholtz P. G.*, *Wasan M. T.*, Diffusion approximation of the two-type

Galton—Watson process with mean matrix close to the identity. J. Multivar. Anal., 1982, *12*, № 4, 493—507 (РЖМат, 1983, 5В128)
190. *Buiculescu M.*, On quasi-stationary distributions for multitype Galton—Watson processes. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 1, 60—68 (РЖМат, 1975, 12В142)
191. *Bühler W. J.*, Slowly branching processes. Ann. Math. Stat., 1967, *38*, № 3, 919—921 (РЖМат, 1971, 10В131)
192. —, Ein zentraler Grenzwertsatz für Verzweigungsprozesse. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, *11*, № 2, 139—141 (РЖМат, 1969, 11В25)
193. —, Generations and degree of relationship in supercritical Markov branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *18*, № 2, 141—152 (РЖМат, 1971, 7В109)
194. —, On the family structure of populations. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 2, 192—193 (РЖМат, 1975, 2В106)
195. —, The distribution of generations and other aspects of the family structure of branching processes. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 1970, *3*, 463—480
196. —, *Mellein B.*, Anwendungen lokaler Grenzwersätze für Galton—Watson—Prozesse. Proc. 6th Conf. Probab. Theory, Brašov, Sept. 10—15, 1979. Bucureşti, 1981, 35—44 (РЖМат, 1982, 6В113)
197. *Carvalho M. L., Müller D.*, Processus de ramification multitypes. Quelques résultats asymptotiques. C. r. Acad. sci., 1983, ser. 1, *296*, № 7, 337—340 (РЖМат, 1983, 9В93)
198. *Cheong C. K.*, Quasi-stationary distributions for the continuous-time Galton—Watson process. Bull. Soc. math. Belg., 1972, *24*, № 4, 343—350 (РЖМат, 1974, 7В124)
199. *Chover J., Ney P., Wainger S.*, Degeneracy properties of subcritical branching processes. Ann. Probab., 1973, *1*, № 4, 663—674
200. *Cohn H.*, Almost sure convergence of branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1977, *38*, № 1, 73—81 (РЖМат, 1977, 11В76)
201. —, On the convergence of the supercritical branching processes with immigration. J. Appl. Probab., 1977, *14*, № 2, 387—390 (РЖМат, 1978, 5В86)
202. —, Harmonic functions for a class of Markov chains. J. Austral. Math. Soc., 1979, *A28*, № 4, 413—422 (РЖМат, 1980, 7В45)
203. —, *Pakes A. G.*, A representation for the limiting random variable of a branching process with infinite mean and some related problems. J. Appl. Probab., 1978, *15*, № 2, 225—234 (РЖМат, 1979, 2В146)
204. —, *Schuh H.-J.*, On the continuity and the positivity of the finite part of the limit distribution of an irregular branching process with infinite mean. J. Appl. Probab., 1980, *17*, № 3, 696—703 (РЖМат, 1981, 5В100)
205. *Crump K. S.*, On systems of renewal equations. J. Math. Anal. and Appl., 1970, *30*, № 2, 425—434 (РЖМат, 1971, 2В77)
206. —, On systems of renewal equations: the reducible case. J. Math. Anal. and Appl., 1970, *31*, № 3, 517—528 (РЖМат, 1971, 4В81)
207. —, Migratory populations in branching processes. J. Appl. Probab., 1970, *7*, № 3, 565—572 (РЖМат, 1971, 6В97)
208. —, *Howe R. B.*, Nonparametric estimation of the age of a Galton—Watson branching process. Biometrika, 1972, *59*, № 3, 533—538 (РЖМат, 1973, 5В239)
209. —, —, Estimating the age of a Bellman-Harris branching process. Math. Biosci., 1974, *19*, № 1—2, 175—184 (РЖМат, 1974, 9В367)
210. —, *Mode C. J.* A general age-dependent branching process. I. J. Math. Anal. and Appl., 1968, *24*, № 3, 494—508 (РЖМат, 1969, 6В55)
211. —, —, A general age-dependent branching process. II. J. Math. Anal. and Appl., 1969, *25*, № 1, 8—17 (РЖМат, 1969, 11В79)
212. *Cryer J. D., Robertson T.*, Isotonic estimation of the probability of extin-

ction of a branching process. J. Amer. Statist. Assoc., 1975, *70*, № 352, 905—912 (РЖМат, 1976, 8В212)
213. *Daley D. J.*, Extinction probabilities in branching processes: a note on Holgate and Lakhani's paper. Bull. Math. Biophys., 1969, *31*, № 1, 35—37 (РЖМат, 1969, 12В71)
214. —, *Narayan P.*, Series expansions of probability generating functions and bounds for the extinction probability of a branching process. J. Appl. Probab., 1980, *17*, № 4, 939—947 (РЖМат, 1981, 6В21)
215. *Daly F.*, On a general branching process. J. Appl. Probab., 1981, *18*, № 1, 253—255 (РЖМат, 1981, 9В76)
216. *Darling D. A.*, The Galton—Watson process with infinite mean. J. Appl. Probab., 1970, *7*, № 2, 455—456 (РЖМат, 1971, 4В73)
217. *Davies P. L.*, The simple branching process: a note on convergence when the mean is infinite. J. Appl. Probab., 1978, *15*, № 3, 466—480 (РЖМат, 1979, 8В88)
218. *Dayanithy K.*, Spectralities of branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *20*, № 4, 279—307 (РЖМат, 1972, 3В100)
219. —, Representation of branching processes. The critical case. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, *22*, № 4, 268—292 (РЖМат, 1972, 12В69)
220. *Deistler M., Feichtinger G.*, The linear model formulation of a multitype branching process applied to population dynamics. J. Amer. Statist. Assoc. 1974, *69*, № 347, 662—664 (РЖМат, 1975, 6В399)
221. *Dion J.-P.*, Estimation of the mean and the initial probabilities of a branching process. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 4, 687—694 (РЖМат, 1975, 8В69)
222. —, Estimation of the variance of a branching process. Ann. Statist., 1975, *3*, № 5, 1183—1187 (РЖМат, 1976, 5В297)
223. —, *Keiding N.*, Statistical inference in branching processes. Branch. Process., New York — Basel, 1978, 105—140 (РЖМат, 1979, 10В151)
224. —, *Labelle G., Latour A.*, Small-sample result for maximum-likelihood estimation in branching processes. Can. J. Statist., 1983, *10*, № 4, 271—276 (РЖМат, 1983, 12В283)
225. *Doney R. A.*, The progeny of a branching process. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 2, 407—412 (РЖМат, 1971, 11В128)
226. —, Age-dependent birth and death processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, *22*, № 1, 69—90 (РЖМат, 1972, 6В61)
227. —, A limit theorem for a class of supercritical branching processes. J. Appl. Probab., 1972, *9*, № 4, 707—724 (РЖМат, 1973, 8В83)
228. —, On a functional equation for general branching processes. J. Appl. Probab., 1973, *10*, № 1, 198—205 (РЖМат, 1973, 11В157)
229. —, On single- and multi-type general age-dependent branching processes. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 2, 239—246 (РЖМат, 1977, 4В95)
230. —, A note on the subcritical generalized age-dependent branching process. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 4, 798—803 (РЖМат, 1977, 10В79)
231. *Dubuc S.*, Positive harmonic functions of a branching process. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, *21*, № 2, 324—326 (РЖМат, 1969, 11В80)
232. —, La fonction de Green d'un processus de Galton — Watson. Studia math., 1970, *34*, № 1, 69—87 (РЖМат, 1970, 12В78)
233. —, La densité de la loi-limite d'un processus en cascade expansif. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *19*, № 4, 281—290 (РЖМат, Ann. Probab., 1976, *4*, № 3, 490—496 (РЖМат, 1977, 5В97)
234. —, Martin boundaries of Galton—Watson processes. Branch. Process., New York—Basel, 1978, 141—157 (РЖМат, 1979, 9В76)
235. —, *Seneta E.*, The local limit theorem for the Galton—Watson process. Probab., 1976, *4*, № 3, 490—496 (РЖМат, 1977, 5В97)
236. *Duby C., Rouault A.*, Estimation simultanée de l'espérance et de la variance pour un processus de Galton—Watson. C. r. Acad. sci., 1980, *AB290*, № 7, A339—A341 (РЖМат, 1980, 9В219)

237. *Durham S. D.*, Limit theorems for a general critical branching process. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 1, 1—16 (РЖМат, 1971, 11В125)
238. —, A problem concerning generalized age-dependent branching processes with immigration. Ann. Math. Stat., 1971, *42*, № 3, 1121—1123 (РЖМат, 1972, 2В87)
239. —, Limiting distributions for the general branching process with immigration. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 4, 809—813 (РЖМат, 1975, 8В65)
240. *Durrett R.*, The genealogy of critical branching processes. Stochast. Process. and Appl., 1978, *8*, № 1, 101—116 (РЖМат, 1979, 5В148)
241. *Dwass M.*, The total progeny in a branching process and a related random walk. J. Appl. Probab., 1969, *6*, № 3, 682—686 (РЖМат, 1970, 11В70)
242. *Edler L.*, On the first birth and the last death in a generation in a multitype Markov brancting process. Stochast. Process. and Appl., 1979, *9*, № 2, 175—187 (РЖМат, 1980, 3В122)
243. *Erickson R. V.*, On the existence of absolute moments for the extinction time of a Galton—Watson process. Ann. Math. Stat., 1971, *42*, № 3, 1124—1128 (РЖМат, 1972, 2В88)
244. *Eschenbach W.*, *Winkler W.*, Maximum-Likelihood-Schätzungen beim Verweigungsprozess von Walton—Watson. Math. Operationsforsch. und Statist., 1975, *6*, № 2, 213—224 (РЖМат, 1976, 1В379)
245. *Esty W. W.*, Critical age-dependent branching processes. Ann. Probab., 1975, *3*, № 1, 49—60 (РЖМат, 1975, 11В83)
246. —, Critical age-dependent branching process diffusions. Stochast. Process. and Appl., 1975, *3*, № 2, 209—220 (РЖМат, 1976, 1В162)
247. —, The reverse Galton—Watson process. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 3, 574—580 (РЖМат, 1976, 5В108)
248. —, Diffusion limits of critical branching processes conditioned on extinction in the near future. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 2, 247—254 (РЖМат, 1977, 4В90)
249. *Evans L. S.*, An upper bound for the mean of Yaglom's limit. J. Appl. Probab., 1978, *15*, № 1, 199—201 (РЖМат, 1978, 12В146)
250. *Fahady K. S.*, *Quine M. P.*, *Vere-Jones D.*, Heavy traffic approximations for the Galton—Watson process. Adv. Appl. Probab., 1971, *3*, № 2, 282—300 (РЖМат, 1972, 3В99)
251. *Fildes R.*, An age-dependent branching process with variable lifetime distribution. Adv. Appl. Probab., 1972, *4*, № 3, 453—474 (РЖМат, 1973. 8В85)
252. *Fleischmann K.*, *Prehn U.*, Ein Grenzwertsatz für subkritische Verweigungsprozesse mit endlich vielen Typen von Teilchen. Math. Nachr., 1974, *64*, 357—362 (РЖМат, 1975, 8В68)
253. —, *Siegmund-Schultze R.*, The structure of reduced critical Galton—Watson processes. Math. Nachr., 1977, *79*, 233—241 (РЖМат, 1978, 3В82)
254. *Foster J. H.*, A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration. Ann. Math. Stat., 1971, *42*, № 5, 1773—1776 (РЖМат, 1972, 5В73)
255. —, *Ney P.*, Decomposable critical multi-type branching processes. Sankhya, 1976, *A38*, № 1, 28—37 (РЖМат, 1978, 2В124)
256. —, —, Limit laws for decomposable critical branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1978, *46*, № 1, 13—43 (РЖМат, 1979, 8В86)
257. —, *Williamson J. A.*, Limit theorems for the Galton—Watson process with time-dependent immigration. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *20*, № 3, 227—235 (РЖМат, 1972, 1В168)
258. *Freedman D.*, *Purves R.*, Timid play is optimal. II. Ann. Math. Stat., 1967, *38*, № 4, 1284—1285 (РЖМат, 1971, 9В9)
259. *Gani J.*, *Saunders I. W.*, On the parity of individuals in a branching process. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 2, 219—230 (РЖМат, 1977, 4В94)
260. *Ganuza E. Z.*, *Durham S. D.*, Meansquare and almost-sure convergence of supercritical age-dependent branching processes. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 4, 678—686 (РЖМат, 1975, 8В63)
261. *Goldstein M. I.*, Critical age-dependent branching processes: single and

multitype. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *17*, № 1, 74—88 (РЖМат, 1971, 10В133)
262. —, Limit theorems for the critical age-dependent branching process with infinite variance. Stochast. Process. and Appl., 1977, *5*, № 3, 297—305 (РЖМат, 1978, 8В132)
263. —, A uniform limit theorem and exponential limit law for critical multitype age-dependent branching processes. J. Appl. Probab., 1978, *15*, № 2, 235—242 (РЖМат, 1979, 2В148)
264. —, *Hoppe F. M.*, Necessary conditions for normed convergence of critical Bienaymé—Galton—Watson processes without variance. J. Multivar. Anal., Anal., 1978, *8*, № 1, 55—62 (РЖМат, 1978, 12В151)
265. —, —, Critical multitype branching processes with infinite variance. J. Math. Anal. and Appl., 1978, *65*, № 3, 675—686 (РЖМат, 1979, 4В80)
266. —, —, Necessary and sufficient lifetime conditions for normed convergence of critical age-dependent processes with infinite variance. Ann. Probab., 1981, *9*, № 3, 490—497 (РЖМат, 1982, 1В215)
267. *Good I. J.*, The Lagrange distributions and branching processes. SIAM J. Appl. Math., 1975, *28*, № 2, 270—275 (РЖМат, 1975, 11В85)
268. *Gorostiza L. G.*, A note on the limits of branching processes. Bol. Soc. mat. mex., 1976, *21*, № 2, 62—64 (РЖМат, 1980, 9В111)
269. *Green P. J.*, Conditional limit theorems for general branching processes. J. Appl. Probab., 1977, *14*, № 3, 451—463 (РЖМат, 1978, 5В92)
270. —, Modelling yeast cell growth using stochastic branching processes. J. Appl. Probab., 1981, *18*, № 4, 799—808 (РЖМат, 1982, 6В380)
271. *Grey D. R.*, Explosiveness of age-dependent branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1974, *28*, № 2, 129—137 (РЖМат, 1974, 9В73)
272. —, Two necessary conditions for embeddability of a Galton—Watson branching process. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1975, *78*, № 2, 339—343 (РЖМат, 1976, 3В149)
273. —, On possible rates of growth of age-dependent branching processes with immigration. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 1, 138—143 (РЖМат, 1976, 12В152)
274. —, Almost sure convergence in Markov branching processes with infinite mean. J. Appl. Probab., 1977, *14*, № 4, 702—716 (РЖМат, 1978, 12В144)
275. —, Three lemmas after Besicovitch and their applications in probability theory. J. London Math. Soc., 1978, *18*, № 1, 173—180 (РЖМат, 1979, 1В131)
276. —, On regular branching processes with infinite mean. Stochast. Process. and Appl., 1979, *8*, № 3, 257—267 (РЖМат, 1979, 11В104)
277. —, A new look at convergence in branching processes. Ann. Probab., 1980, *8*, № 2, 377—380 (РЖМат, 1980, 12В111)
278. *Grimvall A.*, On the convergence of sequences of branching processes. Ann. Probab., 1974, *2*, № 6, 1027—1045 (РЖМат, 1975, 10В73)
279. *Heathcote C. R., Seneta E., Vere-Jones D.*, A refinement of two theorems in the theory of branching processes. Теория вероятностей и ее применения, 1967, *12*, № 2, 341—346 (РЖМат, 1968, 1В46)
280. *Heyde C. C.*, A rate of convergence result for the super-critical Galton—Watson process. J. Appl. Probab., 1970, *7*, № 2, 451—454 (РЖМат, 1971, 4В72)
281. —, Extension of a result of Seneta for the super-critical Galton—Watson process. Ann. Math. Stat., 1970, *41*, № 2, 739—742 (РЖМат, 1971, 7В115)
282. —, Some central limit analogues for supercritical Galton—Watson processes. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 1, 52—59 (РЖМат, 1971, 11В124)
283. —, Some almost sure convergence theorems for branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *20*, № 3, 189—192 (РЖМат, 1972, 1В167)
284. —, On estimating the variance of the offspring distribution in a simple branching process. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 3, 421—433 (РЖМат, 1975, 3В110)

285. —, Remarks on efficiency in estimation for branching processes. Biometrika, 1975, *62*, № 1, 49—55 (РЖМат, 1975, 10В111)
286. —, *Brown B. M.*, An invariance principle and some convergence rate results for branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *20*, № 4, 271—278 (РЖМат, 1972, 3В95)
287. —, *Leslie J. R.*, Improved classical limit analogues for Galton—Watson processes with or without immigration. Bull. Austral. Math. Soc., 1971, *5*, № 2, 145—155 (РЖМат, 1972, 3В93)
288. —, *Seneta E.*, Analogues of classical limit theorems for the supercritical Galton—Watson process with immigration. Math. Biosci., 1971, *11*, № 3-4, 249—259 (РЖМат, 1972, 3В94)
289. —, —, Studies in the history of probability and statistik XXXI. The simple branching process, a turning point test and a fundamental identity: a historical note on I. J. Bienayme. Biometrika, 1972, *59*, № 3, 680—683 (РЖМат, 1973, 5А13)
290. —, —, Estimation theory for growth and immigration rates in a multiplicative process. J. Appl. Probab., 1972, *9*, № 2, 235—256 (РЖМат, 1973, 1В212)
291. —, —, Notes on «Estimation theory for growth and immigration rates in a multiplicative process». J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 3, 572—577 (РЖМат, 1975, 5В359)
292. *Hoel D. G., Crump K. S.*, Estimating the generation-time distribution of an age-dependent branching process. Biometrics, 1974, *30*, № 1, 125—135 (РЖМат, 1974, 10В295)
293. *Holgate P., Lakhani K. H.*, Effect of offspring distribution on population survival. Bull. Math. Biophys., 1967, *29*, № 4, 831—839 (РЖМат, 1968, 12В76)
294. *Holte J. M.*, Extinction probability for a critical general branching process. Stochast. Process. and Appl., 1974, *2*, № 3, 303—309 (РЖМат, 1975, 3В112)
295. —, A generalization of Goldstein's comparison lemma and the exponential limit law in critical Crump—Mode—Jagers branching processes. Adv. Appl. Probab., 1976, *8*, № 1, 88—104 (РЖМат, 1977, 1В111)
296. —, Critical multitype branching processes. Ann. Probab., 1982, *10*, № 2, 482—495 (РЖМат, 1982, 11В108)
297. *Holzheimer J.*, Estymacja parametrów procesu Galtona—Watsona. Rocz. Pol. tow. mat., 1982, ser. 3, *20*, 73—84 (РЖМат, 1983, 6В269)
298. *Höpfner R.*, Local limit theorems for non-critical Galton—Watson processes with or without immigration. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 2, 262—271 (РЖМат, 1982, 11В116)
299. *Hoppe F. M.*, Stationary measures for multitype branching processes. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 2, 219—227 (РЖМат, 1976, 3В151)
300. —, Supercritical multitype branching processes. Ann. Probab., 1976, *4*, № 3, 393—401 (РЖМат, 1977, 5В89)
301. —, On a result of Rubin and Vere-Jones concerning subcritical branching processes. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 4, 804—808 (РЖМат, 1977, 10В74)
302. —, The critical Bienayme—Galton—Watson process. Stochast. Process. and Appl., 1977, *5*, № 1, 57—66 (РЖМат, 1977, 10В73)
303. —, Representation of invariant measures on multitype Galton—Watson processes. Ann. Probab., 1977, *5*, № 2, 291—297 (РЖМат, 1978, 2В120)
304. —, Convex solutions of a Schröder equation in several variables. Proc. Amer. Math. Soc.. 1977, *64*, № 2, 326—330 (РЖМат, 1978, 8В133)
305. —, On a Schröder equation arising in branching processes. Aequat. math., 1980, *20*, № 1, 33—37 (РЖМат, 1980, 10В89)
306. —, *Seneta E.*, Analytical methods for discrete branching processes. Branch. Process., New York—Basel, 1978, 219—261 (РЖМат, 1979, 10В81)
307. *Hudson I. L., Seneta E.*, A note on simple branching processes with infinite mean. J. Appl. Probab., 1977, *14*, № 4, 836—842 (РЖМат, 1979, 3В81)
308. *Imai H.*, Notes on a local limit theorem for discrete time Galton-Watson

branching processes. Ann. Inst. Statist. Math., 1968, *20*, № 3, 391—410 (РЖМат, 1969, 7В60)
309. —, Remarks to a local limit theorem for a Galton—Watson processes. Ann. Inst. Statist. Math., 1973, *25*, № 2, 453—455 (РЖМат, 1974, 6В85)
310. —, Convergence of functional iterates for branching processes. Ann. Inst. Statist. Math., 1972, *24*, № 3, 575—587 (РЖМат, 1973, 11В155)
311. *Jagers P.*, Age-dependent branching processes allowing immigration. Теория вероятностей и ее применения, 1968, *13*, № 2, 230—242 (РЖМат, 1968, 11В65)
312. —, Renewal theory and the almost sure convergence of branching processes. Arkiv mat., 1969, *7*, № 6, 495—504 (РЖМат, 1969, 7В59)
313. —, The proportions of individuals of different kinds in two-type populations. A branching process problem arising in biology. J. Appl. Probab., 1969, *6*, № 2, 249—260 (РЖМат, 1970, 6В284)
314. —, Diffusion approximations of branching processes. Ann. Math. Stat., 1971, *42*, № 6, 2074—2078 (РЖМат, 1972, 7В102)
315. —, Convergence of general branching processes and functionals thereof. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 3, 471—478 (РЖМат, 1975, 6В90)
316. —, Branching processes with biological applications. London, e. a., J. Wiley & Sons, 1975, xiii, 286 pp. (РЖМат, 1976, 8В98К)
317. —, How probable is it to be first born? and other branching-process applications to kinship problems. Math. Biosci., 1982, *59*, № 1, 1—15 (РЖМат, 1982, 12В484)
318. *Jiřina M.*, On Feller's branching diffusion processes. Časop. pestov. mat., 1969, *94*, № 1, 84—90 (РЖМат, 1969, 12В72)
319. —, A simplified proof of the Sevastyanov theorem on branching processes. Ann. Inst. H. Poincaré, 1970, *B6*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1970, 11В74)
320. —, Diffusion branching processes with several types of particles. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *18*, № 1, 34—46 (РЖМат, 1971, 7В120)
321. *Joffe A.*, Remarks on the structure of trees with applications to supercritical Galton—Watson processes. Branch. Process., New York—Basel, 1978, 263—267 (РЖМат, 1979, 9В86)
322. —, *Moncayo A. R.*, Random variables, trees, and branching random walks. Adv. Math., 1973, *10*, № 3, 401—416 (РЖМат, 1973, 11В158)
323. —, *Spitzer F.*, On multitype branching processes with $\rho \leqslant 1$. J. Math. Anal. and Appl., 1967, *19*, № 3, 409—430 (РЖМат, 1968, 8В60)
324. —, *Waugh W. A. O'N.*, Exact distributions of kin numbers in a Galton-Watson process. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 4, 767—775 (РЖМат, 1983, 6В92)
325. *Johnson R. A.*, *Susarla V.*, *Ryzin J. van*, Bayesian non-parametric estimation for age-dependent branching processes. Stochast. Process. and Appl., 1979, *9*, № 3, 307—318 (РЖМат, 1980, 9В222)
326. *Kaplan N.*, Tre multitype Galton—Watson process with immigration. Ann. Probab., 1973, *1*, № 6, 947—953
327. —, Multidimensional age-dependent branching processes allowing immigration: the limiting distribution. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 2, 225—236 (РЖМат, 1975, 1В155)
328. —, Limit theorems for the integral of a population process with immigration. Stochast. Process. and Appl., 1974, *2*, № 3, 281—294 (РЖМат, 1975, 3В118)
329. —, The supercritical multitype age-dependent branching process. J. Math. Anal. and Appl., 1975, *50*, № 1, 164—182 (РЖМат, 1975, 10В72)
330. —, A note on the age-dependent branching process with immigration. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 1, 130—134 (РЖМат, 1975, 11В76)
331. —, A note on the supercritical generalized age-dependent branching process. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 2, 341—345 (РЖМат, 1976, 4В105)
332. —, *Pakes A. G.*, Supercritical age-dependent branching processes with immigration. Stochast. Process. and Appl., 1974, *2*, № 4, 371—389 (РЖМат, 1975, 8В62)

333. *Karlin S., McGregor J.*, On the spectral representation of branching processes with mean one. J. Math. Anal. and Appl., 1968, *21*, № 3, 485—495 (РЖМат, 1968, 12В74)
334. —, —, Embeddability of discrete time simple branching processes into continuous time branching processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, *132*, № 1, 115—136 (РЖМат, 1971, 6В93)
335. *Keiding N.*, Estimation theory for branching processes, Bull. Int. Statist. Inst., 1975, *46*, № 4, 12—19
336. —, *Lauritzen S. L.*, Marginal maximum likelihood estimates and estimation of the offspring mean in a branching process. Scand. J. Statist. Theory and Appl., 1978, *5*, № 2, 106—110 (РЖМат, 1978, 12В354)
337. *Kendall D. G.*, Branching processes since 1873. J. London Math. Soc., 1966, *41*, № 3, 385—406 (РЖМат, 1968, 1В39)
338. *Kennedy D. P.*, The Galton—Watson process conditioned on the total progeny. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 4, 800—806 (РЖМат, 1976, 8В96)
339. *Kesten H., Stigum B. P.*, A limit theorem for multidimensional Galton—Watson processes. Ann. Math. Stat., 1966, *37*, № 5, 1211—1223 (РЖМат, 1971, 11В122)
340. —, —, Additional limit theorems for indecomposable multi-dimensional Galton-Watson processes. Ann. Math. Stat., 1966, *37*, № 6, 1463—1481 (РЖМат, 1971, 11В123)
341. —, —, Limit theorems for decomposable multi-dimensional Galton—Watson processes. J. Math. Anal. and Appl., 1967, *17*, № 2, 309—338 (РЖМат, 1968, 1В45)
342. *Khalili E.*, Lois de Bessel et limites exponentielles d'un processus de Galton-Watson critique sans extinction. C. r. Acad. sci., 1981, sér. 1, *292*, № 13, 645—648 (РЖМат, 1981, 12В177)
343. *Khalili-Françon E.*, Processus de Galton—Watson. Lect. Notes Math., 1973, *321*, 122—135 (РЖМат, 1973, 11В154)
344. *Kingman J. F.*, The first birth problem for an age-dependent branching process. Ann. Probab., 1975, *3*, № 5, 790—801 (РЖМат, 1976, 8В101)
345. *Kuczek T.*, On the convergence of empiric age distribution for one-dimensional supercritical age-dependent branching processes. Ann. Probab., 1982, *10*, № 1, 252—258 (РЖМат, 1982, 10В173)
346. —, Almost sure limit results for the supercritical Bellman—Harris process. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 3, 668—674 (РЖМат, 1983, 3В120)
347. *Kurtz T. G.*, Approximation of age dependent multitype branching processes. Ann. Math. Stat., 1970, *41*, № 2, 363—368 (РЖМат, 1971, 7В119)
348. —, Diffusion approximations for branching processes. Branch. Process., New York—Basel, 1978, 269—292 (РЖМат, 1979, 9В87)
349. —, *Wainger S.*, The nonexistence of the Yaglom limit for an age dependent subcritical branching process. Ann. Probab., 1973, *1*, № 5, 857—861
350. *Lamperti J.*, Limiting distributions for branching processes. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 2. Part 2. Berkeley — Los Angeles, 1967, 225—241 (РЖМат, 1970, 3В113)
351. —, *Ney P.*, Conditioned branching processes and their limiting diffusions. Теория вероятностей и ее применения, 1968, *13*, № 1, 126—137 (РЖМат, 1968, 8В59)
352. *Lange K.*, Minimum extinction probability for surnames and favorable mutations. Math. Biosci., 1981, *54*, № 1-2, 71—78 (РЖМат, 1982, 2В378)
353. —, *Boehnke M., Carson R.*, Moment computations for subcritical branching processes. J. Appl. Probab., 1981, *18*, № 1, 52—64 (РЖМат, 1981, 8В126)
354. *Leslie J. R.*, Some limit theorems for Markov branching processes. J. Appl. Probab., 1973, *10*, № 2, 299—306 (РЖМат, 1974, 2В121)
355. *Lindvall T.*, Convergence of critical Galton—Watson branching processes. J. Appl. Probab., 1972, *9*, № 2, 445—450 (РЖМат, 1973, 1В120)
356. —, Limit theorems for some functionals of certain Galton—Watson branching processes. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 2, 309—321 (РЖМат, 1975, 4В112)

357. —, On the maximum of a branching process. Scand. J. Statist. theory and Appl., 1976, *3*, № 4, 209—214 (РЖМат, 1977, 10В72)
358. *Lockhart R.*, On the non-existence of consistent estimates in Galton—Watson processes. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 4, 842—846 (РЖМат, 1983, 6В264)
359. *Lootgieter J.-C.*, Processus de Galton—Watson de moyenne 1. C. r. Acad. sci., 1969, *268*, № 15, A817—A818 (РЖМат, 1970, 2В97)
360. —, La σ-algèbre asymptotique d'une chaîne de Galton—Watson. Ann. Inst. H. Poincaré, 1977, *B13*, № 3, 193—230 (РЖМат, 1978, 5В99)
361. *Martin A. A.*, Estimacion no parametrica de la edad y de la probabilidad de extinction en procesos de Galton—Watson. Trab. estadist. y invest. oper., 1981, *32*, № 2, 55—67 (РЖМат, 1982, 5В248)
362. —, Estimacion de la edad y del numero inicial de individuos en procesos de nacimiento puro y de Galton—Watson. Trab. estadist. y invest. oper., 1981, *32*, № 1, 52—69 (РЖМат, 1982, 7В400)
363. *Mellein B.*, Local limit theorems for the critical Galton—Watson process with immigration. Rev. colomb. mat., 1982, *16*, № 1-2, 31—56 (РЖМат, 1983, 3В119)
364. —, Diffusion limits of conditioned critical Galton—Watson processes. Rev. colomb. mat., 1982, *16*, № 3-4, 125—140 (РЖМат, 1983, 8В72)
365. *Meyer A. de*, On a theorem of Bingham and Doney. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 1, 217—220 (РЖМат, 1982, 11В118)
366. *Mitov K. V., Yanev N. M.*, Critical branching processes with decreasing state-dependent immigration. Докл. Болг. АН, 1983, *36*, № 2, 193—196 (РЖМат, 1983, 9В96)
367. *Mode C. J.*, A multidimensional age-dependent branching process with applications to natural selection. I, II. Math. Biosci., 1968, *3*, № 1-2, 1—18; № 3-4, 231—247 (РЖМат, 1969, 7В61; 1970, 2В100)
368. —, Multitype branching processes: theory and applications. New York, Amer. Elsevier, 1971, xx, 330 pp. (РЖМат, 1972, 9В59)
369. —, *Nair K. A.*, On the distribution of the *W*-random variable in a general age-dependent branching process. J. Math. Anal. and Appl., 1969, *28*, № 3, 636—646 (РЖМат, 1970, 6В93)
370. *Moore T., Snell J. L.*, A branching process showing a phase transition. J. Appl. Probab., 1979, *16*, № 2, 252—260 (РЖМат, 1980, 1В469)
371. *Nagasawa M.*, Multiplicative excessive measures of branching processes. Proc. Jap. Acad., 1973, *49*, № 7, 497—499 (РЖМат, 1974, 3В61)
372. —, Multiplicative excessive measures and duality between equations of Boltzmann and of branching processes. Lect. Notes Math., 1975, *465*, 471—485 (РЖМат, 1976, 3В155)
373. *Nair K. A., Mode C. J.*, The reducible multidimensional age-dependent branching processes. J. Math. Anal. and Appl., 1971, *33*, № 1, 131—139 (РЖМат, 1971, 10В135)
374. —, —, A multi-dimensional age-dependent branching process—subcritical case. J. Math. Anal. and Appl., 1971, *34*, № 3, 567—577 (РЖМат, 1972, 4В67)
375. *Nakagawa T.*, Certain inequalities for Galton—Watson branching processes. Res. Repts Nagaoka Techn. Coll., 1976, *12*, № 1—2, 1—16 (РЖМат, 1977, 1В109)
376. —, Reverse processes and some limit theorems of multitype Galton—Watson processes. J. Multivar. Anal., 1982, *12*, № 2, 161—177 (РЖМат, 1982, 11В119)
377. —, *Sato M.*, A Galton—Watson process with state dependent immigration. Res. Repts Nagaoka Techn. Coll., 1974, *9*, № 4, 177—182 (РЖМат, 1974, 9В72)
378. *Nanthi K.*, Estimation of the variance for the multitype Galton-Watson process. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 2, 408—414 (РЖМат, 1982, 12В296)
379. *Nerman O.*, On the maximal generation size of a non-critical Galton-Watson process. Scand. J. Statist. Theory and Appl., 1977, *4*, № 3, 131—135 (РЖМат, 1978, 5В87)

380. —, On the convergence of supercritical general (C—M—J) branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1981, *57*, № 3, 365—395 (РЖМат, 1983, 5B135).
381. —, *Jagers P.*, The stable doubly infinite pedigree process of supercritical branching populations. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1984, *65*, № 3, 445—460 (РЖМат, 1984, 8B89)
382. *Ney P.*, Critical branching processes. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 3, 434—445 (РЖМат, 1975, 3B111)
383. *Oakes D.*, The Markovian self-exciting process. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 1, 69—77 (РЖМат, 1975, 11B75)
384. *O'Brien G. L.*, A limit theorem for sample maxima and heavy branches in Galton—Watson trees. J. Appl. Probab., 1980, *17*, № 2, 539—545 (РЖМат, 1980, 12B283)
385. *Ogura Y.*, Asymptotic behavior of multitypt Galton—Watson processes. J. Math. Kyoto Univ., 1975, *15*, № 2, 251—302
386. *Pakes A. G.*, An asymptotic results for a subcritical branching process with immigration. Bull. Austral. Math. Soc., 1970, *2*, № 2, 223—228 (РЖМат, 1971, 3B67)
387. —, Some limit theorems for the total progeny of a branching process. Adv. Appl. Probab., 1971, *3*, № 1, 176—192 (РЖМат, 1971, 11B127)
388. —, Branching processes with immigration. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 1, 32—42 (РЖМат, 1971, 12B196)
389. —, Some results for the supercritical branching process with immigration. Math. Biosci., 1971, *11*, № 3—4, 355—363 (РЖМат, 1972, 3B97)
390. —, A branching process with a state dependent immigration component. Adv. Appl. Probab., 1971, *3*, № 2, 301—314 (РЖМат, 1972, 3B98)
391. —, On the critical Galton—Watson process with immigration. J. Austral. Math. Soc., 1971, *12*, № 4, 476—482 (РЖМат, 1972, 4B70)
392. —, On a theorem of Quine and Seneta for the Galton—Watson process with immigration. Austral. J. Statist., 1971, *13*, № 3, 159—164 (РЖМат, 1972, 10B106)
393. —, A limit theorem for the integral of a critical age-dependent branching process. Math. Biosci., 1972, *13*, № 1, 109—112 (РЖМат, 1972, 8B94)
394. —, Further results on the critical Galton—Watson process with immigration. J. Austral. Math. Soc., 1972, *13*, № 3, 277—290 (РЖМат, 1972, 10B107)
395. —, Limit theorems for an age-dependent branching process with immigration. Math. Biosci., 1972, *14*, № 3—4, 221—234 (РЖМат, 1973, 1B121)
396. —, On supercritical Galton—Watson processes allowing immigration. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 4, 814—817 (РЖМат, 1975, 8B60)
397. —, Limit theorems for the integrals of some branching processes. Stochast. Process. and Appl., 1975, *3*, № 1, 89—111 (РЖМат, 1975, 10B74)
398. —, Some results for nonsupercritical Galton—Watson process with immigration. Math. Biosci., 1975, *24*, № 1—2, 71—92 (РЖМат, 1976, 3B150)
399. —, Non-parametric estimation in the Galton—Watson process. Math. Biosci., 1975, *26*, № 1—2, 1—18 (РЖМат, 1976, 5B298)
400. —, On Markov branching processes with immigration. Sankhya, Indian J. Statist., 1975, *A37*, № 1, 128—138 (РЖМат, 1977, 10B78)
401. —, Some limit theorems for a supercritical branching process allowing immigration. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 1, 17—26 (РЖМат, 1976, 11B94)
402. —, Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration. Stochast. Process. and Appl., 1976, *4*, № 2, 175—185 (РЖМат, 1976, 12B148)
403. —, Limit theorems for the simple branching process allowing immigration. I. The case of finite offspring mean. Adv. Appl. Probab., 1979, *11*, № 1, 63—72 (РЖМат, 1979, 8B89)
404. —, *Kaplan N.*, On the supercritical Bellman—Harris process with immigration. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 4, 652—668 (РЖМат, 1975, 8B61)
405. —, *Parthasarathy P. R.*, Some convergence rate results for the Bellman—Harris process with immigration. Math. Biosci., 1975, *26*, № 3—4, 207—216 (РЖМат, 1976, 8B97)

406. *Papangelou F.*, A lemma on the Galton—Watson process and some of its consequences. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, *19*, № 6, 1469—1479 (РЖМат, 1971, 8B124)
407. *Pollak E.*, Bounds for certain branching processes. J. Appl. Probab., 1969, *6*, № 1, 201—204 (РЖМат, 1969, 12B70)
408. —, On survival probabilities and extinction times for some branching processes. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 4, 633—654 (РЖМат, 1972, 5B71)
409. —, The asymptotic form of the extinction probabilities for supercritical multitype branching processes. Math. Biosci., 1972, *15*, № 1—2, 123—131 (РЖМат, 1973, 3B92)
410. —, Survival probabilities and extinction times for some multitype branching processes. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 3, 446—462 (РЖМат, 1975, 3B123)
411. *Pommerenke C.*, On the stationary measures of critical branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1981, *55*, № 3, 305—312 (РЖМат, 1981, 9B75)
412. *Prehn U.*, Die mittlere Quellzeit subcritischer Verzweigungsprozesse. Math. Nachr., 1979, *88*, 409—410 (РЖМат, 1980, 2B117)
413. *Puri P. S.*, Some limit theorems on branching processes and certain related processes. Sankhya, Indian J. Statist., 1969, *A31*, № 1, 57—47 (РЖМат, 1970, 4B85)
414. *Quigg D.*, A local limit theorem for the critical age-dependent branching process. J. Appl. Probab., 1978, *15*, № 1, 46—53 (РЖМат, 1979, 3B82)
415. —, On an integral equation arising in age-dependent branching processes. J. Math. Anal. and Appl., 1978, *65*, № 2, 344—360 (РЖМат, 1979, 3B84)
416. *Quine M. P.*, The multi-type Galton—Watson process with immigration. J. Appl. Probab., 1970, *7*, № 2, 411—422 (РЖМат, 1971, 4B70)
417. —, A note on the moment structure of the multitype Galton—Watson process. Biometrika, 1970, *57*, № 1, 219—222 (РЖМат, 1970, 11B75)
418. —, The multitype Galton—Watson process with mean ρ near 1. Adv. Appl. Probab., 1972, *4*, № 3, 429—452 (РЖМат, 1973, 8B84)
419. —, Bounds for the extinction probability of a simple branching process. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 1, 9—16 (РЖМат, 1976, 12B150)
420. —, Asymptotic results for estimators in a subcritical branching process with immigration. Ann. Probab., 1976, *4*, № 2, 319—325 (РЖМат, 1977, 2B215)
421. —, *Durham P.*, Estimation for multitype branching processes. J. Appl. Probab., 1977, *14*, № 4, 829—835 (РЖМат, 1978, 12B355)
422. —, *Seneta E.*, A limit theorem for the Galton—Watson process with immigration. Austral. J. Statist., 1969, *11*, № 3, 166—173 (РЖМат, 1970, 6B91)
423. *Radcliffe J.*, The convergence of a generalized multitype age-dependent branching process with Poisson immigration. Math. Biosci., 1972, *13*, № 1—2, 125—132 (РЖМат, 1972, 8B91)
424. —, The convergence of a super-critical age-dependent branching process allowing immigration at the epochs of a renewal process. Math. Biosci., 1972, *14*, № 1—2, 37—44 (РЖМат, 1972, 10B108)
425. —, The asymptotic frequences of the types in a multitype age-dependent branching process allowing immigration. J. Appl. Probab., 1973, *10*, № 3, 652—658 (РЖМат, 1974, 4B68)
426. —, The convergence of an age-dependent branching process allowing immigration. Progr. Statist. Vol. 2. Amsterdam—London, 1974, 641—651 (РЖМат, 1976, 2B130)
427. *Rama M. K.*, Convergence of age and type distributions in multitype critical Bellman-Harris processes. J. Appl. Probab., 1980, *17*, № 4, 948—955 (РЖМат, 1981, 6B85)
428. *Reynolds J. F.*, A theorem on discrete time branching processes allowing immigration. J. Appl. Probab., 1970, *7*, № 2, 446—450 (РЖМат, 1971, 4B71)

429. —, A theorem on Markov branching processes. J. Appl. Probab., 1972, *9*, № 3, 667—670 (РЖМат, 1973, 3B90)
430. *Rubin H., Vere-Jones D.*, Domains of attraction for the subcritical Galton—Watson branching process. J. Appl. Probab., 1968, *5*, № 1, 216—219 (РЖМат, 1969, 2B84)
431. *Samuels M. L.*, Distribution of the branching-process population among generations. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 4, 655—667. (РЖМат, 1972, 5B70)
432. *Sankoff D.*, Duration of detectible synchrony in a binary branching process. Biometrika, 1971, *58*, № 1, 77—81 (РЖМат, 1971, 11B422)
433. *Sato M.*, On a Galton—Watson process with state-dependent immigration. Sci. Repts Niigata Univ., 1975, № 12, 33—42 (РЖМат, 1975, 12B143)
434. —, A note on invariant measures for the Galton—Watson process with state-dependent immigration. Sci. Repts Niigata Univ., 1975, № 12, 43—45 (РЖМат, 1975, 12B144)
435. *Savage I. R., Shimi I. N.*, A branching process without rebranching. Ann. Math. Stat., 1969, *40*, № 5, 1850—1851 (РЖМат, 1971, 10B132)
436. *Savits T. H.*, Applications of space-time harmonic functions to branching processes. Ann. Probab., 1975, *3*, № 1, 61—69 (РЖМат, 1975, 11B84)
437. —, Space-time harmonic functions and age-dependent branching processes. Adv. Appl. Probab., 1975, *7*, № 2, 283—298 (РЖМат, 1976, 3B156)
438. —, An age-dependent model with parental survival. Ann. Probab., 1976, *4*, № 3, 382—392 (РЖМат, 1977, 5B92)
439. *Schuh H.-J.*, A note on the Harris—Sevast'yanov transformation for supercritical branching processes. J. Austral. Math. Soc., 1982, *A32*, № 2, 215—222 (РЖМат, 1982, 10B67)
440. —, Sums of i. i. d. random variables and an application to the explosion criterion for Markov branching processes. J. Appl. Probab., 1982, *19*, № 1, 29—38 (РЖМат, 1982, 11B109)
441. —, Seneta constants for the supercritical Bellman—Harris process. Adv. Appl. Probab., 1982, *14*, № 4, 732—751 (РЖМат, 1983, 5B129)
442. —, *Barbour A. D.*, On the asymptotic behaviour of branching processes with infinite mean. Adv. Appl. Probab., 1977, *9*, № 4, 681—723 (РЖМат, 1979, 3B83)
443. *Scott D. J.*, A central limit theorem for martingales and an application to branching processes. Stochast. Process. and Appl., 1978, *6*, № 3, 241—252 (РЖМат, 1978, 11B52)
444. *Seneta E.*, On the transient behaviour of a Poisson branching process. J. Austral. Math. Soc., 1967, *7*, № 4, 465—480 (РЖМат, 1968, 9B55)
445. —, The Galton—Watson process with mean one. J. Appl. Probab., 1967, *4*, № 3, 489—495 (РЖМат, 1968, 10B64)
446. —, The stationary distribution of a branching process allowing immigration. A remark on the critical case. J. Roy. Statist. Soc., 1968, *B30*, № 1, 176—179 (РЖМат, 1968, 11B64)
447. —, On asymptotic properties of subcritical branching processes. J. Austral. Math. Soc., 1968, *8*, № 4, 671—682 (РЖМат, 1969, 6B53)
448. —, On recent theorems concerning the supercritical Galton—Watson process. Ann. Math. Stat., 1968, *39*, № 6, 2098—2102 (РЖМат, 1971, 7B114)
449. —, Some second-order properties of the Galton—Watson extinction time distribution. Sankhya, Indian J. Statist., 1969, *A31*, № 1, 75—78 (РЖМат, 1970, 4B86)
450. —, Functional equations and the Galton—Watson process. Adv. Appl. Probab., 1969, *1*, № 1, 1—42 (РЖМат, 1970, 6B90)
451. —, A note on the supercritical Galton—Watson process with immigration. Math. Biosci., 1970, *6*, 305—311 (РЖМат, 1970, 12B79)
452. —, On the supercritical Galton—Watson process with immigration. Math. Biosci., 1970, *7*, № 1—2, 9—14 (РЖМат, 1971, 2B75)
453. —, An explicit-limit theorem for the critical Galton—Watson process with immigration. J. Roy. Statist. Soc., 1970, *B32*, № 1, 149—152 (РЖМат, 1971, 3B65)

454. —, On invariant measures for simple branching processes. J. Appl. Probab., 1971, *8*, № 1, 43—51 (РЖМат, 1971, 11B129)
455. —, The simple branching process with infinite mean. I. J. Appl. Probab., 1973, *10*, № 1, 206—212 (РЖМат, 1973, 11B156)
456. —, Regularly varying functions in the theory of simple branching processes. Adv. Appl. Probab., 1974, *6*, № 3, 408—420 (РЖМат, 1975, 3B109)
457. —, Normed-convergence theory for supercritical branching processes. Stochast. Process. and Appl., 1975, *3*, № 1, 35—43 (РЖМат, 1975, 8B67)
458. —, Characterization by functional equations of branching process limit laws. Mod. Course Statist. Distrib. Sci. Work. Vol. 3, Dordrecht—Boston, 1975, 249—254 (РЖМат, 1976, 7B94)
459. —, *Tavaré S.*, A note on models using the branching process with immigration stopped at zero. J. Appl. Probab., 1983, *20*, № 1, 11—18 (РЖМат, 1983, 10B333)
460. —, *Weber N. C.*, Attainable bounds for expectations. J. Austral. Math. Soc., 1982, *A33*, № 3, 411—420 (РЖМат, 1983, 6B16)
461. *Shonkwiller R.*, On age-dependent branching processes with immigration. Comput. and Math., 1980, *6*, № 3, 289—296 (РЖМат, 1980, 12B113)
462. *Slack R. S.*, A branching process with mean one and possibly infinite variance. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, *9*, № 2, 139—145 (РЖМат, 1969, 3B56)
463. —, Further notes on branching processes with mean I. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, *25*, № 1, 31—38 (РЖМат, 1973, 5B110)
464. *Slud E.*, Relative extinction times for independent branching processes. J. Appl. Probab., 1977, *14*, № 2, 382—386 (РЖМат, 1978, 5B88)
465. *Spataru A.*, On a series concerning noncritical Galton—Watson processes. Rev. roum. math. pures et appl., 1976, *21*, № 6, 767—772 (РЖМат, 1977, 5B90)
466. —, An improvement of a convergence theorem for Markov branching processes. Proc. 6th Conf. Probab. Theory, Brașov, Sept. 10—15, 1979, București, 1981, 539 (РЖМат, 1982, 6B119)
467. *Stigler S. M.*, Estimating the age of a Galton—Watson branching process. Biometrika, 1970, *57*, № 3, 505—512 (РЖМат, 1971, 8B177)
468. —, The estimation of the probability of extinction and other parameters associated with branching processes. Biometrika, 1971, *58*, № 3, 499—508 (РЖМат, 1972, 4B111)
469. *Stoyan D.*, Some monotonicity properties of Galton—Watson processes. Biometr. Z., 1974, *16*, № 1, 27—30 (РЖМат, 1974, 11B93)
470. *Sugitani S.*, On the limit distributions for decomposable Galton—Watson processes. Proc. Jap. Acad., 1979, *A55*, № 9, 334—336 (РЖМат, 1980, 6B91)
471. *Sweeting T. J.*, On efficient tests for branching processes. Biometrika, 1978, *65*, № 1, 123—127 (РЖМат, 1978, 11B326)
472. *Sze M.*, Markov processes associated with critical Galton—Watson processes with application to extinction probabilities. Adv. Appl. Probab., 1976, *8*, № 2, 278—295 (РЖМат, 1977, 4B91)
473. *Tanaka K.-I.*, On the harmonic functions of critical or supercritical Galton—Watson processes with continuous time parameters. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1981, *31*, № 2, 89—96 (РЖМат, 1982, 10B68)
474. *Tănase V. V.* Măsuri staționare petru procese ramificate multidimensionale. Stud. și cerc. mat., 1973, *25*, № 7, 1007—1017 (РЖМат, 1974, 3B60)
475. *Uchiyama K.*, Limit theorems for Poisson branching processes. Proc. Jap. Acad., 1975, *51*, № 7, 510—515 (РЖМат, 1976, 7B95)
476. —, On limit theorems for non-critical Galton—Watson processes with $EZ_1 \log Z_1 = \infty$. Lect. Notes Math., 1976, *550*, 646—649 (РЖМат, 1977, 10B75)
477. *Venkataraman K. N.*, A time series approach to the study of the simple subcritical Galton—Watson process with immigration. Adv. Appl. Probab., 1982, *14*, № 1, 1—20 (РЖМат, 1982, 9B57)

478. —, *Nanthi K.*, A limit theorem on a supercritical Galton—Watson process with immigration. Ann. Probab., 1982, *10*, № 4, 1069—1074 (РЖМат, 1983, 5В130)
479. —, —, Some limit theorems on a supercritical simple Galton—Watson process. Ann. Probab., 1982, *10*, № 4, 1075—1078 (РЖМат, 1983, 5В132)
480. *Wang R. C.*, The extinction time of Markov branching processes. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 2, 345—347 (РЖМат, 1977, 4В92)
481. *Waugh W. A. O'N.*, Age-dependent branching processes under a condition of ultimate extinction. Biometrika, 1968, *55*, № 2, 291—296 (РЖМат, 1969, 6В56)
482. —, Application of the Galton—Watson process to the kin number problem. Adv. Appl. Probab., 1981, *13*, № 4, 631—649 (РЖМат, 1982, 5В102)
483. *Weiner H. J.*, Sums of lifetimes in age-dependent branching processes. J. Appl. Probab., 1969, *6*, № 1, 195—200 (РЖМат, 1969, 12В75)
484. —, On a multi-type critical age-dependent branching process. J. Appl. Probab., 1970, *7*, № 3, 523—543 (РЖМат, 1971, 6В96)
485. —, A critical age-dependent branching process with immigration. Ann. Math. Stat., 1972, *43*, № 6, 2099—2103 (РЖМат, 1973, 8В80)
486. —, A multi-type critical age-dependent branching process with immigration. J. Appl. Probab., 1972, *9*, № 4, 697—706 (РЖМат, 1973, 8В81)
487. —, Total progeny in a multitype critical age-dependent branching process with immigration. J. Appl. Probab., 1974, *11*, № 3, 458—470 (РЖМат, 1975, 6В89)
488. —, Conditional moments in a critical age-dependent branching process. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 3, 581—587 (РЖМат, 1976, 5В109)
489. —, Asymptotic probabilities in a critical age-dependent branching process. J. Appl. Probab., 1976, *13*, № 3, 476—485 (РЖМат, 1977, 5В94)
490. —, The extinction probability in a critical branching process. Sankhya, 1978, *A40*, № 1, 52—60 (РЖМат, 1980, 5В106)
491. —, Limit probabilities for the critical age-dependent branching processes with immigration. Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl., 1979, *3*, № 2, 229—238 (РЖМат, 1979, 7В118)
492. *Williams T.*, The diffusion approximation to a branching process. Progr. Statist., Vol. 2, Amsterdam — London, 1974, 909—912 (РЖМат, 1976, 1В163)
493. *Yamazato M.*, Some results on continuous time branching processes with state-dependent immigration. J. Math. Soc. Japan, 1975, *27*, № 3, 479—496 (РЖМат, 1976, 5В106)
494. —, Some results on infinitely divisible distributions of class *L* with applications to branching processes. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Diagaku, 1975, *A13*, № 347—365, 133—139 (РЖМат, 1976, 8В15)
495. *Yanev N. M., Tchoukova-Dantcheva S.*, On the statistics of branching processes with immigration. Докл. Болг. АН, 1980, *33*, № 4, 469—471 (РЖМат, 1981, 2В207)
496. *Yang Y. S.*, On branching processes allowing immigration. J. Appl. Probab., 1972, *9*, № 1, 24—31 (РЖМат, 1972, 8В93)
497. —, Asymptotic properties of the stationary measure of a Markov branching process. J. Appl. Probab., 1973, *10*, № 2, 447—450 (РЖМат, 1974, 2В120)