A. V. Shutov, Тригонометрические суммы над одномерными квазирешетками, *Chebyshevskii Sb.*, 2012, Volume 13, Issue 2, 136–148

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 519.21

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ НАД ОДНОМЕРНЫМИ КВАЗИРЕШЕТКАМИ [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе получены оценки тригонометрических сумм по точкам одномерных квазирешеток. Показано, что в некоторых случаях такие тригонометрические суммы растут линейно с ростом числа слагаемых и найдена асимптотика для этого случая. Рассмотрены приложения полученных результатов к дифракции квазикристаллов.

1 Введение

Пусть $\alpha \in (0;1)$ – иррациональное число, $\{\cdot\}$ – дробная доля. В качестве одномерной квазирешетки $L = L(\alpha, l_1, l_2)$ рассмотрим множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемое условиями

$$x_{-1} = 0;$$
$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \{n\alpha\} < 1-\alpha \\ x_n + l_2, & \{n\alpha\} \geqslant 1-\alpha \end{cases}. \quad (1)$$

Отметим, что в работе [19] также рассматривались и более общие одномерные квазирешетки

$$L(\alpha, l_1, l_2, I) = \{x_n \in L(\alpha, l_1, l_2) : \{n\alpha\} \in I\}, \quad (2)$$

где $I \subseteq [0;1)$ – некоторый открытый справа полуинтервал.

В настоящей работе мы рассматриваем только квазирешетки вида (1).

В последние годы активно развивается направление, связанное с решением различных теоретико-числовых задач над квазирешетками (1), (2). Рассматривались задачи о распределении точек квазирешеток по произвольному модулю

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00578-а.

h [17], об аппроксимации квазирешеток решетками [15], [16]. Изучены линейные диофантовы уравнения от двух неизвестных [19].

Для некоторых квазирешеток специального вида рассмотрены более общие аддитивные задачи [10], [13], [18], [20], задачи о квадратичных формах над квазирешетками [7], [11], [12], проблемы Гольдбаха [8] и Хуа-Локена [9].

Настоящая ребота посвящена изучению тригонометрических сумм

$$f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} e(x_j\lambda), \tag{3}$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$.

С каждой квазирешеткой $L(\alpha, l_1, l_2)$ тесно связаны параметры

$$h_L = l_1(1-\alpha) + l_2\alpha$$

и

$$\widetilde{l} = l_2 + (l_1 - l_2)\alpha.$$

Параметр h_L имеет простой геометрический смысл – это шаг решетки, вкладывающейся в $L(\alpha, l_1, l_2)$ [16].

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Если $h_L\lambda \notin \alpha\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$, то для тригонометрической суммы (3) справедлива оценка*

$$f_n(\lambda) = O(\Delta_1(n)) = o(n). \tag{4}$$

Если $h_L\lambda = \frac{a+b\alpha}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b, c) = 1$ и $c > 1$, то для тригонометрической суммы (3) справедлива оценка

$$f_n(\lambda) = O(\Delta_2(n)) = o(n). \tag{5}$$

Если же $h_L\lambda = a + b\alpha$, $a, b \in \mathbb{Z}$, то для тригонометрической суммы (3) справедлива асимптотическая формула

$$f_n(\lambda) = n \cdot e(\widetilde{l}\lambda - \widetilde{\lambda}/2)\frac{\sin \pi\widetilde{\lambda}}{\pi\widetilde{\lambda}} + O(\Delta_2(n)), \tag{6}$$

где

$$\widetilde{\lambda} = (l_2 - l_1)\lambda - b.$$

Замечание 1. *При $\widetilde{\lambda} = 0$ считаем, что $\frac{\sin \pi\widetilde{\lambda}}{\pi\widetilde{\lambda}} = 1$.*

Функции $\Delta_1(n)$ и $\Delta_2(n)$ представляют собой остаточные члены некоторых проблем равномерного распределения дробных долей линейных функций и будут явно определены далее. При этом оценка $\Delta_i(n) = o(n)$ во многих случаях может быть улучшена. В частности, для почти всех пар (L, λ) можно получить оценки вида $\Delta_i(n) = O(n^{\varepsilon})$ и даже более сильные оценки. Точный порядок роста величин $\Delta_i(n)$ очень сильно зависит от диофантовых свойств α, l_1 и l_2.

Отметим, что ранее были получены несколько худшие оценки тригонометрических сумм $f_n(\lambda)$ для квазирешетки Фибоначчи [2] и квазирешетки четно-фибоначчевых чисел [13].

Автор выражает благодарность В. Г. Журавлеву, привлекшему его внимание к рассматриваемым задачам, а также А. В. Малееву за полезные обсуждения физических аспектов теории тригонометрических сумм.

2 Вспомогательные результаты и план доказательства

Вначале получим явную формулу для точек квазирешетки.

Лемма 1. *Для $n \geq 0$ справедливо равенство*

$$x_n = nh_L + \widetilde{l} + (l_2 - l_1)\{(n+1)\alpha\}. \tag{7}$$

Для доказательства определим функции

$$N_1(n) = \sharp\{j : 0 \leq j < n, \{j\alpha\} < 1 - \alpha\},$$

$$N_2(n) = \sharp\{j : 0 \leq j < n, \{j\alpha\} \geq 1 - \alpha\}.$$

Ясно, что

$$N_1(n) + N_2(n) = n \tag{8}$$

и

$$x_n = N_1(n)l_1 + N_2(n)l_2 \tag{9}$$

при $n \geq 0$. Легко проверить, что

$$N_1(n) = [(n+1)(1-\alpha)] + 1. \tag{10}$$

Учитывая (8)-(10), получаем справедливость (7) для всех $n \geq 0$.

Рассмотрим вектор $\beta_\lambda = (h_L\lambda, \alpha)$ и сдвиг $T : y \to y + \beta_\lambda \bmod \mathbb{Z}^2$. Через Orb обозначим орбиту точки $y_0 = (0, \alpha)$ под действием отображения T. Легко видеть, что точки из Orb сравнимы с точками $y_n = (nh_L\lambda, (n+1)\alpha)$ по модулю $\mathbb{Z}^2$. Из иррациональности α немедленно вытекает

Лемма 2. *Точки орбиты Orb равномерно распределены на ее замыкании.*

Для произвольного двумерного векторы $y = (y_1, y_2)$ определим функцию

$$h(y) = e(y_1 - (l_2 - l_1)y_2\lambda + \widetilde{l}\lambda). \tag{11}$$

Тогда имеем,

$$f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} h(y_j).$$

Поскольку функция h интегрируема по Риману, учитывая лемму 2 и теорему Вейля о равномерном распределении [6] находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n} = \int_{\overline{Orb}} h(y)dy.$$

Для получения теоремы 1 требуется теорема Вейля о равномерном распределении с остаточным членом, известная также как неравенство Коксмы-Главки [14]. Эта теорема фактически утверждает, что справедливо неравенство

$$|f_n(\lambda) - n\int_{\overline{Orb}} h(y)dy| \leq V(h)\Delta(n),$$

где $V(h)$ – вариация (в общем случае многомерная) функции h, а $\Delta(n)$ – остаточный член проблемы равномерного распределения.

Пусть $D = \dim_{\mathbb{Q}}\langle 1, \alpha, h_L\lambda\rangle$. Ясно, что $D = 1$ или $D = 2$. Для вычисления интеграла $\int_{\overline{Orb}} h(y)dy$ эти случаи необходимо рассмотреть отдельно.

3 Случай $D = 2$

При $D = 2$ замыкание орбиты $\overline{Orb}$ представляет собой в точности двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Для произвольного прямоугольника $P \subseteq [0;1)^2$ определим функцию

$$N_P(n) = \sharp\{j : 0 \leq j < n, T^j(0) \in P\}.$$

Далее, положим

$$\Delta_1(n) = \sup_P |N_P(n) - |P|n|.$$

Тогда, в силу неравенства Коксмы-Главки, имеем

$$f_n(\lambda) = nI + O(\Delta_1(n)), \tag{12}$$

где

$$I = \int_{\mathbb{T}^2} h(y)dy. \tag{13}$$

С учетом определения функции h (11), находим, что

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e(y_1 - (l_2 - l_1)y_2\lambda + \widetilde{l}\lambda)dy_1 dy_2 =$$

$$= e(\widetilde{l}\lambda)\int_0^1 e(y_1)\int_0^1 e(-(l_2-l_1)y_2\lambda)dy_2dy_1 =$$

$$= e(\widetilde{l}\lambda)\int_0^1 e(y_1)dy_1\int_0^1 e(-(l_2-l_1)y_2\lambda)dy_2 = 0,$$

так как $\int_0^1 e(y_1)dy_1 = 0$.

Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана. Отметим, что в силу теоремы Вейля о равномерном распределении и условия $D = 2$ справедлива оценка

$$\Delta_1(n) = o(n).$$

Однако, эта оценка может быть улучшена при наличии дополнительной информации о векторе β_λ. Современные оценки для $\Delta_1(n)$ можно найти например в книге [1].

4 Случай $D = 1$: структура орбиты

При $D = 1$ числа $1, \alpha$ и $h_L\lambda$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$ и замыкание орбиты $\overline{Orb}$ представляет собой в точности одномерное подмножество двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Представим $h_L\lambda$ в виде $h_L\lambda = \frac{a+b\alpha}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$, $(a, b, c) = 1$. Ясно, что при $D = 1$ такое представление существует и единственно. Далее, обозначим $d = (b, c)$, $b_1 = b/d$, $c_1 = c/d$. При этом

$$\beta_\lambda = (\frac{a+b\alpha}{c}, \alpha).$$

В этом случае нам удобнее рассматривать замыкание $\overline{Orb'}$ орбиты начала координат под действием сдвига на вектор β_λ. Поскольку

$$\overline{Orb} \equiv \overline{Orb'} + (0, \alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2},$$

получаем

$$\int_{\overline{Orb'}} h(y)dy = \int_{\overline{Orb}} h(y)dy. \tag{14}$$

Пусть

$$W(v, s) = \{s + tv \bmod \mathbb{Z}^2, t \in [0; 1)\}.$$

Лемма 3. *Справедливо разложение*

$$\overline{Orb'} = \coprod_{k \bmod d} W(v, (\frac{k}{c}, 0)), \tag{15}$$

где $\coprod$ *означает непересекающееся объединение множеств и* $v = (b_1, c_1)$.

Точки из орбиты Orb' сравнимы с точками $y'_n = (\frac{a}{c}n + \frac{b}{c}n\alpha, n\alpha)$ по модулю $\mathbb{Z}^2$. Выберем $n = cQ_m n_1$, где Q_m – m-ый знаменатель подходящей дроби для α. Тогда

$$y'_n \equiv dn_1(b_1 Q_m \alpha, c_1 Q_m \alpha) \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Выбирая достаточно большие m можно сделать величину $Q_m\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ сколь угодно малой.

Отсюда вытекает, что $\overline{Orb'}$ распадается на конечное число обмоток $W(v,z)$ с направляющим вектором $v = (b_1, c_1)$.

Обозначим через $Orb^*(z)$ орбиту точки z под действием отображения T^* : $z \to z + (\frac{b_1}{c_1}\alpha, \alpha) \bmod \mathbb{Z}^2$. Пусть $Orb^*_k(z)$ – множество точек из $Orb^*(z)$, номера которых принадлежат множеству $A_k = \{n : an \equiv k \pmod c\}$.

По определениям, $W(v,0) = \overline{Orb^*(0)}$. Более того, поскольку $Orb^*(z)$ равномерно распределена на своем замыкании, $W(v,0) = \overline{Orb^*_k(0)}$ для всех k.

Далее,

$$\overline{Orb'} = \overline{\bigcup_{k \bmod c}\ \bigcup_{an\equiv k \pmod c} (\frac{a}{c}n + \frac{b}{c}n\alpha, n\alpha) \bmod \mathbb{Z}^2} =$$

$$= \overline{\bigcup_{k \bmod c}\ \bigcup_{n\in A_k} \left((\frac{k}{c}, 0) + n(\frac{b_1}{c_1}\alpha, \alpha) \bmod \mathbb{Z}^2 \right)} =$$

$$= \bigcup_{k \bmod c} \left((\frac{k}{c}, 0) + \overline{Orb^*_k(0)} \right) =$$

$$= \bigcup_{k \bmod c} \left((\frac{k}{c}, 0) + W(v,0) \right) =$$

$$= \bigcup_{k \bmod c} W(v, (\frac{k}{c}, 0)).$$

Для завершения доказательства леммы 3 осталось выяснить, какие из множеств $W(v, (\frac{k}{c}, 0))$ совпадают.

В силу взаимной простоты b_1 и c_1 существует l такое, что $\frac{b_1 l}{c_1} \equiv \frac{1}{c_1} \pmod 1$. Поэтому $W(v,0)$ содержит точки $(\frac{j}{c_1}, 0)$ для всех $0 \le j < c_1$. Таким образом, множества $W(v, (\frac{k_1}{c}, 0))$ и $W(v, (\frac{k_2}{c}, 0))$ совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{k_1 - k_2}{c} = \frac{j}{c_1} = \frac{jd}{c}$$

для некоторого целого j. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $k_1 \equiv k_2 \pmod d$, откуда и получаем утверждение леммы.

5 Случай $D = 1$: вычисление интеграла

Нетрудно показать, что ограничение отображения T на замыкание $\overline{Orb}$ изоморфно повороту окружности $x \to x + \alpha_1 \bmod 1$, где

$$\alpha_1 = \frac{|\beta_\lambda|}{|\overline{Orb'}|} = \frac{\alpha}{c_1}.$$

Для произвольного интервала $J \subseteq [0;1)$ определим функцию

$$N_J(n) = \sharp\{j : 0 \le j < n, \{j\alpha_1\} \in J\}.$$

Далее, положим

$$\Delta_2(n) = \sup_J |N_J(n) - |J|n|.$$

Тогда, в силу неравенства Коксмы-Главки и (14), имеем

$$f_n(\lambda) = nI + O(\Delta_2(n)), \tag{16}$$

где

$$I = \int_{\overline{Orb'}} h(y)dy. \tag{17}$$

В силу иррациональности α_1 и теоремы Вейля имеем

$$\Delta_2(n) = o(n).$$

Более точные оценки для $\Delta_2(n)$, учитывающие арифметическую природу α_1 можно найти, например, в работе [4].

Перейдем к вычислению интеграла (17). С учетом разложения орбиты (15), находим

$$I = \frac{1}{d} \sum_{k \bmod d} I_k, \tag{18}$$

где

$$I_k = \int_{W(v,(\frac{k}{c},0))} h(y)dy = \int_{W(v,0)} h(y + (\frac{k}{c}, 0))dy. \tag{19}$$

Вспоминая определение $h(y)$ (11) получим

$$I_k = \int_{W(v,0)} e(y_1 + \frac{k}{c} - (l_2 - l_1)y_2\lambda + \widetilde{l}\lambda)dy_1 dy_2.$$

В силу определения,

$$W(v,0) = \{(\{b_1 t\}, \{c_1 t\}) : t \in [0;1)\}$$

и, следовательно,

$$I_k = e(\widetilde{l}\lambda)e(\frac{k}{c})I^*, \tag{20}$$

где

$$I^* = \int_0^1 e(\{b_1 t\} - (l_2 - l_1)\{c_1 t\}\lambda)dt. \tag{21}$$

Собирая вместе (18)-(21), находим

$$I = \frac{e(\widetilde{l}\lambda)I^*}{d} \sum_{k \bmod d} e(\frac{k}{c}). \tag{22}$$

Поскольку b_1 – целое, $e(\{b_1 t\}) = e(b_1 t)$ и

$$I^* = \int_0^1 e(b_1 t - (l_2 - l_1)\{c_1 t\}\lambda)dt.$$

Разобъем интервал $[0;1)$ на интервалы $[\frac{j}{c_1}, \frac{j+1}{c_1})$, $0 \leq j < c_1$ и сделаем на каждом таком интервале замену переменной $t = \frac{j+\delta}{c_1}$ $0 \leq \delta < 1$. Тогда $\{c_1 t\} = \{j + \delta\} = \delta$ и

$$I^* = \frac{1}{c_1} \sum_{j \bmod c_1} \int_0^1 e(\frac{b_1}{c_1} j + \frac{b_1}{c_1}\delta - (l_2 - l_1)\delta\lambda)d\delta =$$

$$= \frac{I^{**}}{c_1} \sum_{j \bmod c_1} e(\frac{b_1}{c_1} j),$$

где

$$I^{**} = \int_0^1 e(\frac{b_1}{c_1}\delta - (l_2 - l_1)\delta\lambda)d\delta. \tag{23}$$

Подставляя в (22) и учитывая, что $c_1 d = c$, находим

$$I = e(\widetilde{l}\lambda)I^{**}\sigma(c), \tag{24}$$

где

$$\sigma(c) = \frac{1}{c} \sum_{k \bmod d} e(\frac{k}{c}) \sum_{j \bmod c_1} e(\frac{b_1}{c_1} j) =$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{k \bmod d} \sum_{j \bmod c_1} e(\frac{k}{c} + \frac{b_1}{c_1} j).$$

Поскольку $(b_1, c_1) = 1$,

$$\sigma(c) = \frac{1}{c} \sum_{k \bmod c} e(\frac{k}{c}) = \begin{cases} 1, & c = 1 \\ 0, & c \neq 1 \end{cases}.$$

Отсюда получаем, что при $c \neq 1$ интеграл $I = 0$ и, с учетом (16), второй случай теоремы 1 полностью доказан.

Остается рассмотреть случай когда $h_L\lambda = a + b\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. В этом случае, из (23) и (24) получаем, что

$$I = e(\widetilde{l}\lambda)\int_0^1 e(b\delta - (l_2 - l_1)\delta\lambda)d\delta = e(\widetilde{l}\lambda)\int_0^1 e(-\widetilde{\lambda}\delta)d\delta =$$

$$= e(\widetilde{l}\lambda - \widetilde{\lambda}/2)\frac{\sin\pi\widetilde{\lambda}}{\pi\widetilde{\lambda}}.$$

Отсюда, с учетом (16) получаем третий случай теоремы 1.

6 Приложения к дифракции квазирешеток

Задача о вычислении асимптотики тригонометрической суммы $f_n(\lambda)$ тесно связана с проблемой дифракции.

Величина

$$A(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(\lambda)|}{n} \tag{25}$$

называется амплитудой дифракционного спектра квазирешетки, соответствующей длине волны λ. Сам дифракционный спектр квазирешетки определяется как множество

$$\mathrm{Spec}L = \{\lambda : A(\lambda) \neq 0\}. \tag{26}$$

Заметим, что в данном случае определение спектра квазирешетки основано на существовании пределов (25) при всех λ, вытекающем из теоремы 1. Определение спектра может быть перенесено на любые точечные системы, удовлетворяющее (r, R)-условию Делоне с использованием преобразования Фурье обобщенных функций. Детали можно найти например в работе [3]. Ранее дифракционный спектр был вычислен в случае так называемых model sets, то есть проекций решеток высшей размерности с дополнительным ограничением в виде попадания ортогональной проекции в некоторе окно [5]. Рассматриваемые нами квазирешетки L являются model sets только в исключительных случаях.

Понятие дифракционного спектра имеет и теоретико-числовой смысл. С учетом критерия Вейля легко заметить, что $\frac{1}{N}\mathrm{Spec}L, N \in \mathbb{Z}, N \neq 0$ это в точности множество тех λ, для которых последовательность вершин квазирешетки L не является равномерно распределенной по модулю λ.

Пусть

$$\mathrm{Spec}_0 = \{\frac{a + b\alpha}{h_L} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Из теоремы 1 немедленно получаем, что

$$A(\lambda) = \begin{cases} |\frac{\sin\pi\widetilde{\lambda}}{\pi\widetilde{\lambda}}|, & \lambda \in \mathrm{Spec}_0 \\ 0, & \lambda \notin \mathrm{Spec}_0 \end{cases}. \tag{27}$$

Пусть

$$\mathrm{Spec}_1 = \{\lambda : \lambda \in \mathrm{Spec}_0, \widetilde{\lambda} \in \mathbb{Z}, \widetilde{\lambda} \neq 0\},$$

$$\mathrm{Spec}_2 = \{\lambda : \lambda \in \mathrm{Spec}_0, \widetilde{\lambda} = 0\}.$$

Тогда из (26) и (27) находим

$$\mathrm{Spec}L = \mathrm{Spec}_0 \setminus (\mathrm{Spec}_1 \setminus \mathrm{Spec}_2). \tag{28}$$

Вычислим Spec_1. Поскольку

$$\widetilde{\lambda} = (l_2 - l_1)\lambda - b \in \mathbb{Z}, \widetilde{\lambda} \neq 0$$

и

$$\lambda = \frac{a + b\alpha}{h_L}, a, b \in \mathbb{Z},$$

имеем

$$a + b\alpha \in \frac{h_L}{l_2 - l_1}\mathbb{Z}, a + b\alpha \neq 0.$$

Возможно 2 случая.

1) $\frac{h_L}{l_2-l_1} \notin \mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}$. Тогда множество Spec_1 пусто.

2) $\frac{h_L}{l_2-l_1} = \frac{A+B\alpha}{C}$, где A, B, C – целые и $(A, B, C) = 1$. Тогда легко видеть, что

$$\mathrm{Spec}_1 = \{\frac{A + B\alpha}{h_L} m : m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}. \tag{29}$$

Отметим, что непустота множества Spec_1 связана с хорошо известным в классической кристаллографии явлением систематического погасания пиков.

Перейдем к вычислению Spec_2. Легко проверить, что $0 \in \mathrm{Spec}_2$. Ненулевые значения Spec_2 могут принадлежать только при условии $\frac{h_L}{l_2-l_1} = \frac{A+B\alpha}{C}$, где A, B, C – целые и $(A, B, C) = 1$. Тогда

$$\widetilde{\lambda} = \frac{C}{A + B\alpha}(a + b\alpha) - b = 0.$$

Учитывая иррациональность α, получаем систему

$$\begin{cases} aC - Ab = 0 \\ bC - bB = 0 \end{cases}, \tag{30}$$

которая должна иметь решение в целых a, b.

Вновь возможно 2 случая.

1) $B \neq C$. Тогда система (30) не имеет решений и Spec_2 не содержит точек, отличных от точки 0.

2) $B = C$. Тогда система (30) допускает бесконечную серию решений $a = Am$, $b = Bm$, $m \in \mathbb{Z}$ и $\mathrm{Spec}_2 = \mathrm{Spec}_1 \cup \{0\}$.

Поскольку

$$h_L = l_1(1-\alpha) + l_2\alpha,$$

находим

$$\frac{h_L}{l_2 - l_1} = \frac{l_1}{l_2 - l_1} + \alpha$$

и можно перейти от условий на $\frac{h_L}{l_2-l_1}$ к условиям на $\frac{l_1}{l_2-l_1}$. Точнее, представление $\frac{h_L}{l_2-l_1} = \frac{A+B\alpha}{C}$ эквивалентно представлению $\frac{h_L}{l_2-l_1} = \frac{A'+B'\alpha}{C'}$ с $A' = A$, $B' = B + C$ и $C' = C$.

В результате получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть в квазирешетке L выражение $\frac{l_1}{l_2-l_1}$ непредставимо в виде $\frac{A+B\alpha}{C}$, где A, B, C – целые, $B \neq 0$ и $(A, B, C) = 1$. Тогда*

$$\mathrm{Spec}L = \left\{ \frac{a+b\alpha}{h_L} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В противном случае

$$\mathrm{Spec}L = \{ \frac{a+b\alpha}{h_L} : a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (mA, m(B+C)), m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Drmota M., Tichy R. F. Sequences, discrepancies and applications. — Berlin: Springer. — 1997.

[2] Janot C. Quasicrystals. Clarendon Press. Oxford. 1994.

[3] Lagarias J., Mathematical quasicrystals and problem of diffraction // Directions in Mathematical Quasicrystals, Centre de Recherchers Mathematiques, Monograph Series, vol. 13, 2000, 61 — 93.

[4] Pinner C.G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha + \gamma\}$ // J.Number Theory. — 1997. — V. 65. — P. 48 — 73.

[5] Schlottmann M., Cut-and-project sets in locally compact Abelian groups, Quasicrystals and Discrete Geometry, edited by J. Patera, Fields Institute Monographs, Vol. 10 (AMS, Providence, RI, 1998), 247 — 264.

[6] Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. — 1910. — V. 30. — P. 377 — 407.

[7] Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Серия физика-математика. - 2010. - Вып. 5(76). -С. 83-87.

[8] Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. — 2009. — Т.52 — Вып.6 — С. 413 — 417.

[9] Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Задача Хуа Ло-кена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. — 2009. — Т.52 — Вып.7 — С. 497 — 500.

[10] Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к дофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19. — Вып. 3. — С. 177 — 208.

[11] Журавлев В. Г. Суммы квадратов над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2006. — Т. 337. — С. 165 — 190.

[12] Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2008. — Т. 350. — С. 139 — 159.

[13] Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — Вып. 3. — С. 18 — 46.

[14] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. — М.: Мир. — 1985.

[15] Красильщиков В. В., Шутов А. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. — 2007. — Вып. 7(57) — С. 84 — 91.

[16] Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий // Известия вузов. Математика. — 2009, — № 7, — С. 3 — 9.

[17] Красильщиков В. В., Шутов А. В. Распределение точек одномерных квазирешеток по переменному модулю // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 3. — С. 17 — 23.

[18] Швагирева И. К. Бинарные аддитивные задачи над $\circ$-прогессиями Фибоначчи. // Материалы VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тула, 11 — 16 мая 2010 года. Тула: ТГПУ. — 2010. — С. 198 — 200.

[19] Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сборник. — 2010. — Т. 11, Вып. 1. — С. 255 — 262.

[20] Шутов А. В. Об аддитивных задачах с числами специального вида //Математика, информатика и методика их преподавания. Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ (Москва, 14 — 16 марта 2011 г.). М.: МПГУ, — 2011, — С. 102 — 104.

Владимирский Государственный Университет
Получено 18.04.2012