Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Максимов, А. Н. Румянцев, Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование, *Изв. вузов. Матем.*, 1993, номер 5, 56–71

https://www.mathnet.ru/ivm4419

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
12 декабря 2025 г., 15:28:56

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 5 (372)

УДК 517.929+517.67

В.П.МАКСИМОВ, А.Н.РУМЯНЦЕВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ. КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

В вводной части работы дается представление о математическом моделировании процессов функционирования многоотраслевых экономических систем на основе соотношений межотраслевого баланса, уравнений динамики производственных фондов и описании процесса производства с помощью производственных операторов. Особое внимание уделяется свойствам операторов, возникающих при моделировании. Показывается, что исследование широкого класса задач прогнозирования и целевого управления сводится к исследованию краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений.

Далее дается краткий обзор основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений, дающих основу для эффективного исследования краевых задач.

В заключительной части рассматриваются конструктивные методы исследования краевых задач – методы эффективного исследования разрешимости и построения решений на основе специальных теорем и алгоритмов, допускающих реализацию с помощью современных вычислительных средств и технологий. Такие методы охватывают широкие классы краевых задач с функциональными условиями в виде равенств и (или) неравенств, в том числе задачи для систем с импульсными возмущениями. Приводятся иллюстрирующие примеры.

§1. Введение

Необходимость иследования краевых задач с общими краевыми условиями возникает прежде всего в связи с внутренними потребностями развития теории функционально-дифференциальных уравнений. Подробное изложение общей теории краевых задач и обсуждение их роли в теории функционально-дифференциальных уравнений можно найти в монографии [1]. Среди отраслей знания, активно использующих современные результаты теории краевых задач, выделяется экономическая динамика [2], которая, не ограничиваясь практическими приложениями, предлагает новые классы краевых задач, имеющих самостоятельный теоретический интерес, дает новые постановки вопросов, а также интересную интерпретацию результатов. К таким классам краевых задач относятся задачи с неравенствами, задачи на пространствах разрывных траекторий, задачи импульсного управления. Для иллюстрации сказанного рассмотрим процесс моделирования основных производственных фондов в многоотраслевой экономической системе и некоторые типичные постановки краевых задач. Будем изучать поведение системы на промежутке $[0,T]$. Обозначив через $z(t)=\mathrm{col}(z_1(t),\dots,z_n(t))$ вектор выпуска продукции в момент времени $t\in[0,T]$ по отраслям и через $v(t)=\mathrm{col}(v_1(t),\dots,v_n(t))$ – вектор капиталовложений, выделенных в момент времени $t\in[0,T]$ для развития соответствующих отраслей, запишем основное балансовое соотношение

$$z(t) = A(t)z(t)+B(t)v(t)+c(t), \quad t\in[0,T].$$

Здесь $A(t)z(t)$ – производственные затраты, $B(t)v(t)$ – производственные накопления, $c(t)$ – потребление, включающее непроизводственное накопление.

Обозначим теперь через $x(t)=\mathrm{col}(x_1(t),\dots,x_n(t))$ основные производственные фонды в момент времени $t\in[0,T]$ и введем в рассмотрение "производственный" оператор F, который в каждый момент времени $t\in[0,T]$ ставит в соответствие функции $x:[0,t]\to R^n$ (т.е. "истории" развития основных производственных фондов) вектор $z(t)$ выпуска продукции:

$$z(t) = (Fx)(t), \quad t\in[0,T].$$

Здесь мы для сокращения записи считаем, что динамика трудовых ресурсов задана и входит в определение оператора F. Заметим также, что оператор F обладает свойством вольтерровости (см. §2). Типичными примерами операторов F являются оператор Немыцкого

$$(Fx)(t) = f(t,x(t))$$

(в математической экономике его называют "производственная функция") и оператор, введенный, по-видимому, Л.В.Канторовичем:

$$(Fx)(t) = \int_{m(t)}^{t} K(t,s,x(s))ds,$$

где $m(t)\leq t$ – заданная функция, позволяющая учитывать выбытие устаревших фондов (фонды, созданные ранее момента $m(t)$, устарели и в производстве не используются).

Запишем, наконец, уравнение динамики основных производственых фондов:

$$\dot{x}(t) = (Wv)(t) - (Mx)(t), \quad t\in[0,T],$$

где оператор W описывает процесс освоения капиталовложений (ввода основных производственных фондов), а оператор M характеризует выбытие (амортизацию) основных фондов. Заметим сразу, что операторы W и M, как и оператор F, вообще говоря, не являются локально определенными операторами, но обладают свойством вольтерровости и позволяют учитывать предысторию соответствующих процессов (моделировать запаздывание). Очевидно, в частности, что в реальных системах всегда имеет место запаздывание в освоении капиталовложений. В простейших случаях постоянного (не зависящего от времени) запаздывания оператор W имеет вид

$$(Wv)(t) = \mathrm{col}\{(W_1v_1)(t),\dots,(W_nv_n)(t)\},$$

где

$$(W_iv_i)(t) = \begin{cases} v_i(t-\tau_i), & \text{если } t\in[\tau_i,T]; \\ \phi_i(t-\tau_i), & \text{если } t<\tau_i; \end{cases}$$

запаздывание τ_i и "начальные" капиталовложения ϕ_i в i-й отрасли считаются заданными для всех $i=1,\dots,n$.

Зададим сценарий динамики потребления $c(t)$ в зависимости от выпуска $z(t)$:

$$c(t) = \Gamma(t)(E-A(t))z(t),$$

$\Gamma(t)=\mathrm{diag}\{\gamma_{ij}(t)\}$, $0\leq\gamma_{ij}(t)\leq 1$; E – единичная $(n\times n)$-матрица (в реальной системе $c(t)$ – часть "чистого" продукта $(E-A(t))z(t)$). Выражая теперь $v(t)$ через $z(t)$ с использованием основного балансового соотношения, запишем уравнение динамики фондов в виде функционально-дифференциального уравнения относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$(\mathscr{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t)+(Mx)(t) = (\mathscr{F}x)(t), \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где $(\mathscr{F}x)(t)=W[B^{-1}(E-\Gamma)(E-A)Fx](t)$.

Перейдем теперь к постановке краевых задач для уравнения (1). Простейшая краевая задача – здесь задача Коши

$$\mathscr{L}x = \mathscr{F}x, \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

При естественных предположениях эта задача однозначно разрешима, и, таким образом, при заданном x_0 расчет прогноза на период времени $t\in[0,T]$ состоит в приближенном построении решения задачи (2) и построении гарантированной оценки погрешности этого решения. В случае, когда требуется достичь заданного уровня производственных фондов в конце промежутка $t\in[0,T]$, возникает краевая задача

$$\mathscr{L}x = \mathscr{F}x, \quad x(T) = x_T. \tag{3}$$

Требуется исследовать разрешимость этой задачи и в случае ее разрешимости определить начальное значение $x(0)$ искомой траектории, т.е. начальное состояние, из которого разрешается задача (3). Для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений эта задача нетривиальна и не имеет удовлетворительного решения (мы не имеем здесь в виду эвристические приемы типа "метода стрельбы", которые оказываются малоэффективными применительно к системам функционально-дифференциальных уравнений).

Следующим является класс краевых задач, которые формально следует отнести к "переопределенным". Здесь число краевых условий больше размерности пространства состояний. Эта ситуация достаточно типична для экономической динамики. Рассмотрим задачу

$$\mathscr{L}x = \mathscr{F}x, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \tag{4}$$

Если задача (2) (или (3)) однозначно разрешима, то второе краевое условие оказывается выполненным лишь в исключительных случаях. Однако иногда возникает возможность "управлять" разрешимостью краевой задачи, если допускается разрыв траектории, или, в других терминах, если есть возможность скачкообразного изменения состояния системы в некоторый момент времени t_i. Содержательная интерпретация этого обстоятельства состоит в возможности привлечь дополнительные производственные фонды: извне – в скалярном случае, использовать в одной отрасли производственные фонды из другой – в многосекторном случае (конверсия – показательный случай такой возможности).

Для обыкновенных дифференциальных систем ситуация, подобная рассмотренной, достаточно проста, особенно в случаях, сводящихся к рассмотрению обычных задач Коши на частичных промежутках. Иначе обстоит дело с функционально-дифференциальными системами Здесь возникают нетривиальные вопросы , связанные с необходимостью распространения операторов на пространство разрывных функций и с исследованием разрешимости краевых задач в этих пространствах. Ответ на эти и другие принципиальные вопросы для линейного случая можно найти в теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения [1] в главе, посвященной системам с импульсными воздействиями.

Следующий класс краевых задач, естественно возникающих в экономической динамике, – краевые задачи с условиями в виде неравенств. Примером является краевая задача

$$\begin{gathered} \mathscr{L}x = \mathscr{F}x, \\ x(0) \leqslant x_0; \quad x(T) \geqslant x_T; \\ \int_0^T \Gamma(t)[E-A(t)](Fx)(t)\operatorname{diag}\{\exp(-\delta_i t)\}dt \geqslant \lambda. \end{gathered} \tag{5}$$

Содержательный смысл первых двух условий очевиден; в левой части последнего неравенства под знаком интеграла записано потребление $c(t) = \Gamma(t)[E-A(t)]z(t)$ (по отраслям), умноженное на весовой коэффициент, характеризующий изменение ценности потребляемого продукта со временем (продукт, произведенный раньше имеет большую ценность). Левая часть, таким образом, представляет собой "дисконтированное" интегральное потребление в отраслях системы, а векторное краевое неравенство в целом – условие поддержания интегрально-

го потребления на уровнях не ниже заданных значений λ_i для каждой отрасли ($\lambda=\mathrm{col}(\lambda_1, \ldots,\lambda_n)$). Задача (5) – типичный представитель класса малоизученных краевых задач.

Ниже мы обсудим возможности конструктивного исследования перечисленых краевых задач в линейном случае.

§2. Необходимые сведения из теории функционально-дифференциальных уравнений

Функционально-дифференциальные уравнения – уравнения, решениями которых являются дифференцируемые функции одного независимого переменного. Актуальными представителями этого обобщения обыкновенных дифференциальных уравнений являются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, интегродифференциальные уравнения, дифференциально-разностные уравнения, дифференциальные уравнения с запаздыванием (с последействием) и др. Функционально-дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$\dot{x}(t) = (Fx)(t), \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где F – оператор, определенный на некотором множестве абсолютно непрерывных функций. Если F – оператор Немыцкого $(Fx)(t)=f(t,x(t))$, то (1) – дифференциальное уравнение. При $(Fx)(t)=\int_0^T K(t,s,x(s))ds$ это – интегродифференциальное уравнение. Уравнение с отклоняющимся аргументом

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f(t,x[h(t)]),\dot{x}[g(t)]), \quad t\in[0,T],\\ x(\xi) = \phi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \text{если } \xi\notin[0,T]\end{gathered} \tag{2}$$

($\phi,\psi: R^1\setminus[0,T]\to R^n$ и $h,g: [0,T]\to R^1$ – заданные функции), можно записать в виде (1), положив

$$(Fx)(t) = f(t,(S_h x)(t)+\phi^h(t), \ (S_g\dot{x})(t)+\psi^g(t)). \tag{3}$$

Здесь для $y: [0,T]\to R^n$, $r: [0,T]\to R^1$ и $z: R^1\setminus[0,T]\to R^n$:

$$(S_r y)(t) = \begin{cases} y[r(t)], & \text{если } r(t)\in[0,T];\\ 0, & \text{если } r(t)\notin[0,T],\end{cases}$$

$$z^r(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } r(t)\in[0,T];\\ z[r(t)], & \text{если } r(t)\notin[0,T].\end{cases}$$

Если $h(t)=t-\tau_1$, $g(t)=t-\tau_2$, $\tau_1,\tau_2=\mathrm{const}$, то (2) – дифференциально-разностное уравнение.

Специальным задачам о специальных уравнениях вида (1) посвящено много работ (см. обзоры [3], [4]). Отдельные результаты получены более 200 лет назад, однако общие концепции в изучении функционально-дифференциальных уравнений появились лишь в последние три десятилетия.

Особое место занимает уравнение (1) с последействием. Это уравнение с вольтерровым оператором F – таким оператором, что для любого $\tau\in[0,T]$ и любых таких x_1, x_2 из области его определения, что $x_1(t)=x_2(t)$ на $[0,\tau]$, выполняется на $[0,\tau]$ равенство $(Fx_1)(t)=(Fx_2)(t)$. Уравнение (2) является уравнением с последействием, если $h(t)\leq t$, $g(t)\leq t$. Класс функционально-дифференциальных уравнений с последействием исследован наиболее подробно благодаря основополагающим идеям работ В.Вольтерры, А.Н.Тихонова и Н.Н.Красовского, обративших внимание на роль специфических особенностей "последействия". Свойство вольтерровости оператора F позволяет изучить поведение решения x уравнения (1) на любом отрезке $[0,\tau]\subset[0,T]$, игнорируя значения $x(t)$ и $(Fx)(t)$ при $t>\tau$, т.е. изучать так называемые локальные решения $x_\tau: [0,\tau]\to R^n$.

Пусть оператор F действует из пространства D^n абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$ в пространство L^n суммируемых по Лебегу функций $y:[0,T]\to R^n$. Будем считать, что нормы в пространствах D^n и L^n определены равенствами

$$\|x\|_{D^n} = |x(0)| + \int_0^T |\dot{x}(s)|ds, \quad \|y\|_{L^n} = \int_0^T |y(s)|ds,$$

где $|\cdot|$ – норма в R^n. Если непрерывный оператор $F:D^n\to L^n$ вольтерров и компактен, то для уравнения (1) имеют место аналоги фундаментальных утверждений теории дифференциальных уравнений о локальной разрешимости задачи Коши $\dot{x}=Fx$, $x(0)=\alpha$, о продолжаемости решений, о непрерывной зависимости решения от начального значения α. Эти утверждения справедливы и для функционально-дифференциальных уравнений, для которых удается установить факт приводимости к уравнению (1) с вполне непрерывным вольтерровым оператором F. Оператор $F:D^n\to L^n$, определяемый равенством (3), не является вполне непрерывным, однако при естественных предположениях относительно функций f, h, g, ϕ и ψ уравнение (2) эквивалентно уравнению $\dot{x}=F_1x$ с вполне непрерывным вольтерровым оператором $F_1:D^n\to L^n$, если, напр., $h(t)\leq t$ и существует такое $\Delta>0$, что $t-g(t)\geq\Delta$ на $[0,T]$. Если, кроме того, $t-h(t)\geq\Delta_1>0$ на $[0,T]$, то для уравнения (2) задача Коши с условием $x(0)=\alpha$ корректно разрешима: однозначно разрешима при любых $\alpha\in R^n$ и ее решение $x_\alpha\in D^n$ непрерывно зависит от α.

Пусть $\eta_i:D^n\to R^1$, $i=1,\dots,N$, – заданная система функционалов, оператор

$$\eta_i:D^n\to R^N, \quad \eta x=\mathrm{col}\{\eta_1x,\dots,\eta_Nx\}$$

называют вектор-функционалом. Краевой задачей для уравнения (1) с оператором $F:D^n\to L^n$ называют систему

$$\dot{x} = Fx, \quad \eta x = 0.$$

Краевые задачи лежат в основе современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Такая теория построена для класса "приводимых" уравнений (1), куда входят, в частности, все уравнения, для которых корректно разрешима задача Коши или какая-нибудь краевая задача.

Систему

$$\dot{x} = Fx, \quad \eta x \leq 0$$

будем называть краевой задачей с неравенствами.

Линейный случай уравнения (1) – уравнение

$$\mathscr{L}x = f, \tag{4}$$

где $\mathscr{L}:D^n\to L^n$ – линейный ограниченный оператор. Характерные свойства оператора $\mathscr{L}:D^n\to L^n$ обнаруживаются при его специальной записи, основанной на изоморфности пространств D^n и $L^n\times R^n$, устанавливаемой с помощью представления $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds+x(0)$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $\mathscr{L}$, получаем представление

$$(\mathscr{L}x)(t) = (Q\dot{x})(t) + A(t)x(0). \tag{5}$$

Общая теория уравнения (4) построена в предположении, что оператор Q ("главная часть" оператора $\mathscr{L}$) фредгольмов, т.е. представим в виде суммы вполне непрерывного и обратимого операторов.

Уравнение

$$\dot{x}(t)-P(t)\dot{x}[g(t)]-R(t)x[h(t)] = r(t), \quad t\in[0,T],$$

$$x(\xi) = \phi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \text{если } \xi\notin[0,T],$$

примет вид (4), если положить

$$(\mathscr{L}x)(t) = \dot{x}(t)-P(t)(S_g\dot{x})(t)-R(t)(S_h x)(t),$$
$$f(t) = r(t)+P(t)\psi^g(t)+R(t)\phi^h(t). \tag{6}$$

Главная часть Q такого оператора $\mathscr{L}$ имеет вид $I-S-K$, где I – тождественный, K – интегральный вполне непрерывный операторы, $(Sz)(t)=P(t)(S_g z)(t)$. Существование обратного оператора $(I-S)^{-1}:L^n\to L^n$ необходимо для фредгольмовости оператора $Q=I-S-K$.

Ниже всюду будем предполагать, что оператор Q обратим. Класс линейных функционально-дифференциальных уравнений $\mathscr{L}x=f$ с обратимой главной частью оператора $\mathscr{L}$ содержит разрешенные относительно производной дифференциальные уравнения с распределенным и сосредоточенным запаздыванием. Главная часть оператора $\mathscr{L}$, определенного равенством (5), обратима, если $h(t)\leq t$ и существует такое $\tau>0$, что $g(t)\leq t-\tau$, $t\in[0,T]$.

Задача Коши

$$\mathscr{L}x = f, \quad x(0) = \alpha \tag{7}$$

однозначно разрешима при любых $f\in L^n$, $\alpha\in R^n$, и ее решение x имеет представление

$$x(t) = \left\{E - \int_0^t (Q^{-1}A)(s)ds\right\}\alpha + \int_0^t (Q^{-1}f)(s)ds. \tag{8}$$

Матрицу $X(t) = E-\int_0^t (Q^{-1}A)(s)ds$ называют фундаментальной матрицей однородного уравнения $\mathscr{L}x=0$; каждый столбец x_i, $i=1,\dots,n$, этой матрицы является решением задачи Коши

$$\mathscr{L}x = 0, \quad x(0) = e_i,$$

где e_i есть i-й столбец единичной матрицы E.

Пусть $\ell_i:D^n\to R^1$, $i=1,\dots,N$, – линейный ограниченный функционал; оператор $\ell:D^n\to R^N$, $\ell x=\mathrm{col}(\ell_1 x,\dots,\ell_N x)$, называют вектор-функционалом.

Система

$$\mathscr{L}x = f, \quad \ell x = \beta \tag{9}$$

называется линейной краевой задачей, а уравнение $\ell x = \beta$ – краевыми условиями. Применяя оператор ℓ к тождеству $x(t)=\int_0^t \dot{x}(s)ds+x(0)$, получаем представление вектор-функционала ℓ:

$$\ell x = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0), \tag{10}$$

где каждый столбец $(N\times n)$-матрицы Ψ является результатом применения вектор-функционала ℓ к соответствующему столбцу единичной $(n\times n)$-матрицы E: $\Psi=\ell(E)$; $(N\times n)$-матрица Φ имеет измеримые и ограниченные в существенном элементы и определяется из равенства

$$\ell\left(\int_0^t y(s)ds\right) = \int_0^T \Phi(s)y(s)ds, \quad y\in L^n.$$

Для конкретных краевых условий $\ell x=\beta$ представление (10) вектор-функционала ℓ может быть получено с помощью элементарных преобразований. Например, для краевых условий

$$\ell x = \sum_{i=1}^k B_i x(t_i) + \int_0^T C(s)x(s)ds = \beta, \quad t_i\in[0,T],$$

имеем

$$\ell x = \sum_{i=1}^k B_i\left\{x(0) + \int_0^{t_i} \dot{x}(s)ds\right\} + \int_0^T C(s)\left\{x(0) + \int_0^s \dot{x}(\tau)d\tau\right\}ds =$$
$$= \int_0^T\left[\sum_{i=1}^k B_i\chi_i(s) + \int_s^T C(\tau)d\tau\right]\dot{x}(s)ds + \left[\sum_{i=1}^k B_i + \int_0^T C(s)ds\right]x(0),$$

где χ_i – характеристическая функция отрезка $[0,t_i]$:

$$\chi_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s\in[0,t_i]; \\ 0, & \text{если } s\notin[0,t_i]. \end{cases}$$

Из представления (8) вытекает, что разрешимость (однозначная разрешимость) краевой задачи (9) эквивалентна разрешимости (однозначной разрешимости) алгебраической системы

$$\ell X\cdot\alpha = \beta-\ell g, \tag{11}$$

где каждый столбец $(N\times n)$-матрицы ℓX представляет собой результат применения вектор-функционала ℓ к соответствующему столбцу фундаментальной матрицы X, а ℓg – значение вектор-функционала ℓ на решении задачи Коши $\mathscr{L}x=f$, $x(0)=0$. В случае, когда $N = n$ (число краевых условий совпадает с размерностью системы функционально-дифференциальных уравнений), необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи (9) является обратимость матрицы ℓX:

$$\det \ell X \neq 0.$$

Конструктивный метод эффективной проверки этого критерия, не требующий точного нахождения фундаментальной матрицы X, описывается в п. 3.2.

Систему

$$\mathscr{L}x = f, \quad \ell x \leqslant \beta \tag{12}$$

будем называть линейной краевой задачей с неравенствами. Эта задача разрешима тогда и только тогда, когда разрешима алгебраическая система линейных неравенств

$$\ell X\cdot\alpha \leqslant \beta-\ell g. \tag{13}$$

Метод исследования разрешимости этой системы, не требующий точного нахождения фундаментальной матрицы X и функции g, описывается в п. 3.4.

Опишем теперь способ расширения оператора $\mathscr{L}$ и вектор-функционала ℓ на пространство кусочно абсолютно непрерывных функций, позволяющий изучать системы с импульсными возмущениями, краевые задачи для таких систем, а также обобщенную разрешимость краевых задач в классе разрывных траекторий.

Пусть $0<t_1<t_2<\ldots<t_m<T$ – фиксированная система точек. Следуя [5], обозначим через $DS^n(m)=DS^n[0,t_1,\ldots,t_m,T]$ пространство функций $y\colon[0,T]\to R^n$ с суммируемой на $[0,T]$ производной, представимых в виде

$$y(t) = \int_0^t \dot y(s)ds + y(0)+\sum_{i=1}^m \chi_{[t_i,T]}(t)\Delta y(t_i).$$

Здесь

$$\Delta y(t_i) = y(t_i)-y(t_i-0), \quad \chi_{[t_i,T]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t\in[t_i,T]; \\ 0, & \text{если } t\notin[t_i,T], \end{cases}$$

– характеристическая функция отрезка $[t_i,T]$. Элементы пространства $DS^n(m)$ – абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0,t_1)$, $[t_i,t_{i+1})$, $i=1,\ldots,m-1$, $[t_m,T]$ функции, непрерывные справа в точках $t_1,\ldots,t_m$. Таким образом, между пространствами $DS^n(m)$ и $L^n\times R^{n+mn}$ существует взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое равенствами

$$y(t) = (Vz)(t) + \Theta(t)\beta, \quad \{z,\beta\} = \{\dot y,\Delta y\},$$

где $(Vz)(t) = \int_0^t z(s)ds$, $\Theta(t)$ есть $(n\times(n+mn))$-матрица:

$$\Theta(t) = (E_n, \chi_{[t_1,T]}E_n,\ldots,\chi_{[t_m,T]}E_n), \tag{14}$$

E_n – единичная $(n\times n)$-матрица,

$$\Delta y = \mathrm{col}\{y(0), \Delta y(t_1),\dots,\Delta y(t_m)\}. \tag{15}$$

Норму в $DS^n(m)$ определим равенством

$$\|y\|_{DS^n(m)} = \|\dot y\|_{L^n} + |\Delta y|_{n+mn}.$$

Положим $x(t)=\int_0^t \dot y(s)ds+y(0)$. Тогда $x\in D^n$ и

$$y(t) = x(t)+\sum_{i=1}^m \chi_{[t_i,T]}(t)\Delta y(t_i). \tag{16}$$

Ниже пространство $DS^n(m)$ будет играть роль пространства разрывных, вообще говоря, траекторий изучаемой системы, при этом слагаемое $x(t)$ в представлении (16) оказывается абсолютно непрерывной составляющей для траектории $y(t)$.

Линейное расширение $\tilde{\mathscr{L}}:DS^n(m)\to L^n$ оператора $\mathscr{L}:D^n\to L^n$ определяется набором $A_1,\dots,A_m$ $(n\times n)$-матриц с суммируемыми на $[0,T]$ элементами:

$$(\tilde{\mathscr{L}}y)(t) = (\mathscr{L}y)(t)+\sum_{i=1}^m A_i(t)\Delta y(t_i). \tag{17}$$

Для элементов $y\in DS^n(m)$ и $x\in D^n$, связанных равенством (16), имеем $\dot y=\dot x$ и $y(0)=x(0)$. Используя представление (5), из (17) для расширения $\tilde{\mathscr{L}}$ получаем

$$\tilde{\mathscr{L}}y = Q\dot y + \tilde A\Delta y,$$

где $\tilde A=(A,A_1,\dots,A_m)$; таким образом, главные части операторов $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ совпадают.

Линейное расширение $\tilde l:DS^n(m)\to R^N$ вектор-функционала $l:D^n\to R^N$ определяется набором $\Psi_1,\dots,\Psi_m$ постоянных $(N\times n)$-матриц:

$$\tilde l y = lx+\sum_{i=1}^m \Psi_i\Delta y(t_i). \tag{18}$$

Используя представление (10), для расширения $\tilde l$ получаем

$$\tilde l y = \int_0^T \Phi(s)\dot y(s)ds + \tilde\Psi\cdot\Delta y, \tag{19}$$

где $\tilde\Psi=(\Psi,\Psi_1,\dots,\Psi_m)$. Таким образом, здесь, как и при расширении оператора $\mathscr{L}$, меняется только конечномерная неинтегральная составляющая вектор-функционала.

Система

$$\tilde{\mathscr{L}}y = f,\quad \tilde l y = \beta \tag{20}$$

называется расширенной краевой задачей, а система

$$\tilde{\mathscr{L}}y = f,\quad \tilde l y \le \beta \tag{21}$$

– расширенной линейной краевой задачей с неравенствами.

Главной краевой задачей для уравнения $\tilde{\mathscr{L}}y=f$ называют задачу

$$\tilde{\mathscr{L}}y = f,\quad \Delta y = \alpha. \tag{22}$$

Она является аналогом задачи Коши (7). Главная краевая задача (22) однозначно разрешима (напомним, что мы всюду предполагаем обратимость оператора Q) при любых $f\in L^n$ и $\alpha\in R^{n+mn}$, и ее решение y имеет представление

$$y(t) = [\Theta(t)+X(t)]\alpha + \int_0^t (Q^{-1}f)(s)ds. \tag{23}$$

Здесь $(n\times(n+mn))$-матрица $\Theta(t)$ определена равенством (14), а каждый столбец $x_i(t)$, $i=1,\dots,n+mn$, $(n\times(n+mn))$-матрицы $X(t)$ принадлежит пространству D^n и является решением задачи Коши

$$(Q\dot{x})(t) = -\tilde{a}_i(t), \quad t\in[0,T], \; x(0)=0,$$

где $\tilde{a}_i(t)$ есть i-й столбец матрицы $\tilde{A}=(A,A_1,\dots,A_m)$. Заметим, что функция

$$g(t) = \int_0^t (Q^{-1}f)(s)ds \tag{24}$$

является решением задачи Коши

$$\mathscr{L}x = f, \quad x(0)=0,$$

а каждая функция $x_i(t)$ – решением задачи Коши

$$\mathscr{L}x = -\tilde{a}_i(t), \quad x(0)=0.$$

Таким образом, все параметры представления (23) выражаются в терминах решений задач Коши для исходного уравнения $\mathscr{L}x=f$. Матрицу

$$Y(t) = \Theta(t) + X(t) \tag{25}$$

называют фундаментальной матрицей расширенного однородного уравнения $\tilde{\mathscr{L}}x=0$; она является решением матричной главной краевой задачи

$$\tilde{\mathscr{L}}Y = 0, \quad \Delta Y = E_{n+mn}. \tag{26}$$

Вопрос о разрешимости задач (20), (21) так же, как и в "гладком" случае, сводится к вопросу о разрешимости линейных алгебраических систем. Действительно, используя представление $y(t)=Y(t)\alpha+g(t)$ (см. (23)) общего решения уравнения $\tilde{\mathscr{L}}x=f$, получаем для задач (20) и (21) системы уравнений

$$\tilde{l}Y\cdot\alpha = \beta - \tilde{l}g \tag{27}$$

неравенств

$$\tilde{l}Y\cdot\alpha \leqslant \beta - \tilde{l}g \tag{28}$$

соответственно. В пп. 3.3 и 3.4 описываются методы исследования разрешимости таких систем, не требующие точного нахождения матрицы $Y(t)$ и функции $g(t)$.

§3. Конструктивные методы исследования разрешимости краевых задач

3.1. *Обозначения и определения.* Норму $|\cdot|$ в пространстве R^n определим равенством: для $\alpha=\mathrm{col}\{\alpha^1,\dots,\alpha^n\}$ $|\alpha|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha^i|$, $|\alpha|=\mathrm{col}\{|\alpha^1|,\dots,|\alpha^n|\}$. Обозначим через $R^{n\times n}$ линейное пространство вещественных $(n\times n)$-матриц $A=\{a_{ij}\}_1^n$ с нормой $\|A\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$; $|A| = \{|a_{ij}|\}_1^n$; $R_+^n=R_+\times\dots\times R_+$, $R_+=[0,\infty)$.

Будем считать далее, что число T рационально и пространство $DS^n(m) = DS^n[0,t_1,\dots,t_m,T]$ построено по системе рациональных точек t_i, $i=1,\dots,m$. Обозначим $\varepsilon_1 = [0,t_1)$, $\varepsilon_i=[t_{i-1},t_i)$, $i=2,\dots,m$; $\varepsilon_{m+1}=[t_m,T]$, $\varepsilon_0=(-\infty,0)$; χ_i – характеристическая функция множества ε_i.

Будем говорить, что функция $x\in D^n$ $(y\in DS^n(m))$ обладает свойством $\mathscr{B}$ (вычислима), если ее компоненты, а также компоненты функций $\dot{x}$ и Vx ($\dot{y}$ и Vy) принимают рациональные значения при рациональных значениях аргумента. Свойством $\mathscr{B}$ обладает, например, функция вида

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m+1}\chi_i(t)p_i(t), \tag{1}$$

где компоненты вектор-функции $p_i:[0,T]\to R^n$, $i=1,\dots,m+1$, – полиномы с рациональными коэффициентами.

Обозначим через $\mathscr{P}^n_m$ множество всех $y\in DS^n(m)$, представимых в виде (1).

Будем говорить, что функция $h\in\mathscr{P}^n_m$, $h=\mathrm{col}\{h^1,...,h^n\}$, обладает свойством Δ_q, если для любого $j=1,...,m+1$ существует единственный вектор $q=\mathrm{col}\{q^1,...,q^n\}$, $0\leq q^i\leq j$, $i=1,...,n$, такой, что $h^i(t)\leq\varepsilon_{q^i}$, $i=1,...,n$, при $t\in\varepsilon_j$.

Свойством Δ_q обладают, напр., функции $h\in\mathscr{P}^n_m$, компоненты которых h^i, $i=1,...,n$, удовлетворяют неравенству $h^i(t)\leq t$, $t\in[0,T]$ и являются кусочно-постоянными рациональнозначными функциями.

Будем считать, что линейный ограниченный оператор $\mathscr{L}:D^n\longrightarrow L^n$, $\mathscr{L}x=Q\dot{x}+A(\cdot)x(0)$, обладает свойством $\mathscr{B}$ (вычислим), если оператор $\tilde{\mathscr{L}}_0:DS^n(m)\longrightarrow L^n$, определенный равенством

$$(\tilde{\mathscr{L}}_0y)(t) = (Q\dot{y})(t) + A(t)y(0), \tag{2}$$

отображает множество $\mathscr{P}^n_m$ в себя.

Если $\mathscr{L}x=\dot{x}+P(\cdot)x$, то оператор $\mathscr{L}$ вычислим, напр., при условии, что столбцы матрицы P являются функциями вида (1). Оператор $\mathscr{L}$:

$$(\mathscr{L}x)(t) = \dot{x}(t) + P(t)x_h(t), \quad t\in[0,T],$$

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t)\in[0,T]; \\ 0, & \text{если } h(t)\notin[0,T], \end{cases}$$

вычислим, если столбцы матрицы P имеют вид (1) и функция $h\in\mathscr{P}^1_m$ обладает свойством Δ_q.

Будем говорить, что линейный ограниченный вектор-функционал

$$l: D^n\longrightarrow R^N, \quad lx = \int_0^T\Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0),$$

обладает свойствлм $\mathscr{B}$ (вычислим), если вектор-функционал $\tilde{l}_0:DS^n(m)\longrightarrow R^N$, определенный равенством

$$\tilde{l}_0y = \int_0^T\Phi(s)\dot{y}(s)ds + \Psi y(0), \tag{3}$$

для всякого $y\in\mathscr{P}^n_m$ имеет свом значением вектор $\tilde{l}_0y$ с рациональными компонентами.

Описываемые ниже приемы установления разрешимости краевых задач существенно используют аппроксимацию операторов, определяемых исходной краевой задачей, в классе вычислимых операторов. Конструктивные теоремы о разрешимости краевых задач формулируются в терминах параметров, характеризующих точность этой аппроксимации.

Обозначим через $\overline{\mathscr{L}}$ линейный ограниченный оператор из D^n в L^n с обратимой главной частью, аппроксимирующий оператор $\mathscr{L}:D^n\longrightarrow L^n$ и обладающий ствойством $\mathscr{B}$. Точность аппроксимации задается неравенством

$$|(\mathscr{L}x)(t)-(\overline{\mathscr{L}}x)(t)| \leq \lambda_V(t)\|x\|_{D^n} \ \forall x\in D^n, \tag{4}$$

где $\lambda_V\in\mathscr{P}^n_m$. Пусть, далее, $\bar{l}:D^n\longrightarrow L^n$,

$$\bar{l}x = \int_0^T\Phi_a(s)\dot{x}(s)ds + \Psi_a x(0),$$

– вектор-функционал, аппроксимирующий вектор-функционал

$$l:D^n\longrightarrow L^n, \quad lx = \int_0^T\Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0).$$

Предполагается, что столбцы $(N\times N)$-матрицы Φ_a принадлежат множеству $\mathscr{P}^n_m$, элементы $(N\times n)$-матрицы Ψ_a – рациональные числа. Точность аппроксимации определяется неравенствами

$$|\Phi(t)-\Phi_a(t)| \leqslant \Phi_V, \quad t\in[0,T], \quad |\Psi-\Psi_a| \leqslant \Psi_V, \tag{5}$$

где Φ_V и Ψ_V суть $(N\times n)$-матрицы с рациональными элементами.

3.2. *Линейные краевые задачи. Регулярный случай.* Как было отмечено в §2, критерием однозначной разрешимости краевой задачи

$$\mathscr{L}x = f, \quad \ell x = \beta, \quad \beta\in R^n \tag{6}$$

с n краевыми условиями является обратимость матрицы ℓX:

$$\det \ell X \neq 0. \tag{7}$$

Это условие не может быть проверено непосредственно, т.к. фундаментальная матрица $X(t)$ не может быть найдена точно. Кроме того, даже для известной матрицы X элементы матрицы ℓX, вообще говоря, не могут быть вычислены точно. Предлагаемый ниже метод проверки условия (7) основан на теореме об обратном операторе (см., напр., [6]), в силу которой обратимость матрицы ℓX можно установить, если удастся найти такую обратимую матрицу Γ, что

$$\|\ell X-\Gamma\| < 1/\|\Gamma^{-1}\|. \tag{8}$$

Как показано в [1], [7], [8], для обратимой матрицы ℓX такую матрицу Γ можно всегда найти среди матриц $\Gamma = \bar{\ell}\bar{X}$, где $\bar{\ell}:D^n\to R^n$ – вектор-функционал, близкий к ℓ, а $\bar{X}$ – фундаментальная матрица однородного уравнения $\bar{\mathscr{L}}x=0$ с оператором $\bar{\mathscr{L}}:D^n\to L^n$, близким к оператору $\mathscr{L}$. Приемы построения такой матрицы Γ оказываются конструктивными в случае применения ЭВМ с использованием специальных средств вычислений (в частности, систем аналитических вычислений μSIMP-μMATH, FORMAC, REDUCE и др.), обеспечивающих достоверную проверку неравенства (8). Применение этих средств предъявляет определенные требования к операторам $\bar{\mathscr{L}}$ и $\bar{\ell}$. Этим требованиям удовлетворяют классы функций и операторов, обладающих свойством $\mathscr{B}$ (вычислимых). В рамках этих классов оказалось возможным сформулировать "реализуемые" аналоги нужных теорем, т.е. такие теоремы, условия которых могут быть эффективно проверены с помощью реального компьютера. Так, используя оценку (4), можно фактически построить такие $(n\times n)$-матрицы $X_a(t)$ и $X_V(t)$ со столбцами из $\mathscr{P}^n_m$, что для фундаментальной матрицы $X(t)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t |\dot{X}(s)-\dot{X}_a(s)|ds \leqslant X_V(t), \quad t\in[0,T]. \tag{9}$$

Далее, на основании этой оценки и оценок (5) удается построить такую $(n\times n)$-матрицу M_V с рациональными элементами, что

$$|\ell X-\bar{\ell}X_a| \leqslant M_V. \tag{10}$$

При этом элементы матрицы $M_a=\bar{\ell}X_a$ вычисляются точно, и становится возможным эффективно проверить условие следующей теоремы об однозначной разрешимости задачи (6).

ТЕОРЕМА. *Пусть матрица M_a обратима и*

$$\|M_V\| < 1/\|M_a^{-1}\|. \tag{11}$$

Тогда задача (6) *однозначно разрешима при любых $f\in L^n$ и $\beta\in R^n$.*

3.3. *Переопределенные линейные краевые задачи. Обобщенная разрешимость. Задачи импульсного управления.* Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\mathscr{L}x = f, \quad \ell x = \beta, \quad \beta\in R^N, \tag{12}$$

считая, что компоненты ℓ_i вектор-функционала $\ell:D^n\to R^N$, $\ell x=\mathrm{col}(\ell_1x,\dots,\ell_Nx)$, линейно независимы и $N>n$. Такая задача не может быть однозначно разрешимой при любых $f\in L^n$ и $\beta\in R^N$

[1]. Поставим в соответствие задаче (12) расширенную краевую задачу

$$\tilde{\mathscr{L}}x = f, \quad \tilde{l}x = \beta, \quad \beta \in R^N, \tag{13}$$

где $\tilde{\mathscr{L}}:DS^n(m) \longrightarrow L^n$ и $\tilde{l}:DS^n(m) \longrightarrow R^n$ – некоторые фиксированные расширения операторов $\mathscr{L}$ и l соответственно. Решение задачи (13) будем называть обобщенным решением задачи (12). Выбор расширений $\tilde{\mathscr{L}}$ и $\tilde{l}$ при исследовании содержательных задач экономической динамики обычно диктуется дополнительной информацией о допустимых точках разрыва траектории (или ее отдельных компонент), а также условиями, которыми должны удовлетворять скачки отдельных компонент траектории. Для некоторых операторов $\mathscr{L}$ (точнее говоря, для некоторых форм записи оператора $\mathscr{L}$) среди возможных расширений $\tilde{\mathscr{L}}$ можно выделить "естественные" расширения. Такие расширения естественным образом возникают, если возможность разрыва траектории учитывается при моделировании процессов. Например, для оператора $\mathscr{L}:D^n \longrightarrow L^n$ вида

$$(\mathscr{L}x)(t) = \dot{x}(t) + P(t)x_h(t)$$

таким расширением естественно считать оператор $\tilde{\mathscr{L}}:DS^n(m) \longrightarrow L^n$ вида

$$(\tilde{\mathscr{L}}y)(t) = \dot{y}(t) + P(t)y_h(t),$$

в котором второе слагаемое определяется на пространстве $DS^n(m)$ той же "формулой", что и второе слагаемое в представлении оператора $\mathscr{L}:D^n \longrightarrow L^n$. Для этого расширения $\tilde{\mathscr{L}}$ матрицы A_i в представлении (2.17) определяются равенствами

$$A_i(t) = P(t)\varkappa_i(t); \quad \varkappa_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } h(t) \in [t_i, T]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [t_i, T], \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Заметим, что дополнительные переменные $\Delta y(t_i)$, $i=1,\ldots,m$ (см. представление (2.16)), появляющиеся в расширенной задаче, играют роль параметров, "управляющих" разрешимостью краевой задачи (13). При этом краевые условия накладывают соответствующие ограничения на управляющие параметры. Задачу (13) естественно рассматривать как задачу импульсного управления.

Разрешимость задачи (13) эквивалентна разрешимости системы (2.27):

$$\tilde{l}Y \cdot \alpha = \beta - \tilde{l}g.$$

Эта система однозначно разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда матрица $\tilde{l}Y$ квадратная и имеет обратную. В общем случае матрица $\tilde{l}Y$ имеет размерность $N \times (n+mn)$. Таким образом, при выборе пространства $DS^n(m)$ следует допустить разрывы в таком числе точек, чтобы выполнилось равенство

$$n + mn = N. \tag{15}$$

При этом возможна ситуация, когда ни при каком натуральном m равенство (15) не выполняется: существует такое m_0, что $n+(m_0-1)n<N$ и $n+m_0n>N$. В таком случае для получения системы (2.27) с квадратной матрицей коэффициентов можно увеличить число компонент вектор-функционала $\tilde{l}$ на $n+m_0n-N$, добавив соответствующее количество краевых условий. Заметим, что в качестве таких условий иногда целесообразно выбирать дополнительные условия, связывающие величины скачков отдельных компонент или условия, запрещающие некоторым компонентам решения иметь разрывы.

Приведем в качестве примера переопределенную краевую задачу

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + P(t)x_h(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \quad x = \mathrm{col}\{x_1, x_2\}, \\ x(0) = \beta_0, \quad x(1) = \beta_1, \quad x(1/2) = \beta_{1/2}. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $n=2$, $N=5$, $m_0=2$, $k=n+m_0n-N=2+2\cdot 2-5=1$. Расширенной краевой задачей с квадратной матрицей $\tilde{\ell}Y$ является, напр., задача

$$\begin{gathered}\dot{y}(t) + P(t)y_h(t) = f(t), \quad t\in[0,1], \quad y = \mathrm{col}\{y_1,y_2\},\\ y(0) = \beta_0, \quad y(1) = \beta_1, \quad y(1/2) = \beta_{1/2}; \quad \Delta y_1(t_2)+\Delta y_2(t_2) = 0\end{gathered} \tag{17}$$

в классе траекторий с возможными разрывами в точках $t_1,t_2\in(0,1)$. При этом скачки первой и второй компонент траектории в точке t_2 имеют одинаковую абсолютную величину и противоположные знаки.

ЗАМЕЧАНИЕ. При исследовании реальных задач пространства $DS^n(m)$ иногда оказываются неудобными. В частности, тем, что добавление каждой новой точки возможного разрыва увеличивает размерность пространства решений однородной системы на n. Такой рост размерности задачи не всегда приемлем с вычислительной точки зрения. Более удобными являются пространства, в которых для каждой точки разрыва задается список "разрывных" компонент. Определим такое пространство для системы точек $0<t_1<\ldots<t_m<T$ следушим образом. Пусть $J_i=\{\mu_1^i,\ldots,\mu_{\nu_i}^i\}$, $1\le\mu_1^i<\mu_2^i<\ldots<\mu_{\nu_i}^i\le n$. Обозначим через $DS^n\{J_1,\ldots,J_m\}$ пространство функций $y:[0,T]\to R^n$, $y(t)=\mathrm{col}\{y_1(t),\ldots,y_n(t)\}$ с суммируемой на $[0,T]$ производной, представимых в виде

$$y(t) = \int_0^t y(s)ds + y(0)+\sum_{i=1}^m \chi_{[t_i,T]}(t)\sum_{k=1}^{\nu_i} e_{\mu_k^i}\Delta y_{\mu_k^i}(t_i),$$

где $\Delta y_j(t_i) = y_j(t_i) - y_j(t_i-0)$, e_j есть j-й столбец единичной $(n\times n)$-матрицы. Норму в $DS^n\{J_1,\ldots,J_m\}$ определим равенством

$$\|y\|_{DS^n\{J_1,\ldots,J_m\}} = \|\dot{y}\|_{L^n} + \left|\mathrm{col}\{y(0), \Delta y_{\mu_1^1}(t_1),\ldots,\Delta y_{\mu_{\nu_m}^m}(t_m)\}\right|.$$

Все утверждения этой статьи о краевых задачах (21), (22) могут быть сформулированы для случая, когда пространство $DS^n(m)$ заменено пространством $DS^n\{J_1,\ldots,J_m\}$.

Для установления обратимости матрицы $\tilde{\ell}Y$ можно воспользоваться тем же методом, что и в регулярном случае (п. 3.2). А именно, учитывая структуру фундаментальной матрицы Y расширенной задачи (см. (2.25)), можно считать, что матрица Y известна достаточно точно с гарантированной оценкой точности: известны вычислимые матрицы $Y_a(t)$ и $Y_V(t)$ такие, что

$$\int_0^t |\dot{Y}(s)-\dot{Y}_a(s)|ds \le Y_V(t), \quad t\in[0,T]. \tag{18}$$

Пусть, далее, $\tilde{\Phi}_a$ и $\tilde{\Psi}_a$ – вычислимые матрицы, аппроксимирующие матрицы $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ в представлении

$$\tilde{\ell}Y = \int_0^T \tilde{\Phi}(s)\dot{Y}(s)ds + \tilde{\Psi} \tag{19}$$

с точностью $\tilde{\Phi}_V$ и $\tilde{\Psi}_V$ соответственно:

$$|\tilde{\Phi}(t)-\tilde{\Phi}_a(t)| \le \tilde{\Phi}_V, \quad t\in[0,T], \quad |\tilde{\Psi}-\tilde{\Psi}_a| \le \tilde{\Psi}_V. \tag{20}$$

Определим вычислимый вектор-функционал $\tilde{\ell}_a:DS^n(m)\to R^n$ равенством

$$\tilde{\ell}_a y = \int_0^T \tilde{\Phi}_a(s)\dot{y}(s)ds + \tilde{\Psi}_a\Delta y.$$

По матрицам Y_V, $\tilde{\Phi}_V$, $\tilde{\Psi}_V$ построим такую матрицу M_V, что

$$|\tilde{\ell}Y - \tilde{\ell}_a Y_a| \le M_V. \tag{21}$$

ТЕОРЕМА. *Пусть вычислимая матрица M_a обратима и выполняется неравенство*

$$\|M_V\| < 1/\|M_a^{-1}\|.$$

Тогда краевая задача (10), *где* $n+mn=N$, *однозначно разрешима при любых* $f\in L^n$ *и* $\beta\in R^N$.

Обратимся теперь к вопросу о построении траектории, разрешающей задачу (13). Эта траектория $y(t)$ однозначно определяется заданием вектора $\Delta y=\mathrm{col}\{y(0),\Delta y(t_1),...,\Delta y(t_m)\}$. Как отмечалось выше, информация о скачках $\Delta y(t_i)$ искомой траектории в содержательных задачах представляет самостоятельный интерес.

Общее решение уравнения $\tilde{\mathscr{L}}y=f$ представимо в виде

$$y(t) = Y(t)\mathrm{col}\{\alpha,\alpha_1,...,\alpha_m\} + g(t),$$

где g – решение задачи Коши $\mathscr{L}x = f$, $x(0)=0$; α, α_i, $i=1,...,m$, – произвольные постоянные векторы из R^n. Применяя к обеим частям последнего равенства вектор-функционал $\tilde{l}$, получаем для определения α, α_i, $i=1,...,m$, систему

$$[\tilde{l}Y] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \beta - \tilde{l}g \tag{22}$$

с обратимой в силу условий теоремы матрицей $\tilde{l}Y$.

Обозначим через $\mathrm{col}\{\bar{\alpha},\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_m\}$ решение системы (22). Для искомой траектории имеем

$$y(0) = \bar{\alpha}, \quad \Delta y(t_i) = \bar{\alpha}_i, \quad i=1,...,m.$$

Заметим, что неравенство (21) дает возможность вычисления $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}_i$ с гарантированной оценкой точности.

3.4. *Линейные краевые задачи с неравенствами.* Конструктивный метод исследования разрешимости линейной краевой задачи с неравенствами опишем сразу для случая разрывных траекторий (задача (2.21)):

$$\tilde{\mathscr{L}}x = f, \quad \tilde{l}x \leq \beta, \quad \beta\in R^N. \tag{23}$$

Случай гладких траекторий является, очевидно, частным случаем ($m=0$, $DS^n(0)=D^n$, $\mathscr{L}=\tilde{\mathscr{L}}$, $l=\tilde{l}$).

Задача (23) разрешима, если имеет решение линейная система неравенств (2.28):

$$\tilde{l}Y\cdot\alpha \leq \beta-\tilde{l}g.$$

Исследовать разрешимость этой системы можно следующим образом. Используя оценки (18), (20), построим такие матрицы $\underline{M}$ и $\overline{M}$, что

$$\underline{M} \leq \tilde{l}Y \leq \overline{M}. \tag{24}$$

Аналогично для вектора $\tilde{l}g$ получим двустороннюю оценку

$$\underline{d} \leq \tilde{l}g \leq \overline{d}. \tag{25}$$

Детали фактического построения матриц $\underline{M}$ и $\overline{M}$ и векторов $\underline{d}$ и $\overline{d}$ с помощью современных вычислительных средств можно найти в [1], [7]. Заметим сразу, что предлагаемый метод тем эффективнее, чем точнее оценки (24), (25).

С помощью современных вычислительных средств удается проверить условия следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть существует такое* $c\in R^{n+mn}$, $c>0$, *что система линейных неравенств*

$$\overline{M}\gamma \leq \beta+\underline{M}c-\overline{d} \tag{26}$$

имеет решение $\gamma\in R^{n+mn}$, $\gamma\geq 0$. *Тогда задача* (23) *разрешима.*

Если $\bar{\gamma}\in R^{n+mn}$, $\bar{\gamma}\geq 0$ – решение системы (26), то вектор $\bar{\alpha}=\bar{\gamma}-c$, $\bar{\alpha}$ = col$\{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_m\}$, $\bar{\alpha}_i\in R^n$, $i=0,1,...,m$, однозначно определяет траекторию $\bar{y}$ системы $\tilde{\mathcal{L}}y = f$, удовлетворяющую неравенствам $\tilde{l}y\leq\beta$. Такой траекторией является траектория, удовлетворяющая условиям

$$\bar{y}(0) = \bar{\alpha}_0, \quad \Delta\bar{y}(t_i) = \bar{\alpha}_i, \quad i=1,...,m.$$

3.5. *Иллюстрирующий пример.* Рассматривается эколого-экономическая математическая модель [9], связывающая основные фонды экономического региона, уровень загрязненности среды и уровень заболеваемости. Обозначим через y_1 основные производственные фонды промышленности региона, через y_2 – уровень загрязненности водных ресурсов, через y_3 – уровень загрязненности атмосферы, через y_4 – приведенный уровень заболеваемости верхних дыхательных путей, через y_5 – приведенный уровень заболеваемости органов пищеварения.

Уравнения динамики изменения фазовых переменных имеют вид:

$$\dot{y}_1(t) = -\lambda(t)\times y_1(t) + \gamma(t)\times K(t)\times\beta_0,$$

$$\dot{y}_2(t) = 0.041y_1(t)-0.231y_2(t)+(2.7\times L(t)-0.73\times KV(t)-273.3t+3664.3)\times\beta_0,$$

$$\dot{y}_3(t) = 0.0443y_1(t)-0.1041y_3(t)+(0.5727\times L(t)-0.45888\times KA(t)+0.9853t-220)\times\beta_0,$$

$$\dot{y}_4(t) = 0.02957y_1(t)+0.1823y_2(t)+0.346y_3(t)-0.643y_4(t)-(329.17+25.68t)\times\beta_0,$$

$$\dot{y}_5(t) = 0.0834y_1(t)+0.0938y_2(t)+0.01304y_3(t)-0.04845y_5(t)-(5.636t+88.643)\times\beta_0.$$

Здесь $t\in[0,5]$, $\beta_0=0.001$, $\lambda(t)=0.03+\lambda_1 t$, $\gamma(t)=0.98+\gamma_1 t$, $\lambda_1, \gamma_1\in[0,0.5]$, $K(t)=$ $=356.36+32.997\times t-0.223\times t^2$, $L(t)=561.86+8.13\times t-0.497\times t^2$, $KV(t)=19.45+4.81\times t$, $KA(t)=0.58+$ $+6.13\times t$. Краевые условия представляют собой совокупность 17 неравенств:

$$1\leq y_4(5)\leq 2, \quad 1\leq y_5(5)\leq 2, \quad y_2(5)\leq 1, \quad y_3(5)\leq 1, \quad \int_0^5 2.635\times y_1(s)ds\leq 50,$$

$$0.5\leq y_1(0)\leq 5, \quad 0.5\leq y_2(0)\leq 5, \quad 0.5\leq y_3(0)\leq 0.8, \quad 0.5\leq y_4(0)\leq 5, \quad 0.5\leq y_5(0)\leq 5.$$

Исследуется разрешимость краевой задачи в пространстве $DS^5[0,2,3,4.8,5]$ с ограничениями $\Delta y_i(2)\leq 0$, $\Delta y_i(3)\leq 0$, $\Delta y_i(4.8)\leq 0$, $i=1,2$. Для этой краевой задачи установлена ее разрешимость, найдены начальные значения всех компонент допустимой траектории:

$$y_1(0)=0.5, \quad y_2(0)=0.5, \quad y_3(0)=0.5, \quad y_4(0)=0.5, \quad y_5(0)=0.5,$$

и значения "управления":

$$\Delta y_1(2)=-1.21, \quad \Delta y_1(3)=-0.4, \quad \Delta y_1(4.8)=-0.8,$$

$$\Delta y_2(2)=-8.2, \quad \Delta y_2(2)=-4.4, \quad \Delta y_2(2)=-6.1.$$

Все числовые значения приведены в условных единицах измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.*–М.: Наука, 1991. – 280 с.

2. Дюкалов А.Н. *Некоторые задачи прикладной математической экономики.*–М.: Наука, 1982. – 198 с.

3. Мышкис А.Д. *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* // УМН. – 1977. – №2. – С.173–202.

4. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др. *Теория уравнений нейтрального типа* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. - 1981. - Т.19. - С.55-126.

5. Анохин А.В. *О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений* // ДАН СССР. - 1986. - Т.286. - №5. - С.1037-1040.

6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.*-М.: Наука, 1965. - 520 с.

7. Румянцев А.Н. *К исследованию разрешимости краевых задач с применением систем аналитических вычислений.* - Пермь, 1987. - 10 с. - Деп. в ВИНИТИ АН СССР 11.05.87, №3373.

8. Максимов В.П., Румянцев А.Н. *Конструктивные методы в теории функционально-дифференциальных уравнений и их компьютерная реализация* // Функц.-дифференц. уравнения. - Пермь, 1990. - С.79-93.

9. Андрианов Д.Л., Максимов В.П., Румянцев А.Н. *Некоторые краевые задачи экономической динамики* // Функц.-дифференц. уравнения. - Пермь, 1991. - С.10-27.

г. Пермь

Поступила
01.06.1993