Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 510.10+510.57+510.55

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПОПОЛНЕНИЯХ НУМЕРАЦИЙ

С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, А. Сорби

Аннотация. Представлены некоторые примеры и конструкции теории полных нумераций и пополнений нумераций, которые частично отвечают на некоторые вопросы, поставленные авторами ранее в их совместной статье.

Ключевые слова: нумерация, вычислимость, полная нумерация, полурешетка Роджерса, вычислимость с оракулом, арифметическая нумерация.

Посвящается памяти Сергея Львовича Соболева

Все обозначения и терминологию, используемые в настоящей статье, можно найти в [1]. В частности, через $U^{(n)}$ мы обозначаем универсальную $\varnothing^{(n)}$-частично вычислимую функцию, определяемую для всех $x, y \in \omega$ как $U^{(n)}(\langle x, y\rangle) = \varphi_x^{\varnothing^{(n)}}(y)$ (где $\varphi_x^{\varnothing^{(n)}}$ — x-я частичная функция, вычислимая с оракулом $\varnothing^{(n)}$), а для заданной нумерации $\alpha : \omega \to \mathscr{A}$ и объекта $a \in \mathscr{A}$ через $\alpha_a^{\mathbf{0}^{(n)}}$ мы обозначаем $\mathbf{0}^{(n)}$-пополнение нумерации α относительно a (a называется *специальным* объектом пополнения), т. е. нумерацию (являющуюся $\mathbf{0}^{(n)}$-полной относительно a в смысле [1, определение 2.5])

$$\alpha_a^{\mathbf{0}^{(n)}}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \alpha(U^{(n)}(x)), & \text{если } U^{(n)}(x)\downarrow, \\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $n = 0$, то мы опускаем верхний индекс (0). Таким образом, $U = U^{(0)}$ есть одноместная универсальная частично вычислимая функция. Более того, нумерация является $\mathbf{0}$-полной, если и только если она полна в классическом смысле А. И. Мальцева [2].

В настоящей статье мы предлагаем некоторые конструкции и заметки, относящиеся к теории полных нумераций и пополнений нумераций. Мы даем полный ответ на вопрос 1 и частичные ответы на вопросы 3 и 4 из [1].

Мы отсылаем читателя к [1] за обзором основных свойств оператора пополнения. Как замечено Ю. Л. Ершовым [3], $\alpha \leq \alpha_a^{\mathbf{0}}$ и $\alpha_a^{\mathbf{0}} \leq \beta$ для любой нумерации $\beta \geq \alpha$, являющейся полной относительно специального объекта a. В частности, $\alpha_a^{\mathbf{0}} \leq \alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда α полна относительно a (см. прямое доказательство этого факта, например, в [1, теорема 2.5(5)]).

Работа частично поддержана грантом INTAS–00–499 Computability in Hierarchies and Topological Spaces. Исследования первого автора частично поддержаны государственным грантом Казахстана на 2006 г. «Лучший преподаватель вуза», Исследования второго автора частично поддержаны РФФИ (код проекта 08–01–00336) и RFBR–06–01–04002–DFG.

1. Пополнения и минимальные нумерации

Следующий вопрос был поставлен в [1].

Вопрос [1, вопрос 1]. *Доказать или опровергнуть утверждение: никакая Σ^0_{n+2}-вычислимая минимальная нумерация любого нетривиального семейства $\mathscr{A}$ не может быть полной.*

По простым соображениям частные случаи минимальных нумераций не могут быть полными. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\alpha : \omega \to \mathscr{A}$ — произвольная нумерация, и пусть для некоторого $a \in \mathscr{A}$ множество $\alpha^{-1}(a)$ не является продуктивным. Тогда $\alpha < \alpha^{\mathbf{0}}_a$.*

Доказательство. Если $\alpha^{\mathbf{0}}_a \leq \alpha$, то существует вычислимая функция f, для которой $\alpha^{\mathbf{0}}_a = \alpha \circ f$. Тогда $\left(\alpha^{\mathbf{0}}_a\right)^{-1}(a) \leq_m \alpha^{-1}(a)$, при этом m-сводящей функцией является f. Поскольку $\alpha^{\mathbf{0}}_a$ полна относительно a, то $\left(\alpha^{\mathbf{0}}_a\right)^{-1}(a)$ продуктивно по классическому результату Мальцева [2]. Отсюда получаем, что $\alpha^{-1}(a)$ является продуктивным. $\square$

Следствие 1. *Если $\alpha^{-1}(a)$ не является продуктивным множеством, то α не полна относительно a.*

Доказательство очевидно, поскольку если α полна относительно a, то $\alpha^{\mathbf{0}}_a \leq \alpha$. $\square$

Предыдущий результат применим ко всем минимальным нумерациям и всем объектам, индексные множества которых не являются продуктивными. Сюда относится и случай, когда индексное множество любого объекта семейства является вычислимо перечислимым. В частности, ни одна позитивная нумерация нетривиального семейства не может быть полной относительно любого из объектов. С другой стороны, хотя каждая позитивная нумерация минимальна, обратное неверно. Таким образом, вышеприведенные соображения не дают полного ответа на вопрос 1 из [1]. Полный ответ на этот вопрос дается в следующей теореме. Заметим, что ограничение на вычислимость нумерации в вопросе 1 из [1] на самом деле несущественно.

Теорема 1. *Полная нумерация нетривиального семейства не может быть минимальной.*

Доказательство. Пусть нумерация $\alpha : \omega \to \mathscr{A}$ полна относительно специального объекта a, и пусть $\mathscr{A}$ содержит более одного объекта, т. е. $\mathscr{A}$ является нетривиальным семейством. Построим последовательность нумераций $\beta_i : \omega \to \mathscr{A}_i$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) $\mathscr{A}_i \subseteq \mathscr{A}$ для всех i;

2) $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathscr{A}_i$;

3) существует вычислимая функция двух переменных $f(i,x)$ такая, что $\beta_i \leq \alpha$ посредством функции $f_i(x) = f(i,x)$.

Для этого определим частично вычислимые функции g_i, полагая

$$g_i(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x, & \text{если } i = x,\\ \uparrow & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и обозначим через h_i доопределения функций g_i до всюду определенных вычислимых функций по модулю полной нумерации α, т. е.

$$\alpha(h_i(x)) = \begin{cases} \alpha(g_i(x)), & \text{если } g_i(x)\downarrow,\\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим $\beta_i : \omega \to \mathscr{A}$ как $\beta_i = \alpha \circ h_i$ и $\mathscr{A}_i$ как подсемейство семейства $\mathscr{A}$, занумерованное с помощью β_i. Поскольку последовательность функций $\{g_i\}$ равномерно вычислима, а процедура доопределения с помощью полной нумерации также является равномерной, то $f(i,x) \risingdotseq h_i(x)$ — всюду определенная вычислимая функция. Следовательно, требования (1)–(3) удовлетворены.

Положим

$$\beta(\langle i,x\rangle) \risingdotseq \beta_i(x)$$

для всех i,x. Тогда β является нумерацией семейства $\mathscr{A}$ и

$$\beta(\langle i,x\rangle) = \alpha(f(i,x)).$$

Таким образом, $\beta \leq \alpha$. С другой стороны, β разлагается в нетривиальную прямую сумму нумераций (поскольку $\mathscr{A}$ является нетривиальным семейством), а α не разложима в такие суммы (согласно классическому результату Ю. Л. Ершова [4] никакая предполная нумерация не разлагается в нетривиальную сумму нумераций подсемейств нумеруемого семейства).

Отсюда $\beta < \alpha$, следовательно, α не является минимальной нумерацией $\mathscr{A}$, что и требовалось доказать. $\square$

2. Промежуточные нумерации между α и $\alpha_a^{\mathbf{0}}$

Теперь обратим внимание на вопросы 3, 4 из [1]).

Вопрос [1, вопрос 3]. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Com}^0_{n+2}(\mathscr{A})$ является произвольной нумерацией нетривиального семейства $\mathscr{A}$, и предположим, что α не полна относительно $A \in \mathscr{A}$. Существует ли нумерация β такая, что $\alpha < \beta < \alpha_A^{\mathbf{0}}$?*

Вопрос [1, вопрос 4]. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Com}^0_{n+2}(\mathscr{A})$ является произвольной нумерацией нетривиального семейства $\mathscr{A}$, и предположим, что α не полна относительно $A \in \mathscr{A}$. Существует ли нумерация β, не разложимая в нетривиальную сумму нумераций и такая, что $\alpha < \beta < \alpha_A^{\mathbf{0}}$?*

Легко привести примеры семейств и их нумераций, разложимых в нетривиальные прямые суммы и отвечающих на вопрос 3 из [1].

Лемма 2. *Пусть семейство $\mathscr{A}_0$ является Σ^0_{n+2}-вычислимым и $B \notin \mathscr{A}_0$ — некоторое множество класса Σ^0_{n+2}, а $\mathscr{A} \risingdotseq \mathscr{A}_0 \cup \{B\}$. Тогда для любого выбора $A \neq B$ в качестве специального объекта в $\mathscr{A}$ существуют нумерации $\alpha,\beta \in \mathrm{Com}^0_{n+2}(\mathscr{A})$ такие, что $\alpha < \beta < \alpha_a^{\mathbf{0}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}, A, B$ выбраны, как в утверждении леммы. Пусть $\gamma \in \mathrm{Com}^0_{n+2}(\mathscr{A}_0)$ — какая-нибудь нумерация, не являющаяся полной относительно A, а δ — нумерация тривиального семейства $\{B\}$. Определим $\alpha \risingdotseq \gamma \oplus \delta$, $\beta \risingdotseq \gamma_A^{\mathbf{0}} \oplus \delta$. Очевидно, α,β являются Σ^0_{n+2}-вычислимыми нумерациями семейства $\mathscr{A}$. Покажем теперь, что нумерации α и β удовлетворяют неравенствам $\alpha < \beta < \alpha_a^{\mathbf{0}}$.

Поскольку γ не полна относительно A, то $\gamma < \gamma_A^{\mathbf{0}}$ по свойствам оператора пополнения [1]. Отсюда получаем $\alpha < \beta$. Далее, несложно заметить, что $\beta \leqslant \alpha_A^{\mathbf{0}}$. Предположим теперь, что $\beta \equiv \alpha_A^{\mathbf{0}}$. Тогда полная нумерация $\alpha_A^{\mathbf{0}}$ разлагается в прямую сумму несравнимых нумераций $\gamma_A^{\mathbf{0}}$ и δ подсемейств семейства $\mathscr{A}$, что противоречит уже упоминавшемуся ранее результату Ершова о неразложимости предполных нумераций в прямую сумму [4]. $\square$

Что касается вопроса 4 из [1], мы приведем эффектный пример Σ^0_1-вычислимой нумерации α с $\varnothing$ в качестве особого объекта, отвечающей на вопрос, т. е. такой, что интервал $\big(\deg(\alpha), \deg\big(\alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}\big)\big)$ содержит неразложимые элементы (равно как и разложимые).

Положим $\mathscr{A} \rightleftharpoons \{\varnothing, \{0\}\}$ и

$$\alpha(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x = 0, \\ \{0\}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и выберем $\varnothing$ в качестве специального объекта. Тогда $\alpha < \alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}$.

Лемма 3. *$\beta \le \alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}$ для любой нумерации $\beta \in \mathrm{Com}^0_1(\mathscr{A})$.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \mathrm{Com}^0_1(\mathscr{A})$. Тогда $\beta^{-1}(\{0\})$ является вычислимо перечислимым множеством. Положим

$$\phi(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \beta^{-1}(\{0\}), \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция ϕ является частично вычислимой, и тогда в силу полноты нумерации $\alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}$ существует всюду определенная вычислимая функция f, для которой

$$\alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}(f(x)) = \begin{cases} \alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}(\phi(x)), & \text{если } \phi(x)\downarrow, \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы утверждаем, что $\beta = \alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing} \circ f$. Действительно, если $\beta(x) = \varnothing$, то $\phi(x)\uparrow$ и поэтому $\alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}(f(x)) = \varnothing$; с другой стороны, если $\beta(x) = \{0\}$, то $\alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}(f(x)) = \alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}(\phi(x)) = \{0\}$, поскольку $\phi(x)\downarrow$ и $\phi(x) > 0$. $\square$

Обозначим через $\mathscr{E}_m$ верхнюю полурешетку **m**-степеней вычислимо перечислимых множеств (за исключением $\varnothing$ и ω).

Следствие 2. *Если $\mathscr{A}$ и α выбраны, как выше, то*

$$\mathscr{R}^0_1(\mathscr{A}) \simeq \big[\deg(\alpha), \deg\big(\alpha^{\mathbf{0}}_{\varnothing}\big)\big] \simeq \mathscr{E}_m.$$

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей леммы и хорошо известного факта (см. [3]) о том, что отображение, ставящее в соответствие каждому вычислимо перечислимому множеству $B \neq \varnothing, \omega$ нумерацию α_B семейства $\mathscr{A}$,

$$\alpha_B(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x \notin B, \\ \{0\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

порождает изоморфизм верхних полурешеток $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{R}^0_1(\mathscr{A})$. $\square$

Относительно вопросов 3 и 4 из [1] можно теперь прийти к следующему заключению.

Следствие 3. *Для любого n существуют Σ^0_{n+1}-вычислимое семейство $\mathscr{A}$, специальный объект $a \in \mathscr{A}$ и Σ^0_{n+1}-вычислимая нумерация α семейства $\mathscr{A}$ такие, что сегмент степеней $\big[\deg(\alpha), \deg\big(\alpha^{\mathbf{0}}_{a}\big)\big]$ полурешетки Роджерса $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{A})$ изоморфен $\mathscr{E}_m$. В частности, поскольку каждая конечная дистрибутивная решетка изоморфна некоторому начальному сегменту полурешетки $\mathscr{E}_m$ (см. [5]), то в $\big(\deg(\alpha), \deg\big(\alpha^{\mathbf{0}}_{a}\big)\big)$ можно найти как разложимые, так и неразложимые элементы.*

Доказательство. Выберем в качестве $\mathscr{A}$ и α семейство и нумерацию из следствия 2 и положим $a = \varnothing$. Тогда доказываемое утверждение сразу следует из того, что для любого n сегмент $\big[\deg(\alpha), \deg\big(\alpha^{\mathbf{0}}_{a}\big)\big]$ образует идеал полурешетки Роджерса $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{A})$. $\square$

3. Пополнения и универсальные нумерации

Согласно теореме 2.11(2) из [1] для любого $n \geq 0$ если Σ^0_{n+1}-вычислимое семейство содержит наименьшее по включению множество $\perp$, то всякая универсальная нумерация α этого семейства является полной относительно $\perp$ (поскольку $\alpha^{\mathbf{0}}_{\perp}$ является Σ^0_{n+1}-вычислимой и $\alpha \equiv \alpha^{\mathbf{0}}_{\perp}$). Естественно встает вопрос о возможности построения примеров Σ^0_{n+1}-вычислимых семейств, содержащих наименьшее множество $\perp$, и их нумераций α, полных относительно $\perp$, но являющихся универсальными. Положительный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Для каждого n существует Σ^0_{n+1}-вычислимое семейство $\mathscr{A}$ с наименьшим по включению множеством A, имеющее Σ^0_{n+1}-вычислимую нумерацию α такую, что*

1) *α полна относительно A;*

2) *α не является универсальной в классе нумераций $\mathrm{Com}^0_{n+1}(\mathscr{A})$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — это семейство всех конечных множеств. По релятивизованным версиям теоремы Лахлана о необходимых условиях существования универсальных нумераций [6] получаем, что $\mathscr{F}$ не имеет универсальных нумераций ни в одном из классов нумераций $\mathrm{Com}^0_{m+1}(\mathscr{F})$ при $m \geq 0$. Пусть β является Σ^0_1-вычислимой Фридберговой нумерацией семейства $\mathscr{F}$ (например, можно использовать нумерацию конечных множеств по их каноническим номерам). Тогда в качестве нумерации α можно взять пополнение $\beta^{\mathbf{0}}_{\varnothing}$. По теореме 2.11(2) из [1] для любого n имеем $\alpha \in \mathrm{Com}^0_{n+1}(\mathscr{A})$. $\square$

Замечание 1. Если в предыдущем доказательстве взять $\alpha = \beta^{\mathbf{0}'}_{\varnothing}$, то по теореме 2.11(2) из [1] получим $\alpha \in \mathrm{Com}^0_{n+2}(\mathscr{A})$ при всех n, но при этом по следствию 2.10.5 из [1] нумерация α будет полной относительно всех элементов семейства $\mathscr{F}$.

Ввиду следствия 2.11(1) из [1] всякая Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация семейства, являющаяся универсальной, будет полна относительно всех объектов семейства. Следующая теорема показывает, что обратное утверждение не имеет места.

Теорема 3. *Для любого n существует Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство $\mathscr{A}$, имеющее Σ^0_{n+2}-вычислимые нумерации α и β такие, что*

1) *α является универсальной в классе $\mathrm{Com}^0_{n+2}(\mathscr{A})$;*

2) *$\beta < \alpha$ и β полна относительно каждого элемента семейства $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ состоит из всех начальных сегментов ω (включая $\varnothing$ и ω). Для каждого m семейство $\mathscr{A}$ является n-подмножеством семейства всех Σ^0_{m+1}-множеств, т. е. существует вычислимая функция g такая, что $\{W^{\varnothing^{(m)}}_{g(x)}\}_{x\in\omega}$ дает Σ^0_{m+1}-вычислимую нумерацию α семейства $\mathscr{A}$, причем $W^{\varnothing^{(m)}}_{g(x)} = W^{\varnothing^{(m)}}_{x}$, если $W^{\varnothing^{(m)}}_{x}$ является начальным сегментом. Следовательно, для каждого m семейство $\mathscr{A}$ имеет универсальную нумерацию в $\mathrm{Com}^0_{m+1}(\mathscr{A})$. Заметим, что $\alpha^{-1}(\omega) = \{x \mid W^{\varnothing^{(m)}}_{x} = \omega\}$ и, следовательно, множество номеров ω в нумерации α не является $\mathbf{0}'$-вычислимым.

Пусть теперь $\gamma \in \mathrm{Com}^0_{m+1}(\mathscr{A})$ — какая-нибудь Фридбергова нумерация, например, можно взять

$$\gamma(x) = \begin{cases} \omega, & \text{если } x = 0, \\ \{y : y < x - 1\}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Пусть $\beta = \gamma_{\varnothing}^{\mathbf{0}'}$. Тогда, как в замечании 1, $\beta \in \mathrm{Com}_{n+2}^{0}(\mathscr{A})$ для любого n и β полна относительно каждого элемента из $\mathscr{A}$. Кроме того, $\beta < \alpha$, поскольку индексное множество каждого непустого множества из $\mathscr{A}$ в нумерации β является $\mathbf{0}'$-вычислимым, и, таким образом, сведение $\alpha \leq \beta$ невозможно, иначе получили бы, что индексное множество ω в нумерации α является $\mathbf{0}'$-вычислимым. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Badaev S., Goncharov S., Sorbi A.* Completeness and universality of arithmetical numberings // Computability and Models. New York: Kluwer Plenum Publ., 2003. P. 11–44.
2. *Мальцев А. И.* Полно нумерованные множества // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 2. С. 4–29.
3. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
4. *Ершов Ю. Л.* О неотделимых парах // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 6. С. 661–666.
5. *Lachlan A. H.* Recursively enumerable many-one degrees // Алгебра и логика. 1972. V. 11, N 3. P. 326–358.
6. *Lachlan A. H.* Standard classes of recursively enumerable sets // Zeit. Mat. Log. Grund. Math. 1964. V. 10, N 1. P. 23–42.

Статья поступила 18 июня 2008 г.

Бадаев Серикжан Агыбаевич
Казахский национальный университет, ул. Масанчи, 39/47, Алматы 050012, Казахстан
badaev@kazsu.kz

Гончаров Сергей Савостьянович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s.s.goncharov@math.nsc.ru

Andrea Sorbi
Dipartimento di Scienze Matematiche ed Informatiche “Roberto Magari”,
Pian del Mantellini 44, 53100 Siena, Italy
sorbi@unisi.it