

УДК 518:517.9:53

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА НА ОСНОВЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В. Б. ГЛАСКО, Н. И. КУЛИК, А. Н. ТИХОНОВ

(Москва)

Предлагается алгоритм решения указанной задачи, применимый к достаточно широкому классу плоских структур, включающему случай непрерывного изменения проводимости.

1. Изучение вариаций естественного магнитного поля Земли широко используется в настоящее время для глубинного зондирования земной коры и мантии. Начало этому методу было положено в [1-3], где содержится математическая постановка рассматриваемой задачи и дано теоретическое обоснование метода магнитно-теллурического зондирования. Показано, в частности, что электромагнитный импеданс $I = E_x / H_y$ (где H_y — восточная компонента магнитного поля, а E_x — северная компонента электрического поля) в каждой точке земной поверхности и на заданной частоте колебаний есть величина, однозначно определяемая параметрами среды.

На этой основе в [3, 4] разработан метод палеток для определения геоэлектрического разреза (т. е. $\gamma = \gamma(z)$, где γ — удельная проводимость среды) для плоской слоистой модели Земли, удобный для реализации на быстродействующих вычислительных машинах. Метод палеток основан на прямом расчете импеданса для семейства моделей структуры и подбора подходящей модели путем последующего сравнения наблюдаемого импеданса с палеткой.

Обратная задача об определении параметров структуры по заданному импедансу является некорректной, так как большим изменениям в геоэлектрическом разрезе отвечают малые изменения входного импеданса. Для ее решения необходимо использовать те или иные методы, основанные на принципе регуляризации [5], т. е. на принципе отбора приближения к искомой структуре из множества формальных решений задачи при некоторой погрешности входных данных.

Возможны два пути для получения регуляризованного приближения. Один из них состоит в сужении класса моделей, в котором ищется приближение, например рассматриваются структуры с небольшим и заранее известным числом слоев. Второй путь состоит в выделении типичных особенностей структуры, как-то: разрывов электрических характеристик среды, гладкости изменения параметров между разрывами.

К первому из этих направлений относится работа [6]. Однако при большом количестве слоев соответствующий метод будет давать неустойчивый результат.

Целью настоящей работы является рассмотрение второго направления. Возможность его реализации определяется тем, что развитые в [5, 7, 8] регуляризирующие алгоритмы позволяют формализовать как предположение о минимальном уклонении разрывов от некоторых априорных, так и дополнительное условие о наибольшей гладкости параметров между разрывами. В работе предлагается метод устойчивого решения задачи определения геоэлектрического разреза для структуры общего типа и на конкретных моделях показывается его эффективность.

Единственность решения рассматриваемой задачи доказана в [9].

Заметим, что рассматриваемый метод, как и развитые для электромагнитного зондирования алгоритмы, связанные с подбором, переносятся на задачи сейсмического зондирования земной коры и мантии [10, 11]. Обратимся к постановке задачи.

2. Амплитуда электрического поля $E = E_x(z)$ в плоской слоистой проводящей среде с непрерывным изменением проводимости в пределах каждого слоя удовлетворяет условиям следующей задачи:

$$E'' + i\mu_0\bar{\omega}\gamma(z)E = 0, \quad z_{i-1} < z < z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_0 = 0,$$

$$E(0) = E_0, \quad [E]_{z=z_i} = [E']_{z=z_i} = 0, \quad E|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

При этом $H_y(z) = (1/i\mu_0\bar{\omega})E'(z)$. Здесь, как и в [4, 6], мы пренебрегаем токами смещения. Кроме того будем в дальнейшем предполагать проводимость подстилающего полупространства постоянной $\gamma(z) = \gamma_{n+1} = \text{const}$ при $z > z_n$.

Для дальнейшего введем безразмерные переменные $E = E_0 u(\zeta)$, $\gamma = \gamma_0 \sigma(\zeta)$, $\bar{\omega} = \omega_0 \bar{\omega}$, $\mu_0 = \text{const} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м. Тогда в силу соотношения подобия $\omega_0 \gamma_0 z_0^2 = 1$ получаем задачу

$$(1) \quad u'' + i\omega\sigma(\zeta)u = 0, \quad \zeta_{i-1} < \zeta < \zeta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \zeta_0 = 0,$$

$$u(0) = 1, \quad [u]_{\zeta_i} = [u']_{\zeta_i} = 0, \quad u|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

однозначно определяющую $u(\zeta)$ при заданном разрезе.

Заметим, что в силу предположения $\sigma(\zeta) = \text{const}$ при $\zeta > \zeta_n$ последнее из условий (1) эквивалентно условию $u'(\zeta_n) = -(1-i)\sqrt{(\omega\sigma_{n+1}/2)} \times u(\zeta_n)$, так что задача (1) может рассматриваться на ограниченном отрезке $[0, \zeta_n]$.

В качестве входной функции соответствующей обратной задачи мы будем рассматривать величину $\bar{A}(\omega) \equiv |u'(0, \omega)|$, равную с точностью до множителя адмитансу $Y \equiv I^{-1} = (1/i\mu_0\bar{\omega})E'(0)/E(0)$.

Введем переменную $\hat{\sigma}$, отвечающую произвольному разрезу

$$\hat{\sigma} \equiv \{\zeta_i, i = 1, 2, \dots, n; \sigma_i(\zeta), \zeta_{i-1} \leq \zeta < \zeta_i; \sigma_{n+1}, \zeta \geq \zeta_n\}.$$

Тогда $|u'(0, \omega)| \equiv A[\omega, \hat{\sigma}]$ — нелинейный оператор от $\hat{\sigma}$, зависящий от параметра ω , который мы будем рассматривать на сетке значений $\{\omega_s\}$, $s = 1, 2, \dots, M$, отвечающей экспериментальному набору частот.

Задача об определении геоэлектрического разреза $\hat{\sigma}$ при точном задании модуля входного адмитанса могла бы формулироваться, как задача о минимизации функционала

$$f(\hat{\sigma}) \equiv \sum_{s=1}^M \{A[\omega_s, \hat{\sigma}] - \bar{A}(\omega_s)\}^2 \equiv \|A[\hat{\sigma}] - \bar{A}\|_A^2.$$

Однако последняя задача является неустойчивой в смысле [8] относительно малых возмущений входного адмитанса, таких, что $\|\bar{A} - \tilde{A}\|_A^2 \leq \delta^2$, где \bar{A} и δ — заданные величины. Соответственно, среди «приближений» $\tilde{\sigma}$, получаемых каким-либо алгоритмом, минимизирующим $\tilde{f}(\hat{\sigma}) \equiv \|A[\hat{\sigma}] - \bar{A}\|_A^2$, и отвечающих условию

$$(2) \quad \tilde{f}(\hat{\sigma}) \leq \delta^2,$$

могут быть сколь угодно далекие от точного $\hat{\sigma}$.

Следуя общему принципу регуляризации, будем рассматривать задачу о минимуме регуляризирующего функционала $\Omega[\hat{\sigma}]$ при дополнительном условии (2). В качестве $\Omega[\hat{\sigma}]$ выберем следующий квадрат нормы в составном пространстве $\hat{\Sigma}$, $\hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}$:

$$\Omega[\hat{\sigma}] \equiv \sum_{s=1}^n p_s (\zeta_s - \zeta_s^0)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \{q_k \sigma_k'^2(\zeta) + r_k \sigma_k^2(\zeta)\} d\zeta + r_{n+1} (\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^0)^2,$$

где $p_s, \zeta_s^0, \sigma_{n+1}^0$ — заданные числа, а $q_k = q_k(\zeta), r_k = r_k(\zeta)$ — заданные весовые функции *).

Задача о минимуме $\Omega[\hat{\sigma}]$ отвечает требованию наименьшего уклонения разрезов $\{\zeta_s\}$ и проводимости подстилающего полупространства от заданных (например, некоторых априорных) значений $\{\zeta_s^0, \sigma_{n+1}^0\}$ и требованию наибольшей гладкости $\{\sigma_k(\zeta)\}$ на участках непрерывности.

Заметим, что рассматриваемая задача условной минимизации $\Omega[\hat{\sigma}]$ эквивалентна задаче о минимуме сглаживающего параметрического функционала

$$(3) \quad M^\alpha[\hat{\sigma}] \equiv \tilde{f}[\hat{\sigma}] + \alpha \Omega[\hat{\sigma}],$$

где параметр α выбирается либо по условию, следующему из (5), $\min |\tilde{f}(\hat{\sigma}) - \delta^2|$, либо по условию внутренней сходимости [12].

3. Задача о минимизации (3) при любом фиксированном $\alpha > 0$, как показано в [8], является устойчивой, так что для ее решения можно ис-

*) В приводимых ниже расчетах $p_s \equiv q_k = r_{n+1} = 1, r_k(\zeta) = 0$.

пользовать любой минимизирующий алгоритм. Тогда из последовательности экстремалей $\hat{\sigma}^{\alpha_p}$, $\alpha_p < \alpha_{p-1}$, $p = 1, 2, \dots$, можно выбрать $\hat{\sigma}^{\hat{\alpha}}$ по одному из указанных выше критериев.

В настоящей работе мы пользовались специальным алгоритмом поиска $\hat{\sigma}^{\hat{\alpha}}$, который является простейшей модификацией алгоритма, предложенного в [12]. В этом алгоритме последовательность строится из экстремалей квадратичных функционалов

$$(4) \quad M^{\alpha_p}[\hat{\sigma}] \equiv \tilde{f}_p[\hat{\sigma}] + \alpha_p \Omega[\hat{\sigma}] \equiv \|A[\hat{\sigma}_p] + A_{\hat{\sigma}}[\hat{\sigma}_p][\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_p] - \tilde{A}\|_A^2 + \alpha_p \Omega[\hat{\sigma}],$$

где $A_{\hat{\sigma}}$ — первая производная по Фреше оператора A , так что (4) является квадратичным функционалом. Задавшись последовательностью α_p , где $\alpha_p = \mu \alpha_{p-1}$, $p = 1, 2, \dots$, $\mu < 1$, можно выбрать $\alpha_{\hat{p}} \sim \hat{\alpha}$ как член с наименьшим номером \hat{p} , для которого выполнено условие (2); в модельных расчетах, когда погрешность в \tilde{A} вызвана исключительно неизбежными разностными аппроксимациями и не оценивается заранее, мы пользовались критерием $\min \|\hat{\sigma}^{\alpha_p} - \sigma^{\alpha_{p-1}}\|_{\hat{\sigma}}$ (см. [12]).

Линеаризованное представление оператора $A[\hat{\sigma}] \equiv |u'(0, \omega)|$ получается следующим образом. Рассмотрим вариацию σ :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \{\delta_s \equiv \zeta_s - \zeta_{sp}; \Delta_s \equiv \sigma_s(\zeta) - \sigma_{sp}(\zeta), \zeta \in G_s((\zeta_{s-1}, \zeta_s) \cap \\ &\cap (\zeta_{s-1, p}, \zeta_{sp}))\}; \Delta_s \equiv \sigma_{\lambda_s}(\zeta) - \sigma_{\mu_s}(\zeta), \zeta \in (\zeta_s, \zeta_{sp}); \Delta_{n+1} = \\ &= \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1, p}, \zeta \geq \max(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+1, p})\}, \\ s &= 1, 2, \dots, n; \lambda_s \equiv s + 1/2[1 + \text{sign}(\zeta_s - \tilde{\zeta}_s)], \\ \mu_s &\equiv s + 1/2[1 - \text{sign}(\zeta_s - \tilde{\zeta}_s)]. \end{aligned}$$

Соответствующая вариация u : $w \equiv u(\zeta) - u_p(\zeta)$ непрерывна вместе с производной в точках ζ_s, ζ_{sp} , удовлетворяет условию $w(0) = 0$ на дневной поверхности и в линейном приближении — следующим условиям:

$$\begin{aligned} w'' + i\omega \hat{\sigma}(\zeta)w &= -\tilde{f}(\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta^*, \quad \zeta^* = \max(\zeta_n, \zeta_{np}), \\ w'(\zeta^*) + (1-i)\gamma(\omega \sigma_{n+1}/2)w(\zeta^*) &= -\tilde{f}(\zeta^*). \end{aligned}$$

При этом $\tilde{f}(\zeta^*) \equiv -(1-i)\gamma(\omega/8\sigma_{n+1})\Delta_{n+1}u_p(\zeta^*)$; $\tilde{f}(\zeta) = i\omega\Delta_s u_p(\zeta)$ при $\zeta \in G_s$, $s = 1, 2, \dots, n$; $\tilde{f}(\zeta) = i\omega(\sigma_{sp} - \sigma_{s+1, p})\text{sign}(\zeta_s - \zeta_{sp}) + i\omega\Delta_{\lambda_s} u_p(\zeta)$ при $\zeta \in (\zeta_s, \zeta_{sp})$; $\hat{\sigma}(\zeta) = \sigma_{sp}(\zeta)$ при $\zeta \in G_s$; $\hat{\sigma}(\zeta) = \sigma_{\lambda_s p}(\zeta)$ при $\zeta \in (\zeta_s, \zeta_{sp})$. Очевидно, $w(\zeta)$ может быть представлена через функцию Грина однородной краевой задачи, отвечающей (1), которую строим следующим образом:

$$g(\zeta, \xi) = \begin{cases} v_p(\zeta)u_p(\xi), & 0 < \zeta < \xi, & u_p(0) = 1, \quad u_p(\infty) = 0; \\ v_p(\xi)u_p(\zeta), & \xi < \zeta < +\infty, & v_p(0) = 0, \quad v_p'(0) = 1. \end{cases}$$

При этом $u_p(\zeta)$ — решение задачи (1) и $g_{\zeta'}(0, \xi) \equiv u_p(\xi)$. Элементарная

выкладка приводит к следующему выражению для $u'(0, \omega)$ в линейном относительно вариаций $\hat{\sigma}$ приближении:

$$\begin{aligned} u'(0) &= u_p'(0) - i\omega \sum_{s=1}^n u_p^2(\zeta_{sp}) C_s \delta_s + i\omega \sum_{s=0}^{n-1} \int_{\zeta_{sp}}^{\zeta_{s+1,p}} u^2(\xi) \Delta_{s+1}(\xi) d\xi - \\ &- (1-i) \left[\frac{\omega}{8\sigma_{n+1,p}} \right]^{1/2} \Delta_{n+1} u_p^2(\zeta_{np}) \equiv \\ &\equiv u_p'(0) - i\omega \sum_{s=1}^n u_p^2(\zeta_{sp}) C_s \delta_s + i\omega \sum_{s=0}^n \int_{\zeta_{sp}}^{\zeta_{s+1,p}} u^2(\xi) \Delta_{s+1}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\zeta_{n+1} = \infty,$$

где $C_s \equiv \sigma_{sp}(\zeta_{sp}) - \sigma_{s+1,p}(\zeta_{sp})$ — скачок проводимости в точке разрыва (для непрерывной среды $C_s = 0$ и $\Delta_s \equiv \Delta = \sigma(\zeta) - \sigma_p(\zeta)$).

Для дальнейшего удобно ввести интеграл Стильтьеса следующим образом. Положим $\hat{\mu}(\zeta) \equiv \{m_s, (\zeta = \zeta_s); \mu_s(\zeta), (\zeta \in (\zeta_{s-1}, \zeta_s)), s = 1, 2, \dots, n; \mu_{n+1}(\zeta) = \mu_{n+1} = \text{const}\}$; тогда для любой $\varphi(\zeta)$, непрерывной на $(0, \infty)$ и имеющей ограниченную первообразную $\Phi(\zeta)$, имеем

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\zeta) \hat{\mu}(\zeta) d\zeta \equiv \sum_{s=1}^n m_s \varphi(\zeta_s) + \sum_{s=0}^{n-1} \int_{\zeta_s}^{\zeta_{s+1}} \varphi(\zeta) \mu_s(\zeta) d\zeta - \Phi(\zeta_n) \mu_{n+1}.$$

Теперь нетрудно убедиться, что адмитанс $A[\hat{\sigma}] \equiv |u'(0, \omega)|$ в линейном приближении относительно вариаций $\hat{\sigma}$ имеет вид

$$(5) \quad A[\hat{\sigma}_p] + A_{\hat{\sigma}}[\hat{\sigma}_p](\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_p) \equiv A[\hat{\sigma}_p] + \int_0^{+\infty} K_p(\omega, \zeta) \hat{\rho}(\zeta) \hat{\Delta}(\zeta) d\zeta.$$

Здесь

$$\hat{\rho}(\zeta) = \{C_s, (\zeta = \zeta_s); 1(\zeta \neq \zeta_s)\},$$

$$\hat{\Delta}(\zeta) = \{\delta_s, (\zeta = \zeta_s); \Delta_s(\zeta), (\zeta \in (\zeta_{s-1}, \zeta_s)); \Delta_{n+1} = \text{const}, (\zeta \geq \zeta_n)\},$$

$$(6) \quad K_p(\omega, \zeta) = \frac{\omega}{A[\hat{\sigma}_p]} \{U_{1p}(\omega, \zeta) u_{2p}'(0, \omega) - U_{2p}(\omega, \zeta) u_{1p}'(0, \omega)\},$$

где $u_{1p}'(0, \omega) + iu_{2p}'(0, \omega) = u_p'(0, \omega)$, $U_{1p}(\omega, \zeta) + iU_{2p}(\omega, \zeta) \equiv u_p^2(\zeta)$; $K_p(\omega, \zeta)$ непрерывна по ζ , причем

$$\begin{aligned} (7) \quad & \int_{\zeta_{np}}^{+\infty} K_p(\omega, \zeta) \hat{\rho} \hat{\Delta} d\zeta = \Delta_{n+1} \left[\frac{\omega}{8\sigma_{n+1,p}} \right]^{1/2} \times \\ & \times \frac{u_{2p}'(0, \omega) [U_{1p}(\zeta_n) - U_{2p}(\zeta_n)] - u_{1p}'(0, \omega) [U_{1p}(\zeta_n) + U_{2p}(\zeta_n)]}{A[\hat{\sigma}_p]} \equiv \\ & \equiv \Delta_{n+1} K_p(\omega). \end{aligned}$$

Функционал (4), (5), будучи квадратичным, легко минимизируется при любом фиксированном α_p (соответственно, σ_p) через оператор Эйлера; при

этом последний с помощью разностной аппроксимации приводится к системе линейных алгебраических уравнений, решаемой по стандартным программам. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

4. Оператор Эйлера получается обычными методами в виде

$$(8) \quad \int_0^{+\infty} \kappa_p^*(\zeta, \xi) \hat{\rho}(\xi) \hat{\sigma}(\xi) d\xi + \alpha_p L^* [\hat{\sigma}(\zeta)]_i' = b_p^*(\zeta),$$

$$\sigma_s'(\zeta_{s-1}) = \sigma_s'(\zeta_s) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь

$$b_p^*(\zeta) \equiv \sum_{m=1}^M K_p^*(\omega_m, \zeta) a(\omega_m),$$

причем

$$a(\omega_m) \equiv \tilde{A}(\omega_m) - A[\hat{\sigma}_p] + \int_0^{+\infty} K_p(\omega_m, \xi) \hat{\rho}(\xi) \hat{\sigma}_p(\xi) d\xi;$$

$$(9) \quad K_p^*(\omega, \zeta) \equiv \begin{cases} K_p(\omega, \zeta), & \zeta \in (\zeta_{s-1}, \zeta_s), \\ C_s K_p(\omega, \zeta_s), & \zeta = \zeta_s, \\ K_p(\omega), & \zeta > \zeta_n; \end{cases}$$

$$(10) \quad \kappa_p^*(\zeta, \xi) \equiv \begin{cases} \sum_{m=1}^M K_p(\omega_m, \zeta) K_p(\omega_m, \xi) \equiv \kappa_p(\zeta, \xi), & \zeta \in (\zeta_{s-1}, \zeta_s), \\ C_s \kappa_p(\zeta_s, \xi), & \zeta = \zeta_s, \\ \sum_{m=1}^M K_p(\omega_m) K_p(\omega_m, \xi), & \zeta > \zeta_n, \end{cases}$$

наконец, $L^*[\sigma]$ — оператор Эйлера для регуляризатора, равный

$$L^*[\hat{\sigma}] \equiv \begin{cases} -\frac{d}{d\zeta} \left(q_s \frac{d\sigma_s}{d\zeta} \right) + r_s \sigma_s(\zeta), & \zeta \in (\zeta_{s-1}, \zeta_s), \\ p_s(\zeta_s - \zeta_s^0), & \zeta = \zeta_s, \\ r_{n+1}(\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^0), & \zeta > \zeta_n. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\int_{\zeta_{n,p}}^{+\infty} \kappa_p^*(\zeta, \xi) \hat{\rho}(\xi) d\xi \equiv \sigma_{n+1} \kappa_p^{**}(\zeta),$$

где $\kappa_p^{**}(\zeta)$ легко получается из (7), (10) и зависит только от значений $\zeta \in [0, \zeta_n]$; соответственно, полупрямой $\zeta > \zeta_n$ отвечает одна числовая переменная (σ_{n+1}). Таким образом, система (8) оказывается замкнутой на ограниченном сегменте $0 \leq \zeta < \zeta_n$, где и проводится конечная аппроксимация входящих сюда операторов.

Введем сетку значений $\{\xi_j\}$ следующим образом. Каждому интервалу $(\zeta_{s-1,p}, \zeta_{s,p})$ при заданном p припишем шаг $h_s = (\zeta_{s,p} - \zeta_{s-1,p})/N_s$, где $\{N_s\}$ могут быть различны для разных интервалов, тогда

$$j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N = \sum_{s=1}^n N_s + n - 1,$$

$$\xi_j = \begin{cases} j h_1, & (j = 0, \dots, N_1); \quad \zeta_{1,p} + [j - (N_1 + 1)] h_2; & (j = \\ = N_1 + 1, \dots, N_1 + 1 + N_2); & \dots; \quad \zeta_{n-1,p} + [j - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-1} N_s + n - 1 \right) h_n], & \left(j = \sum_{s=1}^{n-1} N_s + n - 1, \dots, \sum_{s=1}^n N_s + n - 1 \right) \end{cases}.$$

На каждом из указанных интервалов аппроксимируем интегралы в (8) по формуле трапеций, а производные — по соответствующим сетке конечно-разностным формулам второго порядка [13]. В результате приходим к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений порядка $\bar{N} \equiv N + n + 1$ относительно неизвестных $\{x_\nu\} \equiv \{\sigma(\xi_j), \zeta_s, \sigma_{n+1}\}$:

$$\sum_{\nu=1}^{\bar{N}} a_{\mu\nu}(\alpha_p) x_\nu = b_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, N + n + 1.$$

Обратим внимание на вычисление величин $a_{\mu\nu}$ и b_μ . Эти величины, согласно (6) — (10), зависят от $C_{s,p}$, а также $u_p'(0, \omega)$ и значений $u_p^2(\xi_j)$. Величина $C_{s,p}$ определена p -м приближением $\hat{\sigma}_p$, т. е. $C_{s,p} = \sigma_{s,p}(\zeta_{s,p}) - \sigma_{s+1,p}(\zeta_{s,p})$; величины $u_p'(0, \omega)$ и $u_p^2(\zeta)$ определяются решением краевой задачи (1) при $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_p$ и каждом $\omega = \omega_m$.

Последняя задача легко решается обычным прогоночным алгоритмом:

$$(11) \quad v = \frac{u'}{u}; \quad v' + v^2 + i\omega\sigma(\xi) = 0, \quad \xi \in (\zeta_{s-1}, \zeta_s), \\ [v]_{\zeta=\zeta_s} = 0, \quad v(\zeta_n) = -(1-i)\sqrt{\omega\sigma_{n+1}/2};$$

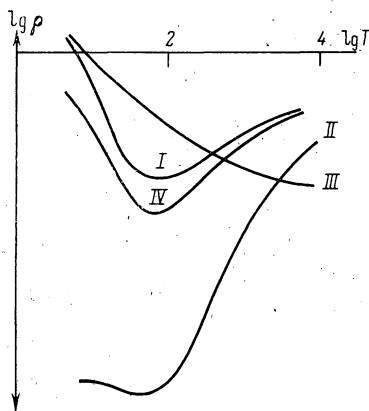
$$u^2(\xi) = \exp\left\{2 \int_0^\xi v(\xi) d\xi\right\}, \quad u'(0, \omega) = v(0, \omega).$$

Уравнение для v после введения сетки $\{\xi_j\}$ легко решается аналитически на каждом частичном интервале, причем $\{\xi_j\}$ остается непрерывной в фиктивных точках разрыва проводимости $\xi_j \neq \zeta_s$. Нетрудно убедиться, что вычисление интересующих нас величин сводится к расчету по рекуррентным формулам *)

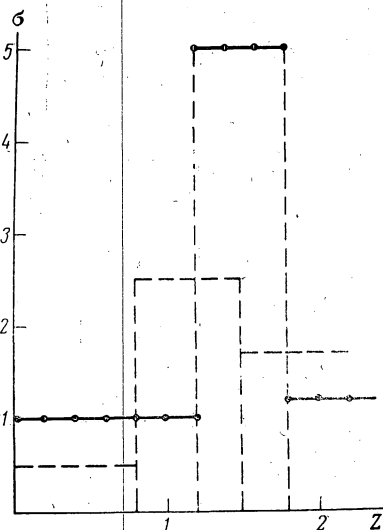
$$(12) \quad S_{j-1} = v_{j-1} \frac{S_j + t_j}{1 - S_j t_j}, \quad j = N, N-1, \dots, 1, \quad S_0 = v(0, \omega), \quad S_N = i v_n,$$

$$u^2(\zeta_j) = \prod_{k=1}^j \frac{1 + t_k^2}{(1 - S_k t_k)^2}, \quad j = 2, 3, \dots, N; \quad u^2(\xi_0) \equiv u^2(0) = 1,$$

*) Здесь они записаны в комплексных величинах.



Фиг. 1. I — модель 1; II — модель 2; III — модель 3; IV — модель 4



Фиг. 2. $\alpha = 10^{-5}$, $\delta = 10^{-3}$

где $t_j = \text{tg } \mu_j d_j$, $d_j = \xi_j - \xi_{j-1}$, $\mu_j = (1 + i)\sqrt{(\omega\sigma_j/2)}$, $\nu_{j-1} = \sqrt{(\sigma_j/\sigma_{j-1})}$, $j = N, \dots, 2$, $\nu_0 = \mu_1$.

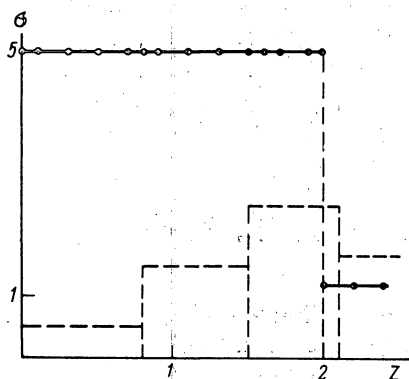
Заметим, что в проведенных расчетах в случае разрывных моделей $N_s \equiv 5 \div 10$.

5. На приводимых ниже графиках величины даны в безразмерных единицах. Для получения интересующих нас физических величин z [км], γ [ом·м⁻¹] нужно поступить следующим образом. Пусть наблюдения ведутся в суточном диапазоне периодов: $\omega_0 = 7.36 \cdot 10^{-5}$ сек⁻¹, тогда z [км] = $z_0 \zeta$, $\gamma = \gamma_0 \sigma$, где $z_0^2 \sigma_0 = \mu_0 \omega_0$. Входные данные представлены, как это принято, в билогарифмической шкале: $\lg \rho$, $\lg T$, где ρ — безразмерное кажущееся сопротивление структуры ($\rho = \omega/A^2$), T — безразмерный период.

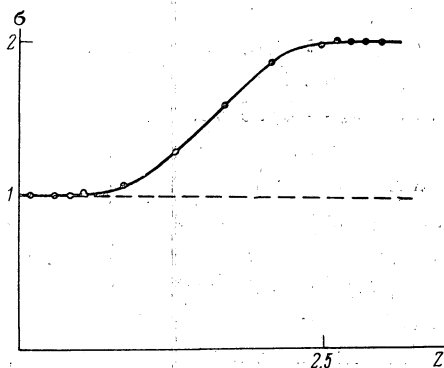
Рассматривались различные модели структуры. По каждой из таких моделей проводился прямой расчет адмитанса $A(\omega)$ и $\rho(\omega)$ по формулам (12)*. Входные данные для некоторых моделей представлены на фиг. 1. По этим данным с помощью изложенного алгоритма проводилось восстановление моделей по некоторому начальному приближению; в наших расчетах выбор начального приближения не связывался с какой-либо априорной информацией о структуре, и оно было достаточно далеким от искомой структуры. Некоторые из рассмотренных структур (сплошные линии), соответствующие начальные приближения (штриховые линии) и полученные результаты (точки) представлены на фиг. 2—5.

Простейшая модель 1 (фиг. 2) представляет собой структуру из двух слоев на полупространстве ($n = 2$). Начальное приближение (также $n = 2$) достаточно далеко от искомой структуры. Мы не предполагаем, однако, постоянства проводимостей между разрезами и, согласно общей схеме

* Это предполагает аппроксимацию непрерывных распределений $\sigma(\zeta)$ дискретными с достаточно большим числом слоев $N_s = 10$.



Фиг. 3

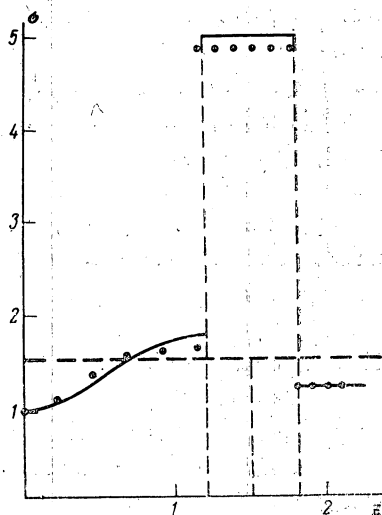


Фиг. 4

Фиг. 3. $\alpha = 10^{-9}$, $\delta = 0$

Фиг. 4. $\alpha = 10^{-6}$, $\delta = 0$

Фиг. 5. $\alpha = 10^{-9}$, $\delta = 10^{-3}$



Фиг. 5

(11), (12), разбиваем каждый слой на достаточно большое число частичных ($N_s = 10$, $s = 1, 2$), что означает варьирование сразу 23 параметров; при этом в связи с варьированием разрезов (ζ_1, ζ_2) автоматически варьируются и положения фиктивных разрезов, возникающих вследствие аппроксимации. Как показывает фиг. 2, искомая структура восстанавливается с большой точностью, и притом устойчиво относительно малых возмущений входных данных ($\delta = 10^{-2}$).

Заметим, что погрешность входных данных на заданной сетке $\{\omega_m\}$ имитировалась, как обычно, формулой

$$\bar{\rho}_m = \rho_m + \rho \eta_m \left[\sum_{m=1}^M \eta_m^2 \right]^{-1/2}, \quad \rho = \frac{1}{\mu_0 \omega} |\text{Im}|^2,$$

где η_m — случайная величина с равномерным распределением на $[-1, 1]$, так что δ — величина среднеквадратичного отклонения. Отметим также, что во всех последующих случаях число варьируемых параметров также велико, в соответствии с отсутствием априорного предположения о характере $\sigma(\zeta)$ между разрезами.

Модель 2 (фиг. 3) при выбранном нами начальном приближении ($n_0 = 3$) отвечает тому случаю интерпретации, когда число искомых слоев

заранее не известно. Соответствующая вариационная задача заведомо неустойчива [8, 14]; тем не менее (фиг. 3) найденное нашим алгоритмом приближение весьма точно воспроизводит искомую модель (здесь $N_s = 5$).

Модель 3 (фиг. 4) соответствует непрерывному изменению $\sigma(\zeta)$ на некотором конечном интервале глубин ($\zeta_1 = 0.5, \zeta_2 = 2.5$):

$$(13) \quad \sigma(\zeta) = \begin{cases} \sigma_1 = 1, & 0 < \zeta < \zeta_1, \\ \sigma_2 = 2 - \{1 - ((\zeta - \zeta_1)/(\zeta_2 - \zeta_1))^2\}^2, & \zeta_1 < \zeta < \zeta_2, \\ \sigma_3 = 2, & \zeta > \zeta_2. \end{cases}$$

Задаваясь в качестве начального приближения полупространством с постоянной проводимостью, равной проводимости σ_1 вблизи поверхности Земли (при этом фиктивные для начального приближения основные точки разрыва равны ζ_1 и ζ_2), мы восстанавливаем $\sigma(\zeta)$ с достаточно хорошей (фиг. 4) точностью ($N_s = 5$).

В модели 4 (фиг. 5) $\sigma(\zeta)$ непрерывно меняется в пределах первого слоя по закону, аналогичному (13), на среднем участке. По-прежнему не предполагается постоянства σ в следующем слое ($N_s = 5$). Начальное приближение отвечает полупространству с некоторой постоянной проводимостью, причем фиктивные для него точки разрыва не совпадают с действительными. И в этом случае (фиг. 5) мы получаем удовлетворительное восстановление искомой структуры; точность его на участке непрерывности может быть повышена за счет увеличения числа варьируемых параметров, что допустимо вследствие устойчивости алгоритма.

Как известно, при наличии погрешности входного импеданса может иметь место большая практическая эквивалентность различных структур. Приведенные выше результаты показывают, что если точность входных данных достаточно высока, то предлагаемый регуляризирующий алгоритм позволяет восстановить достаточно сложные разрезы с удовлетворительной для практики точностью.

Поступила в редакцию 22.07.1971

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. Докл. АН СССР, 1950, 73, № 2, 295—297.
2. А. Н. Тихонов. О вариациях земного электромагнитного поля. Докл. АН СССР, 1952, 87, № 4, 547—550.
3. L. Cagniard. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. Geophysics, 1953, 18, № 3, 605—635.
4. А. Н. Тихонов, Д. Н. Шахсуваров. О возможности использования импеданса естественного электромагнитного поля земли для изучения ее верхних слоев. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1956, № 4, 410—418.
5. А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. Докл. АН СССР, 1963, 153, № 1, 42—52.
6. А. Н. Тихонов. О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1962, 156, № 6, 1296—1299.
7. А. Н. Тихонов. Об устойчивости задачи оптимизации функционалов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 4, 631—634.

8. А. Н. Тихонов. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1965, 5, № 3, 545—548.
9. В. И. Дмитриев. Прямая и обратная задачи магнито-теллурического зондирования слоистой среды. *Изв. АН СССР. Физ. Земли*, 1970, № 1, 64—69.
10. Е. Ф. Саваренский, В. Б. Гласко, Б. Н. Шечков. Данные о фазовых и групповых скоростях поверхностных сейсмических волн. *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.*, 1963, № 10, 1486—1493.
11. В. Б. Гласко, Е. Ф. Саваренский, Я. Ш. Гранит, В. М. Мартынова, А. Б. Пешков. К вопросу об автоматизации обработки дисперсионных кривых поверхностных волн. *Тр. X Генеральной ассамблеи ЕСК*, 1970, 1, 56—71.
12. А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1965, 5, № 3, 463—473.
13. И. С. Березин, Н. П. Жидков. *Методы вычислений. Т. 1. М., Физматгиз*, 1960.
14. А. Н. Тихонов. Об устойчивом решении систем линейных алгебраических уравнений с вырожденной матрицей. *Докл. АН СССР*, 1965, 163, № 3, 591—594.