В. Н. Солев, А. Зербет, Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2001, том 278, 225–247

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

В. Н. Солев, А. Зербет

УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ГАУССОВСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Пусть $x(t)$ стационарный гауссовский процесс с нулевым средним, $\mathbf{E}\,x(t) = 0$, и спектральной мерой μ (см. подробнее [1, 4]). Иначе говоря, x такая функция

$$x\,:\,\mathbb{R}^1 \to \Gamma \subset L^2(dP),$$

что

$$R(t,s) \;=\; \mathbf{E}\,x(t)x(s) \;=\; R_x(t-s) \tag{1.1}$$

и

$$R_x(t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{itu\}\,\mu(du), \tag{1.2}$$

где $L^2(dP)$ – L^2-пространство, построенное по вероятностной мере P, Γ – гауссовское подпространство пространства $L^2(dP)$, μ – конечная мера.

Мы будем также рассматривать функционалы $\mathbf{x}[\varphi]$,

$$\mathbf{x}[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t)\,dt, \tag{1.3}$$

определенные для всех функций φ таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(s)}R_x(t-s)\,dtds < \infty.$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}\,|\mathbf{x}[\varphi]|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(s)}R(t-s)\,dtds = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(u)|^2\,\mu(du). \tag{1.4}$$

где $\hat{\varphi}$–преобразование Фурье функции φ.

В общем случае $\mathbf{x}[\cdot]$–обобщенный стационарный гауссовский процесс , то есть такой линейный оператор

$$\mathbf{x}[\cdot]\,:D(\mathbb{R}^1)\longrightarrow\Gamma,$$

из пространства $D(\mathbb{R}^1)$ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ с компактным носителем в Γ, что

$$R(\varphi,\psi)=\mathbf{E}\,\mathbf{x}[\varphi]\overline{x[\psi]}=\mathbf{E}\,x[\tau_s\varphi]\overline{\mathbf{x}[\tau_s\psi]}$$

Здесь τ_s оператор сдвига: $[\tau_s\varphi]\,(t)=\varphi(t+s)$. Как известно, существует такая неотрицательная мера μ (называемая спектральной мерой процесса $\mathbf{x}$), что

$$\mathbf{E}\,x[\varphi]\overline{\mathbf{x}[\psi]}=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(u)\overline{\hat{\psi}(u)}\,\mu(du). \tag{1.5}$$

Относительно меры μ мы предполагаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(du)}{(1+u^2)^n}<\infty, \tag{1.6}$$

для некоторого целого n.

Рассмотрим спектральное представление процесса $\mathbf{x}$ (см. подробнее [4]):

$$\mathbf{x}[\varphi]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(u)\;Z(du), \tag{1.7}$$

где $Z(\cdot)$ – такая ортогональная (гауссовская) мера, что

$$\mathbf{E}\,Z(A)\cdot\overline{Z(B)}\;=\;\mu\{A\cap B\},\quad \mathbf{E}\,Z(A)\;=\;0. \tag{1.8}$$

В случае, когда обобщенный процесс $\mathbf{x}$ строится по “обычному” процессу x (как это сделано в (1.3)), мы имеем

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{itu\}\;Z(du). \tag{1.9}$$

Положим $\mathbf{X}=\overline{sp}\{\mathbf{x}[\varphi],\,\varphi\in D(\mathbb{R}^1)\}$. Как это следует из (1.5) линейный оператор $U:\mathbf{X}\to L^2(d\mu)$, определенный соотношением

$$U\mathbf{x}[\varphi]=\hat{\varphi}, \tag{1.10}$$

является унитарной изометрией.

Для измеримого $S \subset \mathbb{R}^1$ обозначим

$$\mathbf{X}_S \;=\; \overline{sp}\{\mathbf{x}[\varphi] : \operatorname{supp}\varphi \in S\}. \qquad (1.11)$$

где $\overline{sp}\{M\}$ замыкание (здесь в метрике пространства $L^2(dP)$) линейной оболочки M. Так что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathbf{R}^1}$.

Если $S = [a,b]$, $a < b$ мы будем писать

$$\mathbf{X}_a^b \;=\; \mathbf{X}_{[a,b]}.$$

В специальном случае, когда $S = [-t,t], t \geq 0$ мы будем писать

$$\mathbf{X}(t) \;=\; \mathbf{X}_{[-t,t]}.$$

Пусть $\mathbf{x}[\cdot]$ обобщенный гауссовский процесс со спектральной плотностью f, $\mathcal{F}$ наименьшая $\sigma-$алгебра, относительно которой измеримы величины $\mathbf{x}[\varphi]$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{F}_t$, $t > 0$, $\sigma-$алгебра, порожденная величинами $\mathbf{x}[\varphi]$, $(\operatorname{supp})\,\varphi \in [-t,t]$. Обозначим $\mathcal{P}(f)$ меру на $\mathcal{F}$, индуцированную процессом $\mathbf{x}$. Пусть $\mathcal{P}_t(f)$– сужение меры $\mathcal{P}(f)$ на $\mathcal{F}_t$.

Предположим, что неотрицательные функции f и g выбраны так, что гауссовские меры $\mathcal{P}_t(f)$ и $\mathcal{P}_t(g)$ взаимно абсолютно непрерывны, и обозначим

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f)}{d\mathcal{P}_t(g)}.$$

Нас интересует случай, когда t велико, а гауссовские меры $\mathcal{P}_t(f)$ и $\mathcal{P}_t(g)$ близки. Точнее нас интересует случай, когда функция $g(u)$ фиксирована, t–велико, а функция $f(u) = f_t(u)$ в следующем смысле близка к функции g.

Для локально интегрируемой функции φ, определенной на вещественной оси, обозначим $||\varphi||_*$ – BMO норму φ (см. [6, 7]):

$$||\varphi||_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi(u) - \varphi_I|\, du \qquad (1.12)$$

где супремум берется по всем конечным интервалам I, $|I|$ – длина I,

$$\varphi_I = \frac{1}{I} \int\limits_I \varphi(u)\, du.$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство с нормой

$$||\varphi||_{\mathcal{L}} = ||\varphi||_{*} + \left[\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\varphi(u)|^2\,du\right]^{1/2}. \tag{1.13}$$

Мы предполагаем, что $f = f_t = h_t g$, где

$$\ln h_t(u) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\varphi(u) + r_t(u)\right].$$

Здесь функции φ, r_t лежат в пространстве $\mathcal{L}$, причем $||r_t||_{\mathcal{L}} \to 0$, когда $t \to \infty$. В этих условиях (при дополнительном предположении, что функция g удовлетворяет условию Макенхаупта) мы устанавливаем асимптотическую нормальность величины $\mathcal{D}_t(f, g)$.

Отсюда, разумеется, следует, что если семейство гауссовских мер, отвечает стационарным процессам со спектральными плотностями

$$f(u) \in \{f :\ f(u) = f(\theta; u), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\},$$

удовлетворяющими условию Макенхаупта и гладко зависящими от параметра θ, то это семейство удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности (ЛАН). Здесь слова "гладко зависящими" означают, что функция $\psi(\theta; \cdot) = \ln f(\theta; \cdot)$ как функция из Θ в $\mathcal{L}$ дифференцируема в метрике пространства $\mathcal{L}$. Последнее означает, что существует такая вектор-функция $D(u) = D(\theta_0; u)$ (из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$)с координатами из пространства $\mathcal{L}$, что

$$\psi(\theta; \cdot) - \psi(\theta_0; \cdot) = (D, \theta - \theta_0)_{\mathbf{R}^n} + r(\theta_0, \theta; u),$$

где

$$||r(\theta_0, \theta; \cdot)||_{\mathcal{L}} = o(||\theta - \theta_0||_{\mathbf{R}^n}),$$

$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{R}^n}, ||\cdot||_{\mathbf{R}^n}$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$

2. Воспроизводящее ядро

Пусть R_+ верхняя полуплоскость $\{z : (\mathrm{Im})\, z > 0\}$. Будем писать $h \in H(R_+) = H_+$ если h такая аналитическая функция на R_+, что существует предел

$$\lim_{y \searrow 0} h(x + iy) = h(x), \tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln |h(x)| \frac{dx}{1+x^2} > -\infty, \tag{2.2}$$

и

$$\lg |h(x+iy)| \le \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |h(t)| \frac{dt}{(x-t)^2+y^2}, \qquad y>0. \tag{2.3}$$

Функции из H_+ ,будем отождествлять с их "граничными значениями", определенными в (2.1).

Для нижней полуплоскости $R_- = \{z : (\mathrm{Im})\, z < 0\}$ пространство Харди $H(R_-) = H_-$ определяется аналогичным образом. Понятно, что в этом случае неравенство (2.3) переходит в неравенство

$$\lg |h(x+iy)| \le \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |h(t)| \frac{dt}{(x-t)^2+y^2}, \qquad y<0,$$

Будем обозначать $H^2_+ = L^2 \cap H_+, H^2_- = L^2 \cap H_-$.

Будем писать $e_t(u) = e^{itu}$. Обозначим через H_t пересечение

$$H_t = e_{-t} H_+ \cap e_t H_-.$$

Ясно, что в H_t лежат целые функции конечной степени, где степень $t = t_g$ целой функции g определяется соотношением

$$t = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \max_{|z|=r} |g(z)|}{r}.$$

Для неотрицательной функции f (определенной на вещественной прямой) обозначим через L^2_f L^2-пространство, построенное по мере с плотностью f. Будем писать L^2, если $f(t) = \mathbf{1}(t) \equiv 1$. Обозначим

$$H(t) = \{\varphi : \varphi \in L^2,\ \varphi(u) = \int_{-t}^{t} a(s) e^{isu}\, ds\}.$$

Положим

$$H_t(f) = \overline{H(t) \cap L^2_f},$$

где замыкание берется в метрике пространства L^2_f.

Функционал $l_z\varphi = \varphi(z)$ определен на $H(t)$,а потому определен на плотном множестве в $H_t(f)$. По известной альтернативе М. Г. Крейна [?] реализуются только две возможности:
1) $H_t(f) = L^2_f$ и функционал l_z неограничен на $H_t(f)$
или
2) $H_t(f) \neq L^2_f$, функционал l_z ограничен на $H_t(f)$, причем

$$H_t(f) = H_t \cap L^2_f.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(u)}{1+u^2}\,du > -\infty. \tag{2.4}$$

Обозначим $\tilde{\varphi}$-функцию,гармонически сопряженную с φ,

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{x-u}{(x-u)^2+y^2}\varphi(u)\,du,\ z = x+iy, y \geq 0 \tag{2.5}$$

если $\varphi \in L^p, 1 \leq p < \infty$, и соотношением, если $\varphi \in L^\infty$

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{R}^1} \left[\frac{x-u}{(x-u)^2+y^2} + \frac{u}{1+u^2}\right]\varphi(u)\,du,\ z = x+iy, \tag{2.6}$$

если $\varphi \in L^\infty$ (см. [7]).

При условиие (2.4) $H_t(f) \neq L^2_f$ (см. [7]), а потому функционал l_z ограничен на $H_t(f)$ и, следовательно, существует воспроизводящее ядро $G^f_t(u,v)$ на $H_t(f)$:

$$\Big(\varphi, G^f_t(u,\cdot)\Big)_f = \varphi(u),\ \varphi \in H_t(f).$$

Ясно, что

$$G^f_t(u,u) = ||G_t(u,\cdot)||_f$$

и для $\varphi \in H_t(f)$

$$|\varphi(z)|^2 \leq ||\varphi||^2_f G^f_t(z,z).$$

Поскольку для функции $\varphi(v) = \Big[G^f_t(u,u)\Big]^{-1} G^f_t(u,v)$ мы имеем

$$\varphi(u) = 1,\ ||\varphi||^2_f = \Big[G^f_t(u,u)\Big]^{-1},$$

то получаем

$$G_t^f(u,u) = \sup_{\varphi:\varphi\in H_t(f), |\varphi(u)|=1} \frac{1}{||\varphi||_f^2} = \left[\inf_{\varphi:\varphi\in H_t(f), |\varphi(u)|=1} ||\varphi||_f^2\right]^{-1}.$$

Здесь и далее мы обозначаем $(\cdot,\cdot)_f$, $||\cdot||_f$ скалярное произведение и норму в L_f^2. Поэтому,

Лемма 2.1. *Если* $\underline{f}(v) \le f(v) \le \overline{f}(u)$ *(почти всюду), то*

$$G_t^{\overline{f}}(u,u) \le G_t^f(u,u) \le G_t^{\underline{f}}(u,u) \text{ для всех } u. \tag{2.5}$$

Хорошо известно, что

$$G_t(u,v) = \frac{\sin t(u-v)}{\pi(u-v)}, \text{ где } G_t(u,v) = G_t^{\mathbf{1}}(u,v).$$

Теперь предположим, что f и g неотрицательные функции и $f = hg$.

Лемма 2.2..

$$G_t^g(u,u)\left\{\frac{1}{G_t^g(u,u)}\int |G_t^g(u,v)|^2\,h(v)g(v)\,dv\right\}^{-1} \le G_t^f(u,u) \le$$

$$\le G_t^g(u,u)\left\{\frac{1}{G_t^g(u,u)}\int |G_t^g(u,v)|^2\,\frac{1}{h(v)}g(v)\,dv\right\}$$

Доказательство. Левое неравенство. Для фиксированного u возьмем функцию

$$\varphi(v) = \frac{1}{G_t^g(u,u)}G_t^g(u,v).$$

Если $\varphi \notin L_f^2$ левое неравенство тривиально. Пусть $\varphi \in L_f^2$ и поэтому $\varphi \in H_t(f)$. Так как $\varphi(u) = 1$, получаем

$$1 = |\varphi(u)|^2 \le \frac{1}{[G_t^g(u,u)]^2}\int |G_t^g(u,v)|^2\,h(v)g(v)\,dv \times G_t^f(u,u).$$

Правое неравенство. Для фиксированного u возьмем функцию

$$\varphi(v) = \frac{1}{h(v)}G_t^g(u,v).$$

Если $\varphi \notin L^2_f$ правое неравенство тривиально. Пусть $\varphi \in L^2_f$. Так как

$$(\psi, \varphi)_f = \psi(u), \; \psi \in H_t(f) \cap H_t(g),$$

то

$$P_t^f \varphi = G_t(u, \cdot),$$

где P_t^f ортопроектор в L^2_f на $H_t(f)$. Поэтому

$$G_t^f(u,u) = ||G_t(u,\cdot)||_f^2 \le ||\varphi||_f^2 =$$

$$G_t^g(u,u)\left\{\frac{1}{G_t^g(u,u)}\int |G_t^g(u,v)|^2 \frac{1}{h(v)} g(v)\, dv\right\}.$$

В случае, когда $g(u) \equiv 1$ получаем

Лемма 2.3.

$$\frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{\sin^2 t(u-v)}{t\pi \sin^2(u-v)} h(v) g(v)\, dv\right\}^{-1} \le G_t^f(u,u) \le$$

$$\le \frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{\sin^2 t(u-v)}{t\pi \sin^2(u-v)} \frac{1}{h(v)} g(v)\, dv\right\}$$

Следует заметить, что ядро $\mathcal{K}_t(u,v)$,

$$\mathcal{K}_t(u,v) = \frac{1}{G_t^g(u,u)} \left|G_t^g(u,v)\right|^2,$$

удовлетворяет условию

$$\int \mathcal{K}_t(u,v) g(v)\, dv = 1.$$

Поэтому

$$\tau_t(u) = \left\{\int \mathcal{K}_t(u,v) \frac{1}{h(v)} g(v)\, dv\right\} \times \left\{\int \mathcal{K}_t(u,v) h(v) g(v)\, dv\right\} \ge 1.$$

3. Классы A_p

Неотрицательная локально интегрируемая функция w лежит в классе A_p $(p \ge 1)$,если (см. [6, 7])

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I w(u)\, du \cdot \left[\frac{1}{|I|}\int_I [w(u)]^{-q/p}\, du\right]^{p/q} = C(p,w) < \infty, \quad (3.1)$$

где супремум берется по всем интервалам I, $|I|$-длина I, $1/p + 1/q = 1$.

Неотрицательная локально интегрируемая функция w лежит в пространстве $A_p\,(p \geq 1)$, в единственном случае, когда (см. [7]) для любой неотрицательной функции f

$$(f_I)^p \leq K(p,w)\frac{1}{W(I)}\int\limits_I f^p(u)w(u)\,du, \tag{3.2}$$

где

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(u)\,du,\ W(I) = \int\limits_I w(u)\,du.$$

В (3.2) в качестве $K(p,w)$ можно взять $C(p,w)$ из (3.1).

Для функции w из $A_p\,(p \geq 1)$ верно (см. [6, 7]) обращенное неравенство Иенсена

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(u)\,du \leq C(p,w)\exp\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I \ln\, w(u)\,du\right\}$$

и, стало быть, для любого $r > 1$ верно обращенное неравенство Гёльдера

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(u)\,du \leq C(p,w)\left[\frac{1}{|I|}\int\limits_I [w(u)]^{1/r}\,du\right]^r. \tag{3.3}$$

Поскольку (см. [6, 7]) для некоторого $q = q(w) > 1$ функция $w^q \in A_p$, если $w \in A_p$, то для достаточно малого $q > 1$

$$\left[\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^q(u)\,du\right]^{1/q} \leq 2C(p,w)\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(u)\,du. \tag{3.4}$$

Пусть φ неотрицательная функция, ψ – наименьшая четная монотонно убывающая на $\mathbb{R}^1_+$ мажоранта для φ:

$$\psi(u) = \sup_{|v|\geq|u|}|\varphi(v)|.$$

Предположим, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1}\varphi(u)\,du = 1, \quad \int\limits_{\mathbf{R}^1}\psi(u)\,du < \infty. \tag{3.4}$$

Обозначим $\varphi * h$-свертку функций φ и h. Определим оператор T_ε соотношением $T_\varepsilon h = \varphi_\varepsilon * h$, где $\varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$. Имеет место следующая теорема (см. [6]).

Теорема 3.1. *Пусть функция $f \in A_p, p \geq 1$, а функция φ удовлетворяет условию* (3.4). *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} |T_\varepsilon h(u)|^p f(u)\, du < C_p(f) \int\limits_{\mathbf{R}^1} |h(u)|^p f(u)\, du. \tag{3.5}$$

Для неотрицательной функции f обозначим

$$F(E) = \int\limits_E f(u)\, du, \; G(E) = \int\limits_E \frac{1}{f(u)}\, du. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Пусть $f \in A_2$, тогда существует такие константы $C_*(f)$ и $1 < \alpha < 2$, что для любых конечных интервалов $E \subset I$*

$$F(I) \leq C_*(f) \left(\frac{|I|}{|E|}\right)^\alpha F(E), \; G(I) \leq C_*(f) \left(\frac{|I|}{|E|}\right)^\alpha G(E). \tag{3.7}$$

При этом $C_*(f) = C_*(f_u)$ для любого $u \in \mathbb{R}^1$, где $f_u(v) = f(v-u)$.

Доказательство. Как известно (см. [6, 7]), если $f \in A_2$, то при некоторых $C_f, 1 > \beta > 0$ для любых интервалов $E \in I$

$$\frac{G(E)}{G(I)} \leq C_f \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^\beta. \tag{3.8}$$

При этом $C_f = C_{f_u}$. Отсюда следует первое из неравенств, если учесть, что

$$G(I) \leq C(2,f)\frac{1}{F(I)}|I|^2, \; G(E) > \frac{1}{F(E)}|E|^2, \tag{3.9}$$

и очевидное соотношение $C(2,f) = C(2,f_u)$ для любого $u \in \mathbb{R}^1$. Второе доказывается аналогично.

Рассмотрим ядро Пуассона $(y > 0)$

$$P_y(u-v) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(u-v)^2 + y^2}.$$

Поскольку $P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1+y_2}$, то оператор A_y, определенный соотношением

$$[A_y h](u) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)h(v)\,dv,$$

удовлетворяет условию $A_{y_1+y_2} = A_{y_1}A_{y_2}$.

Заметим, что

$$\frac{1}{t\pi}\frac{sin^2 tx}{x^2} \le \frac{2}{\pi}\frac{1/t}{x^2+1/t^2}.$$

Свяжем с неотрицательной функцией f функцию

$$F(y) = \int\limits_{[-y,y]} f(x)\,dx,\ y \ge 0.$$

Лемма 3.2. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{t}{\pi(x^2+t^2)} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^\infty \frac{tx}{\pi(x^2+t^2)^2}F(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{t}\int\limits_o^\infty \frac{x}{\pi(x^2+1)^2}F(tx)\,dx. \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть для $t > 0$

$$q_t(x) = \frac{t|x|}{\pi(x^2+t^2)^2}. \tag{3.11}$$

Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{\{|y|>|x|\}} q_t(y)\,dy = \int\limits_{|x|}^\infty \frac{2ty}{\pi(y^2+t^2)^2}\,dy = P_t(x),$$

а потому

$$2\int\limits_0^\infty q_t(x)F(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^1} q_t(x)F(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^1}\int\limits_{\mathbf{R}^1} q_t(x)\mathbf{1}_{\{|x|>|y|\}}f(y)\,dxdy =$$

$$\int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{|x|>|y|} q_t(x)\,dx\right]f(y)dy=\int_{\mathbf{R}^1}P_t(y)f(y)\,dx.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{t^2}\int_0^\infty \frac{x}{\pi(x^2+1)^2}F(tx)\,dx=2\int_0^\infty \frac{tx}{\pi(x^2+t^2)^2}F(x)\,dx=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^1}\frac{t}{\pi(x^2+t^2)}f(x)\,dx.$$

Нам понадобится также другой вариант леммы 3.2. Свяжем с неотрицательной функцией f и точкой $u\in\mathbb{R}^1$ функцию

$$F(y,u)=\int_{[-y,y]} f(u-x)\,dx,\ y\geq 0.$$

Лемма 3.2*. *Имеет место равенство*

$$\int_{\mathbf{R}^1}\frac{t}{\pi\left((x-u)^2+t^2\right)}f(x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^1}\frac{t}{\pi\left(x^2+t^2\right)}f(u-x)\,dx=$$

$$2\int_0^\infty \frac{tx}{\pi(x^2+t^2)^2}F(x,u)\,dx=\frac{2}{t}\int_o^\infty \frac{x}{\pi(x^2+1)^2}F(tx,u)\,dx$$

Лемма 3.2 *следует из леммы* 3.1.

Лемма. 3.3. *Пусть* $f\in A_2$, *тогда*

$$\sup_{y>0,u\in\mathbf{R}^1}\int_{\mathbf{R}^1}P_y(u-v)f(v)\,dv\times\int_{\mathbf{R}^1}P_y(u-v)\frac{1}{f(v)}\,dv=K(f)<\infty. \quad (3.12)$$

Доказательство. Достаточно оценить величину

$$C(f)=\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}^1}P_y(v)f(v)\,dv\times\int_{\mathbf{R}^1}P_y(v)\frac{1}{f(v)}\,dv.$$

Если при этом окажется, что $C(f) < K_*(f)$ и $K_*(f) = K_*(f_u), u \in \mathbb{R}^1$, где $f_u(v) = f(v-u)$, то неравенство $K(f) < \infty$ станет следствием неравенства $C(f) < \infty$, поскольку

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)f(v)\,dv \times \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)\frac{1}{f(v)}\,dv =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(v)f_u(v)\,dv \times \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(v)\frac{1}{f_u(v)}\,dv.$$

Из леммы 3.2 получаем

$$C(f) = 2\sup_{y>0}\frac{1}{y^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{s}{\pi(s^2+1)^2}F(ys)\frac{t}{\pi(t^2+1)^2}G(yt)\,dsdt,$$

где

$$G(t) = \int\limits_{[-t,t]} \frac{1}{f(u)}\,du.$$

По лемме 3.1 при некотором $\alpha < 2$

$$\begin{aligned} F(ys)G(yt) &< F(y)G(y), &&\text{если} \quad t,s \le 1;\\ F(ys)G(yt) &< C_*(f)F(y)G(y)t^\alpha, &&\text{если} \quad s\le 1, t>1;\\ F(ys)G(yt) &< C_*(f)F(y)G(y)s^\alpha, &&\text{если} \quad t\le 1, s>1;\\ F(ys)G(yt) &< C_*^2(f)F(y)G(y)(st)^\alpha, &&\text{если} \quad s,t>1. \end{aligned}$$

Поэтому при $C^*(f) = 1 + C_*(f) + C_*^2(f)$

$$F(ys)G(yt) \le C^*(f)F(ys)G(yt)z(t,s),$$

где

$$z(t,s) = 1 + t^\alpha + s^\alpha + (ts)^\alpha$$

Заметим, что, если $f \in A_2$,то

$$F(y)G(y) \le 4C(2,f)y^2.$$

Поэтому при $K(f) = 4C(2,f)C^*(f)$ получаем

$$F(ys)G(yt) \le K_1(f)y^2z(t,s).$$

Отсюда,

$$C(f) \le 2K_1(f)J = K_*(f),$$

где

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s}{\pi(s^2+1)^2} \frac{t}{\pi(t^2+1)^2} z(t,s)\, ds dt < \infty.$$

Наконец, заметим, что $K_*(f) = K_*(f_u)$ для любого u. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3.4. *Пусть* $f \in A_2$, *тогда*

$$\ln \int_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) f(v)\, dv \le K(f) \int_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \ln\, f(v)\, dv.$$

Доказательство. По лемме 3.3

$$\left[\int_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) f(v)\, dv \exp\{- \int_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \ln\, f(v)\, dv\} \right] \times$$

$$\times \left[\int_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \frac{1}{f(v)}\, dv \exp\{ \int_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \ln\, f(v)\, dv\} \right] \le K(f)$$

По неравенству Иенсена каждый из сомножителей ≥ 1 и стало быть не больше $K(f) \ge 1$. Отсюда следует утверждение леммы.

4. Пространство БМО

Локально интегрируемая функция φ лежит в пространстве БМО (см. подробнее [6, 7]), если

$$||\varphi||_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(t) - \varphi_I|\, dt < \infty. \tag{4.1}$$

Положим

$$\varphi^\sharp(u) = \sup_{I: u \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(v) - \varphi_I|\, dv. \tag{4.2}$$

Как известно ([6]),

$$||\varphi^\sharp||_{L^\infty} = ||\varphi^\sharp||_*, \tag{4.3}$$

$$c_p ||\varphi^\sharp||_{L^p} \le ||\varphi||_{L^p} \le C_p ||\varphi^\sharp||_{L^p}. \tag{4.4}$$

5. Отношение правдоподобия

Пусть $\mathbf{x}[\cdot]$ обобщенный гауссовский процесс со спектральной плотностью f, $\mathcal{F}$ наименьшая $\sigma-$алгебра, относительно которой измеримы величины $\mathbf{x}[\varphi]$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{F}_t$, $t>0$, $\sigma-$алгебра, порожденная величинами $\mathbf{x}[\varphi]$, $(\operatorname{supp})\,\varphi \in [-t,t]$. Обозначим $\mathcal{P}(f)$ меру на $\mathcal{F}$, индуцированную процессом $\mathbf{x}$. Пусть $\mathcal{P}_t(f)$– сужение меры $\mathcal{P}(f)$ на $\mathcal{F}_t$.

Предположим, что неотрицательные функции f и g выбраны так, что гауссовские меры $\mathcal{P}_t(f)$ и $\mathcal{P}_t(g)$ взаимно абсолютно непрерывны, и обозначим

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f)}{d\mathcal{P}_t(g)}.$$

Напишем удобное нам представление для величины $\mathcal{D}_t(f,g)$ (см. [4, 14])

$$\mathcal{D}_t(f,g) = -\frac{1}{2} d_t(f,g) - \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_t^f(u,v) - G_t^g(u,v) \right\} \Phi(du,dv). \tag{5.1}$$

Здесь

$$d_t(f,g) = (\operatorname{tr}) \left(\ln A_t(f,g) - I + A_t(f,g) \right), \tag{5.2}$$

$A_t = A_t(f,g)$ – неотрицательный оператор в $H_t(g)$, определенный соотношением

$$(\cdot,\cdot)_f = (A_t \cdot, \cdot)_g \,.$$

Как легко понять, $A_t(f,g) = P_t(g)\mathbf{h}P_t(g)$, где функция h определена соотношением $f = hg$, $P_t(g)$ – ортопроектор в L_g^2 на подпространство $H_t(g)$, а $\mathbf{h}$ – оператор умножения на функцию h. В дальнейшем будем писать P_t вместо $P_t(\mathbf{1})$.

Мы будем использовать также другое представление для величины $\mathcal{D}_t(f,g)$. Пусть $\{x_j, j=1,2,...\}$ такой ортонормированный базис в $X_{[-t,t]}$ (в метрике пространства $L^2(d\mathcal{P}(g))$), что

$$\int x_i \overline{x_j}\, d\mathcal{P}(f) = \sigma_j^2 \delta_{i,j}, \ \sigma_j > 0.$$

Тогда (см. [4])

$$\mathcal{D}_t(f,g) = -\frac{1}{2} d_t(f,g) - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x_j^2}{\sigma_j^2} - \frac{1}{\sigma_j^2} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^2 - 1 \right) \right\} =$$

$$-\frac{1}{2}d_t(f,g)-\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(x_j^2-1\right)\left(\frac{1}{\sigma_j^2}-1\right)\right\} \tag{5.3}$$

Заметим, что величины $\sigma_j = \sigma_j(t)$ зависят от t. Иногда для простоты мы будем опускать значек t. Основной результат работы состоит в следующих теоремах

Теорема 1. *Пусть функция $g \in A_2$, функция $f = f_t = hg$, а функция $h(u) = h_t(u)$ допускает представление*

$$h_t(u) = \exp\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left[h^0(u) + r_t(u)\right]\}, \tag{5.4}$$

где $h^0, r_t \in \mathcal{L}$, причем $||r_t||_{\mathcal{L}} \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \xi_t - 1/2\sigma^2 + R_t, \tag{5.5}$$

$\xi_t \in N(0, sigma^2)$,

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h^0(u)|^2\, du,$$

а величина R_t стремится к нулю (по верооятности), когда $t \to \infty$.

Предположим теперь, что мы имеем параметрическое семейства спектральных плотностей

$$f(u) \in \{f: \ f(u) = f(\theta; u), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\}. \tag{$*$}$$

гладко зависящих от θ. Положим

$$\mathcal{D}_t(\theta; h) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f(\theta;\cdot)}{d\mathcal{P}_t(f(\theta+\frac{1}{\sqrt{t}}h;\cdot))}.$$

Здесь слова "гладко зависящие" означают, что функция $\psi(\theta;\cdot) = \ln f(\theta;\cdot)$ как функция из Θ в $\mathcal{L}$ дифференцируема в метрике пространства $\mathcal{L}$. Последнее означает, что существует такая вектор-функция $D(u) = D(\theta_0; u)$ (из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$)с координатами из пространства $\mathcal{L}$, что

$$\psi(\theta;\cdot) - \psi(\theta_0;\cdot) = (D, \theta-\theta_0)_{\mathbf{R}^n} + r(\theta_0,\theta;u),$$

где

$$||r(\theta_0,\theta;\cdot)||_{\mathcal{L}} = o(||\theta-\theta_0||_{\mathbf{R}^n}),$$

$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{R}^n}$, $||\cdot||_{\mathbf{R}^n}$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$.

Положим

$$\sigma(\theta,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\,(D(\theta;u),h)\,|^2\,du.$$

Теорема 2. *Пусть семейство (*) дифференцируемо во внутренней точке θ в метрике пространства $\mathcal{L}$. Тогда*

$$\mathcal{D}_t(f,g)=\xi_t-1/2\sigma^2+R_t, \tag{5.6}$$

$\xi_t\in N(0,sigma^2(theta,h))$,*а величина R_t стремится к нулю (по верооятности), когда $t\to\infty$.*

Очевидно, теорема 2 следует из теоремы 1.

Заметим, что (как это следует из леммы 4.1, примененной сначала к функциям $g,\varphi=\ln h$, а потом к функциям $gh,\varphi=-\ln h$) в условиях теоремы 1 при $t\to\infty$

$$\inf_j\sigma_j(t)\to 1,\ \sup_j\sigma_j(t)\to 1.$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что при $t\to\infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma_j^2}-1\right)^2\to\sigma^2. \tag{5.7}$$

6. Доказательство теоремы 1

Всюду в этом пункте мы будем предполагать, что функция $g\in A_2$, функция $f=f_t=hg$, а функция $h(u)=h_t(u)$ допускает представление

$$h_t(u)=\exp\{\frac{1}{\sqrt{t}}\,[h_*(u)+r_t(u)]\}, \tag{6.1}$$

где $h_*,r_t\in\mathcal{L}$, причем $||r_t||_{\mathcal{L}}\to 0$ при $t\to\infty$. Поскольку нас интересуют только “большие” t, мы можем считать, что функции $f=f_t$ допускают представление

$$f=V+\overline{U},\ \text{где}\ ||U||_{L^\infty}\le C^1<\infty, ||V||_{L^\infty}\le C^2<\pi/2 \tag{6.2}$$

Сначала мы докажем, что

Лемма 6.1. *В условиях* (6.1), (6.2) *для любого* $0 < \delta < 1$ *и достаточно больших* t

$$(1-\delta)||\psi||_f \le ||\psi||_g(1+\delta)||\psi||_f,\ \varphi \in H_t(g). \tag{6.3}$$

Потом установим, что

Лемма 6.2. *В условиях* (6.1), (6.2)

$$||A_t||_2^2 \to \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h_*(u)|^2\,du \tag{6.4}$$

где оператор $A_t = \mathbf{h} - I$.

Отсюда, как уже отмечалось, следует утверждение теоремы 1.

Доказательство леммы 6.1. Положим $\varphi = \ln h$. Прежде всего заметим, что по неравенству Иенсена

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{\varphi(v)\}|\psi(v)|^2 g(v)\,dv \ge \exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)|\psi(v)|^2 g(v)\,dv\right\}.$$

Поэтому достаточно доказать, что при некотором $r > 1$ для любого положительного δ и достаточно больших t

$$\sup_{\psi:\psi\in H_t(g),||\psi||_g=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)|^r|\psi(v)|^2 g(v)\,dv \le \delta. \tag{6.5}$$

Очевидно без потери общности можно предполагать в дальнейшем, что функция φ-неотрицательная Заметим, что по лемме 2.3

$$||\psi(u)||^2 \le ||\psi||_g^2 G_t^g(u,u) \le \frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{\sin^2 t(u-v)}{t\pi\sin^2(u-v)}\frac{1}{g(v)}\,dv\right\} \le$$

$$\le \frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{2}{\pi}\frac{1/t}{(u-v)^2+1/t^2}\frac{1}{g(v)}\,dv\right\}.$$

Отсюда,

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(v)|^2[\varphi(v)]^r g(v)\,dv \le$$

$$\leq \frac{2t}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/t}{(u-v)^2 + 1/t^2} [\varphi(v)]^r \frac{g(v)}{g(u)} \, dudv. \tag{6.6}$$

Напомним, что для $y > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{2y}{(u-v)^2 + 4y^2} h_1(v) h_2(u) \, dudv =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} h_1(v) \, dv \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} h_2(v) \, dv \right\} du.$$

Возьмем $h_1 = \varphi^r g, h_2 = 1/g$ и воспользуемся неравенством Гельдера (1/пЂ1/чı1)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} |\varphi(v)|^r g(v) \, dv \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} [\varphi(v)]^{rp} \, dv \right]^{1/p} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} g^q(v) \, dv \right]^{1/q}. \tag{6.7}$$

Получаем

$$J \leq \frac{2t}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_t(u) b_t(u) \, du, \tag{6.8}$$

где

$$a_t(u) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2 + (1/2t)^2} [\varphi(v)]^{rp} \, dv \right]^{1/p},$$

$$b_t(u) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2 + (1/2t)^2} g^q(v) \, dv \right]^{1/q} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2 + (1/2t)^2} \frac{1}{g(v)}\, dv.$$

Если p достаточно велико, то $g^q \in A_2$ и удовлетворяет (4.3) (см. подробнее в [6, 7]),а потому (как это следует из лемм 3.3, 3.4)

$$\sup_{t>0, u\in \mathbf{R}^1} b_t(u) = L(c_1, c_2) \le \infty.$$

Поэтому достаточно доказать, что для любого δ

$$\sup_{t>t_0} \int_{-\infty}^{\infty} a_t(u)\, du \le K(c_3)\delta, \tag{6.9}$$

если t_0 достаточно велико.

В условиях леммы (см. [6, 7])

$$\varphi = \varphi_* + \overline{\varphi^*}, \text{ где } ||\varphi_*||_{L^\infty} \le c_4 \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad ||\varphi^*||_{L^\infty} \le c_4 \frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{6.10}$$

Для функции $g \in L^2_{\mathrm{loc}}$ положим

$$g^\sharp(u) = \sup_{y>0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + (y)^2} |f(v) - f(z)|^2\, dv \right\}^{1/2}, \; z = u + iy,$$

где при $(y > 0)$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + (y)^2} g(v)\, dv.$$

Как известно, [7], $c^1||g||_* \le ||g^\sharp||_{L^\infty} \le c^2||g||_*$,

$$\sup_{y>0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + (y)^2} |g(v) - g(z)|^p\, dv \right\}^{1/p} \le c(p) g^\sharp(u), \; z = u+iy, \tag{6.11}$$

если $g \in BMO$, и при $1 < p < \infty$

$$||g||_{L^p} \le C^1(p)||g^\sharp||_{L^p} \le C^2(p)||g||_{L^p}. \tag{6.12}$$

Заметим, что

$$a_t^{1/r}(u) \le c(p)\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1/2t}{(u-v)^2+(1/2t)^2}[\varphi(v)-\varphi(u+iy)]^{rp}\,dv\right]^{1/rp}+\right.$$

$$\left.+\varphi(u+i/2t)\right\} \le c(p)\varphi^\sharp(u)+\varphi^\star(u),\ \varphi^\star(u)=\sup_{y>0}\varphi(u+iy). \qquad (6.13)$$

Как известно, при $1<p<\infty$,

$$||\varphi^\star||_{L^p} \le K(p)||\varphi||_{L^p}.$$

Отсюда, и из (4.13) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_t(u)\,du \le C(p,r)||\varphi||^r_{L^{rp}}.$$

Для доказательства (4.10) остается заметить, что, если выполнено (4.11), то

$$||\varphi||^{rp}_{L^{rp}} \le c(p,r)t^{-\frac{rp}{2}}.$$

Поэтому нужная оценка получается при $r>2$.

Доказательство леммы 6.2. Прежде всего заметим, что в условияю леммы (подробнее см. [14]) для любого положительного δ и достаточно больших t

$$(1-\delta)||A_t||_2^2 \le (\mathrm{tr})P_t(g)|h-1|^2P_t(g). \qquad (6.14)$$

Далее,

$$(\mathrm{tr})P_t(g)|h-1|^2P_t(g)=\int_{\infty}^{\infty} G_t^g(u,u)(h(u)-1)^2g(u)\,du. \qquad (6.15)$$

Исследование асимптотического поведения последнего интеграла проводится так же, кака это сделано в доказательстве леммы 1. В результате получаем

$$(\mathrm{tr})P_t(g)|h-1|^2P_t(g)\to\pi\int_{\infty}^{\infty}(h_*)^2\,du.$$

Здесь следует напомнить, что в условиях леммы для любого положительного δ и достаточно больших t

$$(1-\delta)G_t(u,u) \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1/t}{\pi\left((u-v)^2+1/t^2\right)g(u)}\,du \le (1+\delta)G_t(u,u). \tag{6.14}$$

Литература

1. J. L. Doob, *Stochastic Processes.* Wiley (1990).
2. U. Grenander, M. Rozenblatt, *Statistical analyses of stationary time series. N.-J.* (1956).
3. И. Гохберг, М. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* Наука, Москва (1965).
4. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, Москва (1963).
5. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, Москва (1974).
6. M. Elias Stein, *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscilatory integrals.* Princeton University Press (1993).
7. Garnett, B. John, *Bounded analytic functions.* Pure and Applied Mathematics, **96**, New York etc.: Academic Press (1981).
8. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 227–251.
9. K. O. Dzhaparidze, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series.* Springer-Verlag, New-York (1986).
10. E. Basor, *Asymptotic Formulas for Toeplitz Determinants.* Trans. Amer. Math. Soc. ,**239** (1978), 33–65.
11. M. Rosenblatt (1962), *Asymptotic Behvior of Eigenvalues of Toeplitz Forms.* Journal Math., Mech., **11**(6) (1962), 941–950.
12. F. Avram, *On Bilinear Forms in Gaussian Random Variables and Toeplitz Matrices.* Probab. Theori Relat. Fields, **79** (1988), 37–45.
13. В. Н. Солев, *Точность метода наименьших квадратов в задаче оценивания в стационарном шуме.* Зап. Научных Семин. ПОМИ, **232** (1996).
14. В. Н. Солев, *Гауссовские f-регулярные процессы и асимптотическое поведение функции правдоподобия.* Зап. Научных Семин. ПОМИ, **119** (1982), 203–239.

Solev V. N., Zerbet A. Conditions of the local asymptotic normality for Gaussian stationary random processes.

Let $\mathbf{x}[\cdot]$ be a stationary Gaussian process with zero mean and spectral density f, $\mathcal{F}$ be the $\sigma-$algebra, induced by random variables $\mathbf{x}[\varphi]$, $\varphi \in D(R^1)$, $\mathcal{F}_t$, $t > 0$, be the $\sigma-$algebra, induced by random variables $\mathbf{x}[\varphi]$, supp $\varphi \in [-t,t]$. We denote by $\mathcal{P}(f)$ the Gaussian measure on $\mathcal{F}$,

generated by $\mathbf{x}$. Let $\mathcal{P}_t(f)$ be the restriction of $\mathcal{P}(f)$ on $\mathcal{F}_t$. Suppose non-negative functions f and g are chosen by such a way that measures $\mathcal{P}_t(f)$ and $\mathcal{P}_t(g)$ are absolutely continuous and put

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f)}{d\mathcal{P}_t(g)}.$$

For a fixed $g(u)$ and $f(u) = f_t(u)$ close in some sense to $g(u)$ the asymptotic normality of $\mathcal{D}_t(f,g)$ is proved under some regularity conditions.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 14 июня 2001 г.