А. Л. Фельштын, Системы Морса–Смейла и теория гомологии,
Изв. вузов. Матем., 1982, номер 9, 58–66

https://www.mathnet.ru/ivm6881

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 9 (244)

А. Л. Фельштын УДК 517.938

СИСТЕМЫ МОРСА — СМЕЙЛА И ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

В работе доказаны неравенства Морса для границы устойчивого инвариантного множества системы Морса—Смейла. Найден новый инвариант—четность числа гетероклинических траекторий, который определяет гомологии замыканий двумерных инвариантных многообразий систем Морса—Смейла на трехмерных многообразиях. Получены необходимые и достаточные условия на фазовую диаграмму системы Морса—Смейла на трехмерной сфере, при которых замыкания двумерных инвариантных многообразий точек покоя разбивают трехмерную сферу. Изучаются гомологии границы характеристического множества грубой трехмерной диссипативной системы.

1. Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = F(x, t), \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $F \in C^1(R^{n+1})$, $F(x, t+\omega) = F(x, t)$, $\omega > 0$; обозначим через T преобразование Пуанкаре для системы (1.1). Пусть $I \subset R^n$—асимптотически устойчивое компактное инвариантное множество диффеоморфизма T, а J—его граница. Предположим, что система (1.1) грубая в классе ω-периодических возмущений в области $U \times R$ пространства R^{n+1} переменных (x, t), здесь U—окрестность I в R^n, причем в $I \times R$ располагается конечное число периодических решений. Тогда T—диффеоморфизм типа Морса—Смейла [1], т. е. выполнены следующие условия:

1.1) множество Ω неблуждающих точек T в I есть объединение конечного числа периодических точек, каждая из которых гиперболическая;

1.2) устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Пусть $p \in \Omega$—периодическая точка T, $W^u(p)$ и $W^s(p)$—соответственно ее неустойчивое и устойчивое многообразия. Для двух точек покоя $p, q \in \Omega$ будем писать $p \to q$, если $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$. Фазовой диаграммой Φ диффеоморфизма T назовем множество всех связей $p \to q$ с указанием размерностей $W^u(p)$, $W^u(q)$. Обозначим через $\overline{W^u}(p)$ замыкание $W^u(p)$. Множество $\omega(W^u(p)) = \overline{W^u}(p) - W^u(p)$ называется ω-предельным множеством многообразия $W^u(p)$. Множество $\alpha(W^s(p)) = \overline{W^s}(p) - W^s(p)$ называется α-предельным множеством многообразия $W^s(p)$. Каждое из множеств $\omega(W^u(p))$, $\alpha(W^s(p))$ непусто, замкнуто, инвариантно.

Лемма 1.1 (С. Смейл [2]). *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) *в Φ есть связь $p \to q$;*

2) $W^u(q) \cap \omega(W^u(p)) \neq \varnothing$;

3) $\overline{W^u}(q) \subset \omega(W^u(p))$.

Замечание. Аналогичный результат верен в случае множества $\alpha(W^s(p))$ и связи $q \to p$.

Для диффеоморфизма T из связи $p \to q$ в фазовой диаграмме следует неравенство $\dim W^u(p) \geqslant \dim W^u(q)$.

Имеет место следующая стандартная теорема теории Морса, доказательство которой имеется в [3].

Теорема 1.1 [2], [3]. *Пусть X есть n-мерное топологическое пространство, в котором для каждого целого p определено замкнутое подпространство L^p таким образом, что $L^p \supset L^{p-1}$, и существуют целые числа a, b, для которых $L^a = \varnothing$ и $L^b = X$. Используя любую фиксированную теорию когомологий и поле коэффициентов K, допустим, что размерность $H^q(L^p, L^{p-1}, K)$*

конечна для каждых p и q. Пусть $B_q = \dim H^q(X, K)$ и $M_q = \sum_{l=a}^{b} \dim H^q(L^l, L^{l-1}, K)$. Тогда числа M_q и B_q удовлетворяют соотношениям Морса:

$$M_0 \geqslant B_0, \quad M_1 - M_0 \geqslant B_1 - B_0,$$

$$M_2 - M_1 + M_0 \geqslant B_2 - B_1 + B_0, \dots, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k M_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k B_k.$$

Пусть $\Omega_k = \{p \in \Omega : \dim W^u(p) = k\}$. В работе [4] доказано, что множество J состоит из целых неустойчивых многообразий периодических точек $p \in \Omega_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Теорема 1.2 [4]. *Если для $p \in \Omega$ $W^u(p) \cap J \neq \varnothing$, то $W^u(p) \subset J$.*

В работах [4], [5] проведена классификация неустойчивых многообразий периодических точек, лежащих в J, путем присвоения им рангов. Будем говорить, что неустойчивое многообразие $W^u(p)$, $p \in J$, имеет ранг, равный единице, если $p \in \Omega_0 \cap J$ (т. е. p—устойчивая периодическая точка). Дальнейшие ранги вводятся индуктивно.

Определение 1.1 [4]. Будем говорить, что неустойчивое многообразие $W^u(p) \subset J$ имеет ранг $k \geqslant 2$, если в фазовой диаграмме Φ есть связь $p \to q^*$, где $q^* \in J$, ранг $W^u(q^*)$ равен $k-1$, и для любой связи $p \to q^{**}$, где $q^{**} \in J$, ранг $W^u(q^{**})$ не превосходит $k-1$.

Теорема 1.3 [4]. *Существует такое натуральное число m, что любое неустойчивое многообразие из J имеет ранг, меньший или равный m, и если l—натуральное число, $l \leqslant m$, то J содержит неустойчивое многообразие ранга l.*

2. Определим по индукции последовательность множеств $P^k \subset J$, для которых $P^k \supset P^{k-1}$ и $P^k = J$ для достаточно больших k. Положим $P^0 = \varnothing$, а P^k определим как объединение замыканий всех неустойчивых многообразий в J, ранга, не превосходящего k. Тогда $P^k \supset P^{k-1}$, P^k замкнуто в J, а разность $P^k - P^{k-1}$ является несвязным объединением неустойчивых многообразий в J ранга k. Из теоремы 1.3 вытекает, что существует такое целое число m, что $P^m = J$. Можно построить пример (см., напр., [5], с. 141), показывающий, что P^k не обязательно локально связно, и что для многообразия $W^u(p) \subset P^k - P^{k-1}$ и многообразия $W^u(q) \subset P^{k-1}$ может иметь место равенство $\dim W^u(p) = \dim W^u(q)$. В дальнейшем будем использовать когомологии Чеха, т. к. множество J не обязательно локально связно. Пусть K—некоторое поле. Через $\check{H}_c^q(X, K)$ будем обозначать группу когомологий Чеха с компактными носителями с коэффициентами из поля K. Если множество Y замкнуто в X, то в теории Чеха имеет место изоморфизм (см. [6]):

$$\check{H}_c^q(X, Y, K) \cong \check{H}_c^q(X - Y, K). \tag{2.1}$$

Предположим, что $\dim J = d$. Тогда $0 \leqslant d \leqslant n-1$. Пусть A_q—число таких периодических точек в J, что $\dim W^u(p) = q$, а $R_q = \dim \check{H}_c^q(J, K)$.

Теорема 2.1. *Числа A_q и R_q удовлетворяют соотношениям Морса:*

$$A_0 \geqslant R_0, \quad A_1 - A_0 \geqslant R_1 - R_0,$$

$$A_2 - A_1 + A_0 \geqslant R_2 - R_1 + R_0, \dots, \sum_{k=0}^{d}(-1)^k A_k = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k R_k. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть число неустойчивых многообразий в J равно t. Как было отмечено, разность $P^k - P^{k-1}$ является несвязным объединением неустойчивых многообразий ранга k. Пусть их количество равно r_k. Тогда при изменении k от 0 до m получаются все t неустойчивых многообразий в J. Из формулы (2.1) следует

$$\dim \check{H}_c^q(P^k, P^{k-1}, K) = \sum_{i=1}^{r_k} \dim \check{H}_c^q(W^u(p_i), K),$$

где ранг $W^u(p_i)$ равен k. Отсюда,

$$\sum_{k=0}^{m} \dim \check{H}_c^q(P^k, P^{k-1}, K) = \sum_{i=1}^{t} \dim \check{H}_c^q(W^u(p_i), K) \tag{2.3}$$

(справа сумма по всем неустойчивым многообразиям в J). Используя двойственность Пуанкаре, получим

$$\check{H}_c^q(W^u(p_i), K) \cong H_{\dim W^u(p_i)-q}(W^u(p_i), K). \tag{2.4}$$

Так как многообразие $W^u(p_i)$ гомеоморфно эвклидову пространству, то $\dim H_0(W^u(p_i), K) = 1$, $\dim H_p(W^u(p_i), K) = 0$ при $p \geqslant 1$. Отсюда

$$\dim H_{\dim W^u(p_i)-q}(W^u(p_i), K) = \begin{cases} 1, & \text{если } \dim W^u(p_i) = q; \\ 0, & \text{если } \dim W^u(p_i) \neq q. \end{cases} \tag{2.5}$$

Из формул (2.3)—(2.5) получим

$$\sum_{k=0}^{m} \dim \check{H}_c^q(P^k, P^{k-1}, K) = \sum_{i=1}^{t} \dim \check{H}_c^q(W^u(p_i), K) =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \dim H_{\dim W^u(p_i)-q}(W^u(p_i), K) = A_q.$$

По теореме 1.1 A_q и R_q удовлетворяют соотношениям Морса.

3. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = F(x), \tag{3.1}$$

где x, F суть n-мерные векторы, $F \in C^1(R^n)$. Предположим, что система (3.1) имеет асимптотически устойчивое, компактное, инвариантное множество I, J— его граница. Пусть (3.1)—система Морса—Смейла в некоторой окрестности U множества I, т. е. выполнены следующие условия:

3.1) множество неблуждающих точек Ω системы (3.1) в U состоит из конечного числа гиперболических точек покоя и гиперболических замкнутых траекторий;

3.2) устойчивые и неустойчивые многообразия точек покоя и замкнутых траекторий пересекаются трансверсально.

В работе [4] показано, что J состоит из целых неустойчивых многообразий точек покоя и замкнутых траекторий.

Теорема 3.1 [4]. *Если для замкнутой траектории или точки покоя* $p \in \Omega$ $W^u(p) \cap J \neq \varnothing$, *то* $W^u(p) \subset J$.

В работе [4] проведена классификация неустойчивых многообразий замкнутых траекторий и точек покоя, лежащих в J, посредством присвоения им рангов.

Будем говорить, что неустойчивое многообразие $W^u(p) \subset J$ имеет ранг равный единице, если $p \in \Omega_0 \cap J$ (т. е. p—устойчивая точка покоя или устойчивая замкнутая траектория).

Дальнейшие ранги вводятся индуктивно. Определение ранга порядка $k \geqslant 2$ для неустойчивого многообразия точки покоя или замкнутой траектории в J совпадает с определением 1.1. Теорема 1.3 справедлива и в этой ситуации. Неустойчивые многообразия замкнутых траекторий могут быть неориентируемыми, поэтому будем считать, что коэффициенты групп когомологий принадлежат Z_2.

Пусть a_q—число точек покоя p в J с $\dim W^u(p) = q$, b_q—число замкнутых траекторий γ в J с $\dim W^u(\gamma) = q$. Пусть $M_q = a_q + b_q + b_{q+1}$, а $R_q = \dim \check{H}_c^q(J, Z_2)$. Предположим, что $\dim J = d$. Тогда $0 \leqslant d \leqslant n-1$. Аналогично теореме 2.1 доказывается

Теорема 3.2. *Числа M_q и R_q удовлетворяют соотношениям Морса:*

$$M_0 \geqslant R_0,\ M_1 - M_0 \geqslant R_1 - R_0,\ M_2 - M_1 + M_0 \geqslant R_2 - R_1 + R_0, \ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k M_k = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k R_k. \tag{3.2}$$

Замечание 1. Если все неустойчивые многообразия замкнутых траекторий ориентируемы, то неравенства Морса справедливы для групп когомологий с коэффициентами из произвольного поля K.

Следствие 1. Аналогичные неравенства Морса справедливы для характеристического множества I [5] диссипативной системы и его границы $J = \partial I$.

4. Рассмотрим диффеоморфизм Морса—Смейла f замкнутого, гладкого, n-мерного многообразия M. Пусть $p \in \Omega(f)$ ($\dim W^u(p) = k$)—периодическая точка диффеоморфизма f. Тогда, как известно [2], множество $\omega(W^u(p)) = \overline{W^u}(p) - W^u(p)$ состоит из неустойчивых многообразий периодических точек, размерности которых не превосходят k. Эти неустойчивые многообразия можно расклассифицировать по рангам [7]. Определение ранга неустойчивого многообразия такое же, как и в п. 1. Для предельного множества $\omega(W^u(p))$ справедлив аналог теоремы 1.3. Пусть A_q—число таких периодических точек r в $\omega(W^u(p))$, что $\dim W^u(r) = q$, а $R_q = \dim \check{H}_c^q(\omega(W^u(p)), K)$. Тогда числа A_q и R_q удовлетворяют соотношениям Морса (2.2). Доказательство такое же, как и в теореме 2.1.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений Морса—Смейла на замкнутом гладком n-мерном многообразии M. Пусть p—замкнутая траектория или точка покоя этой системы и $\dim W^u(p) = k$. Тогда предельное множество $\omega(W^u(p))$ состоит из неустойчивых многообразий точек покоя или замкнутых траекторий, размерности которых не превосходят k [2]. Эти неустойчивые многообразия можно расклассифицировать по рангам [7]. Определение ранга неустойчивого многообразия из $\omega(W^u(p))$ такое же, как и в п. 3. Для $\omega(W^u(p))$ справедлив аналог теоремы 1.3. Пусть a_q—число точек покоя в $\omega(W^u(p))$ с $\dim W^u(r) = q$, b_q—число замкнутых траекторий γ в $\omega(W^u(p))$ с $\dim W^u(\gamma) = q$. Пусть $M_q = a_q + b_q + b_{q+1}$, а $R_q = \dim \check{H}_c^q(\omega(W^u(p)), Z_2)$. Тогда числа M_q и R_q удовлетворяют соотношениям Морса (3.2). Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.

5. Пусть на трехмерной сфере S^3 задано касательное векторное поле F класса C^1, которому соответствует система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = F(x). \tag{5.1}$$

Предположим, что (5.1)—система Морса—Смейла без периодических траекторий, т. е. выполнены следующие требования:

5.1) множество неблуждающих точек Ω есть объединение конечного числа точек покоя, каждая из которых гиперболическая;

5.2) устойчивые и неустойчивые многообразия точек покоя пересекаются трансверсально.

Пусть X—топологическое пространство. Будем обозначать через $H_m(X)$ и $H^m(X)$ m-мерные приведенные группы гомологий и когомологий с коэффициентами в группе Z. Через $\operatorname{Tor} H_m(X)$ обозначим кручение группы $H_m(X)$. Отметим, что из условия 5.2) следует, что в случае связи $p \to q$ выполняется неравенство $\dim W^u(p) > \dim W^u(q)$.

Будем говорить, что фазовая диаграмма Φ содержит цикл типа (2.3), проходящий через точку покоя p, $\dim W^u(p) = 2$, если либо существует единственная точка покоя o, $\dim W^u(o) = 3$, такая, что $o \to p$, либо в фазовой диаграмме есть связь

$$o_1 \to p_1 \leftarrow o_2 \to \ldots \leftarrow o_k \to p \leftarrow o_{k+1} \to \ldots \leftarrow o_m \to p_m \leftarrow o_1, \tag{5.2}$$

в которой $\dim W^u(o_i) = 3$, $\dim W^u(p_i) = 2$, $o_i \neq o_j$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Пусть $p\in\Omega$—точка покоя с $\dim W^u(p)=2$. Из условий 5.1) и 5.2) следует, что в $\omega(W^u(p))$ могут входить только устойчивые точки покоя и точки покоя с одномерными неустойчивыми многообразиями. Пусть s_i, $1\leqslant i\leqslant m_0$,—все устойчивые точки покоя, а r_j, $1\leqslant j\leqslant m_1$,—все точки покоя с $\dim W^u(r_j)=1$, лежащие в $\omega(W^u(p))$. По лемме 1.1 $\overline{W^u}(r_j)\subset\omega(W^u(p))$ при $1\leqslant j\leqslant m_1$. Из условия трансверсальности 5.2) следует

Лемма 5.1. *Пересечение* $W^u(p)\cap W^s(r_j)$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, *состоит из конечного числа гетероклинических траекторий.*

Введем в $\overline{W^u}(p)$ топологию, индуцированную топологией из S^3.

Лемма 5.2 [8]. $\overline{W^u}(p)$ *является конечным двумерным клеточным пространством.*

При этом нульмерными клетками $\overline{W^u}(p)$ будут устойчивые точки покоя s_i, $1\leqslant i\leqslant m_0$, $s_i\in\omega(W^u(p))$, одномерными клетками $\overline{W^u}(p)$ будут одномерные неустойчивые многообразия $W^u(r_j)$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, $r_j\in\omega(W^u(p))$. Единственной двумерной клеткой $\overline{W^u}(p)$ является само неустойчивое многообразие $W^u(p)$. Будем обозначать k-мерный остов клеточного пространства X через $\mathrm{Ske}_k X$, а фильтрацию X его остовами—через $\mathrm{Ske}\, X$ [9]. Тогда $\mathrm{Ske}_0\,\overline{W^u}(p)$ состоит из устойчивых точек покоя $s_i\in\omega(W^u(p))$, $1\leqslant i\leqslant m_0$; $\mathrm{Ske}_1\,\overline{W^u}(p)=\omega(W^u(p))$, $\mathrm{Ske}_2\,\overline{W^u}(p)=\overline{W^u}(p)$. Обозначим через $S(\overline{W^u}(p))$ сингулярный комплекс пространства $\overline{W^u}(p)$ [6]. Тогда $S(\overline{W^u}(p))$ гомотопически эквивалентен $S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p))$, т. е. имеет место изоморфизм в гомологиях $H_i(\overline{W^u}(p))\cong H_i(S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p)))$, $i=0, 1, 2$ [6]. Клеточный комплекс S $(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p))$ имеет следующий вид:

$$O\xrightarrow{\partial_3=0}C_2\xrightarrow{\partial_2}C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0,$$

где

$$C_0=H_0(\mathrm{Ske}_0\,\overline{W^u}(p))\cong\underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_0},$$

$$C_1=H_1(\mathrm{Ske}_1\,\overline{W^u}(p)/\mathrm{Ske}_0\,\overline{W^u}(p))\cong\underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_1},$$

$$C_2=H_2(\mathrm{Ske}_2\,\overline{W^u}(p)/\mathrm{Ske}_1\,\overline{W^u}(p))\cong Z.$$

При этом образующим группы C_0 соответствуют ориентированные нульмерные клетки s_j, $1\leqslant j\leqslant m_0$, группа C_1 имеет образующие a_j, $1\leqslant j\leqslant m_1$, которым соответствуют ориентированные одномерные клетки $W^u(r_j)$, $1\leqslant j\leqslant m_1$. Группа C_2 имеет образующую b, которой соответствует ориентированная двумерная клетка $W^u(p)$. Обозначим через $[b:a_j]$ коэффициент инцидентности 2-клетки b с 1-клеткой a_j.

Лемма 5.3 [6]. $\partial_2 b=\sum\limits_{i=1}^{m_1}[b:a_j]\,a_j$.

Отсюда гомоморфизму ∂_2 соответствует строка, элементами которой являются целые числа—коэффициенты инцидентности $[b:a_j]$, $1\leqslant j\leqslant m_1$.

Теорема 5.1. $H_2(\overline{W^u}(p))=Z$ *тогда и только тогда, когда для каждой точки покоя* $r_j\in\omega(W^u(p))$, $\dim W^u(r_j)=1$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, *пересечение* $W^u(p)\cap W^s(r_j)$ *состоит из четного числа гетероклинических траекторий.*

Доказательство. Достаточность. Пусть для каждой точки покоя $r_j\in\omega(W^u(p))$ пересечение $W^u(p)\cap W^s(r_j)$ состоит из четного числа траекторий. Тогда все коэффициенты инцидентности $[b:a_j]$ $(1\leqslant j\leqslant m_1)$—четные числа. Если все $[b:a_j]$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, равны нулю, то ∂_2 нулевой, а значит, $\mathrm{Ker}\,\partial_2\cong C_2\cong Z$. Так как $\partial_3=0$, то подгруппа $\mathrm{Im}\,\partial_3=0$. Отсюда $H_2(\overline{W^u}(p))\cong H_2(S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p))\cong\mathrm{Ker}\,\partial_2/\mathrm{Im}\,\partial_3\cong\mathrm{Ker}\,\partial_2\cong C_2\cong Z$, таким образом, $H_2(\overline{W^u}(p))\cong Z$, и доказательство закончено. Пусть имеются ненулевые коэффициенты $[b:a_j]$.

Тогда элемент $\partial_2(b)=\sum_{j=1}^{m_1}[b:a_j]\,a_j$ можно поделить на два, т. к. все $[b:a_j]$, $1\leqslant j\leqslant m_1$,—четные числа. Элемент $\alpha=(1/2)\,\partial_2(b)\in\operatorname{Ker}\partial_1$. С другой стороны, $\alpha\bar{\in}\operatorname{Im}\partial_2$. Обозначим через α^* гомологический класс элемента α в группе $H_1(S(\operatorname{Ske}\overline{W^u}(p)))=\operatorname{Ker}\partial_1/\operatorname{Im}\partial_2$. Так как $2\alpha=\partial_2(b)\in\operatorname{Im}\partial_2$, то $2\alpha^*=0$. Значит, группа $H_1(S(\operatorname{Ske}\overline{W^u}(p))$ имеет кручение. Отсюда

$$\operatorname{Tor}H_1(\overline{W^u}(p))\cong\operatorname{Tor}H_1(S(\operatorname{Ske}\overline{W^u}(p)))\neq 0. \tag{5.3}$$

У клеточного пространства $\overline{W^u}(p)$ группы гомологий $H_i(\overline{W^u}(p))$ конечно порождены. Тогда из теоремы об универсальных коэффициентах для гомологий [6] и двойственности Александера [6] получим при $i=1$, 2,3 следующие изоморфизмы:

$$\operatorname{Tor}H_{i-1}(S^3-\overline{W^u}(p))\cong\operatorname{Tor}H_{3-i-1}(\overline{W^u}(p)), \tag{5.4}$$

$$H_{i-1}(S^3-\overline{W^u}(p))/\operatorname{Tor}H_{i-1}(S^3-\overline{W^u}(p))\cong H_{3-i}(\overline{W^u}(p))/\operatorname{Tor}H_{3-i}(\overline{W^u}(p)). \tag{5.5}$$

Для любого топологического пространства X $\operatorname{Tor}H_0(X)\cong 0$. Так как по (5.3) $\operatorname{Tor}H_1(\overline{W^u}(p))\ncong 0$, а из (5.4) при $i=1$ следует, что $\operatorname{Tor}H_0(S^3-\overline{W^u}(p))\cong$ $\cong\operatorname{Tor}H_1(\overline{W^u}(p))$, то приходим к противоречию. Следовательно, если все коэффициенты инцидентности $[b:a_j]$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, четны, то они равны нулю, а это влечет $H_2(\overline{W^u}(p))=Z$.

Необходимость. Пусть $H_2(\overline{W^u}(p))\cong Z$. Так как $\operatorname{Ker}\partial_2\cong H_2(\overline{W^u}(p))\cong Z$ и $C_2\cong Z$, то $\operatorname{Ker}\partial_2=C_2$ ($\operatorname{Ker}\partial_2$—подгруппа группы C_2). Значит, гомоморфизм ∂_2 нулевой. Но тогда все $[b:a_j]=0$ при $1\leqslant j\leqslant m_1$. Отсюда для каждого $r_j\in\omega(W^u(p))$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, пересечение $W^u(p)\cap W^s(r_j)$ состоит из четного числа траекторий.

Теорема 5.2 [10]. *$\overline{W^u}(p)$ не разбивает сферу S^3 тогда и только тогда, когда в $\omega(W^u(p))$ существует точка покоя r_i, $\dim W^u(r_i)=1$, такая, что пересечение $W^u(p)\cap W^s(r_i)$ состоит из нечетного числа траекторий.*

Доказательство. Пусть в $\omega(W^u(p))$ существует r_i, $\dim W^u(r_i)=1$, такая, что $W^u(p)\cap W^s(r_i)$ состоит из нечетного числа траекторий. Тогда коэффициент $[b:a_i]$—нечетное число, отсюда ∂_2 ненулевой, а значит, $\operatorname{Ker}\partial_2\cong 0$. Так как $H_2(\overline{W^u}(p))\cong\operatorname{Ker}\partial_2\cong 0$, то из формулы (5.5) при $i=1$ следует, что $H_0(S^3-\overline{W^u}(p))\cong 0$. Следовательно, множество $S^3-\overline{W^u}(p)$ имеет ровно один компонент линейной связности (рассматриваем приведенные гомологии), т. е. множество $S^3-\overline{W^u}(p)$ связно. Значит, $\overline{W^u}(p)$ не разбивает S^3.

Рассмотрим обратное. Пусть $\overline{W^u}(p)$ не разбивает S^3. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что в $\omega(W^u(p))$ не существует точки покоя r_i, $\dim W^u(r_i)=1$, такой, что $W^u(p)\cap W^s(r_i)$ состоит из нечетного числа траекторий. Тогда для каждой точки покоя $r_j\in\omega(W^u(p))$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, $W^u(p)\cap W^s(r_j)$ состоит из четного числа траекторий. Отсюда по теореме 5.1 $H_2(\overline{W^u}(p))\cong Z$. Из формулы (5.5) при $i=1$ следует, что и $H_0(S^3-\overline{W^u}(p))\cong Z$. Следовательно, множество $S^3-\overline{W^u}(p)$ состоит из двух компонентов линейной связности. Поскольку $S^3-\overline{W^u}(p)$—открытое множество в S^3, оно локально линейно связно. Отсюда его компоненты линейной связности являются его компонентами связности, т. е. множество $S^3-\overline{W^u}(p)$ не связно. Следовательно, $\overline{W^u}(p)$ разбивает S^3. Получили противоречие.

Теорема 5.3. *$H_2(\overline{W^u}(p))=Z$ тогда и только тогда, когда в фазовой диаграмме Φ системы* (5.1) *не проходит цикл типа* (2.3) *через точку покоя p.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что $H_2(\overline{W^u}(p))=Z$, а в Φ проходит цикл типа (2.3) через p. Пусть A—носитель этого цикла, т. е. $A=\overline{W^s}(p)$ в том случае, когда существует единственная точка покоя 0, $\dim W^u(0)=3$, такая, что $0\to p$ или $A=\overline{W^s}(p_1)\cup\ldots\cup\overline{W^s}(p)\cup\ldots\cup\overline{W^s}(p_m)$ в случае наличия в Ф связи (5.2). Носитель цикла A гомеоморфен окружности. Значит, $H_1(A)\cong Z$. Обозначим через $C_i(X)$ группу i-мерных сингулярных цепей пространства X. Рассмотрим образующую $b\in H_2(\overline{W^u}(p))\cong Z$ и $a\in H_1(A)\cong Z$. Образующим b и a соответствуют циклы $b^*\in C_2(\overline{W^u}(p))$ и $a^*\in C_1(A)$. Так как $H_2(S^3)=H_1(S^3)=0$, то циклы b^* и a^* гомологичны нулю. Но тогда их индекс пересечения $b^*a^*=0$. С другой стороны, из условия трансверсальности и леммы 1.1 следует, что пересечение $A\cap\overline{W^u}(p)$ состоит из единственной точки p, в которой A и $\overline{W^u}(p)$ пересекаются трансверсально. Отсюда $b^*a^*=1$. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть через p не проходит цикл типа (2.3) в фазовой диаграмме Ф. Рассмотрим произвольную точку покоя $r\in\omega(W^u(p))$, $\dim W^u(r)=1$. Из замечания к лемме 1.1 следует, что $\alpha(W^s(r))\supset\overline{W^s}(p)$. В фазовой диаграмме на множестве $\alpha(W^s(r))$ нет цикла типа (2.3), проходящего через p, иначе цикл типа (2.3), проходящий через p, был бы в Ф. Следовательно, множество $R=\alpha(W^s(r))-W^s(p)$ состоит из двух компактных компонентов связности R_1 и R_2. Отсюда существуют окрестности $U_1\supset R_1$ и $U_2\supset R_2$ такие, что $U_1\cap U_2=\varnothing$. Из [11] следует, что существует сколь угодно малая окрестность U множества $\alpha(W^s(r))$, граница которой ∂U есть замкнутое, ориентируемое, гладкое двумерное многообразие M без контакта с полем F системы (5.1). При этом траектории системы (5.1) пересекают M, выходя из U при возрастании t. Каждая траектория $\varphi(t,\sigma)$ (где σ—точка на гладкой окружности без контакта Σ вокруг точки покоя p на многообразии $W^u(p)$) пересекает M ровно один раз в момент времени $\tau(\sigma)$. Из общих теорем теории дифференциальных уравнений следует, что отображение $\sigma\to\varphi(\tau(\sigma),\sigma)$ есть диффеоморфизм. Пусть γ—гладкая окружность на M—образ Σ при этом диффеоморфизме. У γ существует окрестность C на M, гомеоморфная цилиндру [11]. При этом U можно выбрать так, чтобы многообразие $M-C\subset(U_1\cup U_2)$ состояло из двух связных компонентов $V_1\subset U_1$ и $V_2\subset U_2$. Отсюда следует, что γ разбивает C на два цилиндра C_1 и C_2, а M—на два непересекающихся многообразия $M_1=V_1\cup C_1$ и $M_2=V_2\cup C_2$, т. к. $V_1\cap V_2=\varnothing$ и $C_i\cap V_i=\varnothing$ при $i=1,2$, причем окружность γ будет границей как многообразия M_1, так и M_2. Но тогда сингулярный цикл γ^*, носителем которого является γ, будучи границей, гомологичен нулю. Так как множество $\alpha(W^s(r))\subset U$, то каждая траектория $\varphi(t,\sigma)$ (где σ—точка на окружности без контакта Σ_1 вокруг точки покоя r на $W^s(r)$, $\dim W^s(r)=2$) пересекает M ровно один раз в момент времени $m(\sigma)$. Отображение $\sigma\to\varphi(m(\sigma),\sigma)$ есть диффеоморфизм. Обозначим через β гладкую окружность на M—образ Σ_1 при этом диффеоморфизме. Окружности γ и β пересекаются трансверсально и по конечному числу точек, т. к. $W^u(p)$ и $W^s(r)$ пересекаются трансверсально и по конечному числу траекторий. Пусть γ^* и β^*—сингулярные циклы, носители которых γ и β. Известно [12], что индекс пересечения $\gamma^*\beta^*=N^+-N^-$, где N^+ (соответственно, N^-)—число точек пересечения, в которых ориентации γ и β согласованы (соответственно, не согласованы) [12]. С другой стороны, цикл γ^* гомологичен нулю, следовательно, $\gamma^*\beta^*=0$, а тем самым $N^+=N^-$. Отсюда общее число точек пересечения $n=N^++N^-=2N^+$ четно. Следовательно, пересечение $W^u(p)\cap W^s(r)$ состоит из четного числа траекторий. Так как r—произвольная точка из $\omega(W^u(p))$, $\dim W^u(r)=1$, то по теореме 5.1 $H_2(\overline{W^u}(p))=Z$. Теорема доказана.

Из теорем 5.2 и 5.3 следует

Теорема 5.4 [10]. *$\overline{W^u}(p)$ разбивает сферу S^3 тогда и только тогда, когда в фазовой диаграмме Ф системы* (5.1) *не проходит цикл типа* (2.3) *через точку покоя p.*

Теорема 5.5. *Пусть через точку покоя p не проходит цикл типа* (2.3) *в фазовой диаграмме Ф. Тогда*

$$H_1(\overline{W^u}(p))=\underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_1-m_0+1}.$$

Доказательство. Если через p не проходит цикл типа (2.3) в Φ, то по теореме 5.3 для каждой точки покоя $r_j \in \omega(W^u(p))$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, $\dim W^u(r_j)=1$ пересечение $W^u(p) \cap W^s(r_j)$ состоит из четного числа траекторий. Отсюда все коэффициенты $[b:a_j]$ $(1 \leqslant j \leqslant m_1)$—четные числа. Но тогда, как показано в теореме 5.1, все $[b:a_j]=0$ при $1 \leqslant j \leqslant m_1$. Следовательно, ∂_2 нулевой. Отсюда $H_1(\overline{W^u}(p)) \cong H_1(S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p))) \cong \mathrm{Ker}\,\partial_1/\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong \mathrm{Ker}\,\partial_1$. Как известно [6]:

$$\mathrm{Ker}\,\partial_1 = \underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_1-m_0+1}.$$

Значит, и

$$H_1(\overline{W^u}(p)) \cong \underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_1-m_0+1}.$$

Пусть $r \in \Omega$, $\dim W^s(r)=2$. Замена времени t на $-t$ в системе (5.1) позволяет доказать теоремы относительно $\overline{W^s}(r)$, двойственные теоремам 5.1—5.5. Введенный инвариант—четность числа гетероклинических траекторий определяет циклическую структуру фазовой диаграммы.

Теорема 5.6. *Фазовая диаграмма* Φ *содержит цикл типа* (2.3) *тогда и только тогда, когда существуют точка покоя* p, $\dim W^u(p)=2$, *и точка покоя* r, $\dim W^s(r)=2$, *системы* (5.1) *такие, что пересечение* $W^u(p) \cap W^s(r)$ *состоит из нечетного числа траекторий.*

6. Рассмотрим теперь систему Морса—Смейла без периодических траекторий на M^3—гладком замкнутом трехмерном многообразии. Пусть $p \in \Omega$, $\dim W^u(p)=2$. Предположим по-прежнему, что $\omega(W^u(p))$ содержит m_0 устойчивых точек покоя s_i, $1 \leqslant i \leqslant m_0$, и m_1 точек покоя r_j, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, $\dim W^u(r_j)=1$.

Теорема 6.1. $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2)=Z_2$ *тогда и только тогда, когда для каждой точки покоя* $r_j \in \omega(W^u(p))$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, *пересечение* $W^u(p) \cap W^s(r_j)$ *состоит из четного числа траекторий.*

Доказательство. Через $S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p)) \otimes Z_2$ обозначим тензорное произведение клеточного комплекса $S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p))$ на группу Z_2 [6]. Тогда комплекс $S(\mathrm{Ske}\,\overline{W^u}(p)) \otimes Z_2$ имеет следующий вид:

$$O \xrightarrow{0} C_2 \otimes Z_2 \xrightarrow{\partial_2 \otimes \mathrm{id}} C_1 \otimes Z_2 \xrightarrow{\partial_1 \otimes \mathrm{id}} C_0 \otimes Z_2,$$

где

$$C_2 \otimes Z_2 = Z_2,\quad C_1 \otimes Z_2 \cong \underbrace{Z_2+Z_2+\ldots+Z_2}_{m_1},\quad C_0 \otimes Z_2 \cong \underbrace{Z_2+Z_2+\ldots+Z_2}_{m_0}.$$

Пусть для каждой точки покоя $r_j \in \omega(W^u(p))$ пересечение $W^u(p) \cap W^s(r_j)$ состоит из четного числа траекторий. Тогда все коэффициенты $[b:a_j]$—четные числа. Но тогда гомоморфизм $\partial_2 \otimes \mathrm{id}$ нулевой, т. к. он задается строкой из $[b:a_j]$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, по $\mathrm{mod}\,2$. Следовательно, $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2) \cong \mathrm{Ker}(\partial_2 \otimes \mathrm{id}) \cong$ $\cong C_2 \otimes Z_2 \cong Z_2$.

Рассмотрим обратное. Пусть $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2)=Z_2$. Тогда и $\mathrm{Ker}(\partial_2 \otimes \mathrm{id}) \cong$ $\cong H_2(\overline{W^u}(p), Z_2) \cong Z_2$. Отсюда $\mathrm{Ker}(\partial_2 \otimes \mathrm{id}) \cong C_2 \otimes Z_2$. Значит, $\partial_2 \otimes \mathrm{id}$ нулевой, т. е. все $[b:a_j]$ $(1 \leqslant j \leqslant m_1)$—нули по $\mathrm{mod}\,2$, а значит, четные числа. Отсюда пересечение $W^u(p) \cap W^s(r_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, состоит из четного числа траекторий.

Теорема 6.2. *Пусть в фазовой диаграмме* Φ *не проходит цикл типа* (2.3) *через точку покоя* p. *Тогда* $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2)=Z_2$.

Доказательство. Так же, как в теореме 5.3, показывается, что для каждой точки покоя $r_j \in \omega(W^u(p))$, $\dim W^u(r_j)=1$, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, пересечение $W^u(p) \cap W^s(r_j)$ состоит из четного числа траекторий. Отсюда по теореме 5.1 $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2)=Z_2$.

Теорема 6.3. *Пусть* $H_2(M, Z_2)=0$. $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2)=Z_2$ *тогда и только тогда, когда в фазовой диаграмме не проходит цикл типа* (2.3) *через точку покоя* p.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 6.2.

Необходимость. Пусть $H_2(\overline{W^u}(p), Z_2)=Z_2$, а в Φ проходит цикл типа (2.3) через p. Пусть A—носитель этого цикла. Тогда $H_1(A, Z_2)=Z_2$. Из 5.2 следует, что $\overline{W^u}(p)$ и A пересекаются только в точке p и притом трансверсально. Тогда по лемме 1.3 [11] получим, что $H_2(M, Z_2)\neq 0$. Получили противоречие. Из теорем 6.1 и 6.3 следует

Теорема 6.4. *Пусть* $H_2(M, Z_2)=0$. *Фазовая диаграмма* Φ *содержит цикл типа* (2.3) *тогда и только тогда, когда существуют точка покоя* p, $\dim W^u(p)=2$, *и точка покоя* r, $\dim W^s(r)=2$, *такие, что пересечение* $W^u(p)\cap W^s(r)$ *состоит из нечетного числа траекторий.*

7. Рассмотрим систему

$$dx/dt=F(x), \quad F\in C^1(R^3). \tag{7.1}$$

Пусть система 7.1 диссипативна и груба. Обозначим через I характеристическое множество [5] диссипативной системы (7.1). Пусть $J=\partial I$—граница I. Предположим в дальнейшем, что в множестве I нет замкнутых траекторий.

Лемма 7.1 [4]. *Пусть точка покоя* $p\in J$, $\dim W^u(p)=i$, *где* $i=0, 1, 2$. *Тогда* $W^u(p)\subset J$.

Для определенности предположим, что J содержит m_0 устойчивых точек покоя s_i, $1\leqslant i\leqslant m_0$, $\dim W^u(s_i)=0$, m_1 точек покоя r_j, $1\leqslant j\leqslant m_1$, $\dim W^u(r_j)=1$, и m_2 точек покоя p_k, $1\leqslant k\leqslant m_2$, $\dim W^u(p_k)=2$. Аналогично лемме 5.2 доказывается

Теорема 7.3. *J является конечным клеточным пространством и* $\dim J\leqslant 2$. *При этом* $\mathrm{Ske}_0 J=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant m_0} s_i$, $\mathrm{Ske}_2 J=\bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant m_2} W^u(p_k)$, $\mathrm{Ske}_1 J=\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m_1} W^u(r_j)$.

Из теорем 5.1, 5.5 следует

Теорема 7.4. *Пусть для любых точек покоя* $r_j\in J$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, $\dim W^u(r_j)=1$, *и* $p_k\in J$, $1\leqslant k\leqslant m_2$, $\dim W^u(p_k)=2$, *пересечение* $W^u(p_k)\cap W^s(r_j)$ *состоит из четного числа гетероклинических траекторий. Тогда*

$$H_1(J)=\underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_1-m_0+1}; \quad H_2(J)=\underbrace{Z+Z+\ldots+Z}_{m_2}.$$

Замечание. Из теоремы 7.4 следует, что если все пересечения $W^u(p_k)\cap$ $\cap W^s(r_j)$, $1\leqslant k\leqslant m_2$, $1\leqslant j\leqslant m_1$, состоят из четного числа траекторий, то неравенства Морса для J превращаются в равенства. В этом случае множество J устроено „идеально“ с точки зрения теории гомологий: неустойчивые многообразия точек покоя из J являются образующими групп гомологий множества J.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы.—УМН, 1970, т. XXV, рып. 1., с. 113—185.

2. Смейл С. Неравенства Морса для динамических систем.—Математика (сб. переводов), 1967, т. 2, вып. 4, с. 79—87.

3. Pitcher E. Inequalities of critical point theory.—Bull. Amer. Math. Soc., 1958, v. 64, № 1, p. 1—30.

4. Плисс В. А., Пилюгин С. Ю. Граница устойчивого инвариантного множества системы Морса—Смейла.—Дифференц. уравнения, 1978, т. XIV, № 11, с. 1997—2001.

5. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.—М., 1977.—304 с.

6. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии.—М., 1976.—464 с.

7. Фельштын А. Л. Структура фазовых диаграмм трехмерных систем типа Морса—Смейла.—Дифференц. уравнения, 1979, т. XV, № 5, с. 949—950.

8. Фельштын А. Л. О системах Морса—Смейла на трехмерной сфере.—Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр., 1979, № 7, с. 45—49.

9. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии.—М., 1977.—487 с.

10. Фельштын А. Л. О системах Морса—Смейла.—V Всесоюзн. конф. по качествен. теории дифферен. уравнений. Кишинев, 1979, с. 175.

11. Пилюгин С. Ю. Циклы в фазовых диаграммах систем Морса—Смейла.—Дифференц. уравнения, 1977. т. XIII, № 5, с. 874—882.

12. Милнор Дж. Теорема о h-кобордизме.—М., 1969.—115 с.

г. Ленинград

Поступила
18 XI 1980