И. П. Рязанцева, Об уравнениях с возмущенными аккретивными отображениями, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, номер 7, 61–67

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.98

И.П. РЯЗАНЦЕВА

ОБ УРАВНЕНИЯХ С ВОЗМУЩЕННЫМИ АККРЕТИВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

1. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, X^* — его сопряженное, X и X^* строго выпуклы, $\langle y, x\rangle$ — значение линейного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, $2^X = \{Q/Q$ — непустое подмножество из $X\}$, $U : X \to X^*$ — дуальное отображение в X с некоторой масштабной функцией $\mu(t)$ (см. [1], с. 315).

Определение 1 (см., напр., [1], с. 316). Оператор $A : X \to 2^X$ называется аккретивным, если для любых $x_1 \in D(A)$, $x_2 \in D(A)$ выполняется неравенство

$$\langle U(x_1 - x_2),\ y_1 - y_2\rangle \geq 0 \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.$$

Определение 2 (см., напр., [2]). Аккретивный оператор $A : X \to 2^X$ называется максимальным аккретивным, если его график не является правильной частью графика никакого другого аккретивного оператора, действующего из X в X.

Определение 3. Оператор $A : X \to 2^X$ называется псевдоаккретивным, если

а) множество его значений в каждой точке $x \in X$ есть выпуклое и замкнутое в X множество;

б) из условий $x_n \rightharpoonup x$, $\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle \leq 0$, $y_n \in Ax_n$ следует, что для каждого элемента $z \in X$ найдется элемент $y(z) \in Ax$ такой, что $\underline{\lim}\langle U(x_n - z),\ y_n\rangle \geq \langle U(x - z),\ y\rangle$.

Определение 4. Будем говорить, что отображение $A : X \to 2^X$ является отображением типа (A), если

1) множество Ax непусто, ограничено, выпукло и замкнуто при любом $x \in X$;
2) из условий $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$, $y_n \in Ax_n$,

$$\overline{\lim}\langle Ux_n, y_n\rangle \leq \langle Ux, y\rangle \tag{1}$$

следует, что $y \in Ax$.

Определение 5. Если в определении 4 неравенство (1) заменить на

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle \leq 0, \tag{2}$$

то оператор A будем называть оператором типа (A$'$).

Если $X = H$ — гильбертово пространство, $\mu(t) \equiv t$, т.е. $U = E$ — тождественный оператор, то класс аккретивных совпадает с классом монотонных отображений (см., напр., [1], с. 22), класс псевдоаккретивных — с классом псевдомонотонных (см. [3], с. 96), класс операторов типа (A) и (A$'$) — с оператором типа (M) ([3], с. 15; [4], с. 184).

Определение 6. Оператор $A : X \to 2^X$ называется коэрцитивным, если $\forall y \in Ax$ имеем $\langle Ux, y\rangle/\|x\| \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$.

2. Теоремы существования решений уравнений с аккретивными операторами можно найти, например, в [1], [5]. Разрешимость уравнений с m-аккретивными отображениями при компактных возмущениях исследовалась многочисленными авторами (см., напр., [6] и библиографию к ней). Целью данной статьи является получение достаточных условий разрешимости аккретивных уравнений с возмущениями, не удовлетворяющими требованию компактности. Предварительно получим некоторые утверждения.

Лемма 1. *Если $A : X \to 2^X$, $B : X \to 2^X$ — псевдоаккретивные отображения, то отображение $A + B$ также псевдоаккретивно.*

Для доказательства этого утверждения следует фактически повторить рассуждения ([3], с.97).

Отметим, что классы отображений типа (A) и (A$'$) не являются замкнутыми относительно операции сложения (сравни с [3], с. 152).

Лемма 2. *Если оператор $A : X \to 2^X$ есть оператор типа* (A), *то $A + \alpha E$, $\alpha > 0$, также является оператором типа* (A).

Доказательство. Требование 1) определения 4 очевидно. Пусть $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$, $y_n \in (A + \alpha E)x_n$, и верно (1). Покажем, что $y \in (A + \alpha E)x$. Действительно, т. к. $y_n = u_n + \alpha x_n$, где $u_n \in Ax_n$, то $y_n \rightharpoonup u + \alpha x$, $u_n \rightharpoonup u$ а значит, $y = u + \alpha x$. Далее, из (1) имеем

$$\overline{\lim}\langle Ux_n, u_n\rangle + \alpha\,\overline{\lim}\langle Ux_n, x_n\rangle \leq \langle Ux, u\rangle + \alpha\langle Ux, x\rangle. \tag{3}$$

Свойства нормы и дуального отображения в банаховом пространстве дают соотношения

$$\langle Ux, x\rangle = \mu(\|x\|)\|x\| \leq \underline{\lim}\mu(\|x_n\|)\|x_n\| \leq \overline{\lim}\mu(\|x_n\|)\|x_x\| = \overline{\lim}\langle Ux_n, x_n\rangle,$$

т. е. $\overline{\lim}\langle Ux_n, x_n\rangle \geq \langle Ux, x\rangle$. Теперь из (3) следует, что $\overline{\lim}\langle Ux_n, u_n\rangle \leq \langle Ux, u\rangle$. Так как A есть оператор типа (A), то последнее неравенство обеспечивает включение: $u \in Ax$, а значит, $y = u + \alpha x \in (A + \alpha E)x$. $\square$

Лемма 3. *Если $A : X \to 2^X$ — оператор типа* (A$'$) *и дуальное отображение U слабо непрерывно, то оператор $A + \alpha E$ при любом $\alpha > 0$ принадлежит классу* (A$'$).

Доказательство. Здесь вместо неравенства (3) из (2) имеем (см. обозначения доказательства леммы 2):

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - x)\ u_n\rangle + \alpha\,\overline{\lim}\mu(\|x_n - x\|)\|x_n - x\| + \alpha\,\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ x\rangle \leq 0.$$

Так как $\overline{\lim}\mu(\|x_n - x\|)\|x_n - x\| \geq 0$, а $\langle U(x_n - x),\ x\rangle \to 0$, то $\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ u_n\rangle \leq 0$. Теперь нетрудно завершить доказательство леммы. $\square$

Определение 7 ([7], с. 81). Говорят, что оператор $A : X \to 2^X$ обладает (s)-свойством, если из $x_n \rightharpoonup x \in X$, $\langle U(x_n - x),\ y_n - y\rangle \to 0$, $y_n \in Ax_n$, $y \in Ax$ следует, что $x_n \to x$.

Лемма 4. *Если оператор $A : X \to 2^X$ является максимальным аккретивным, обладает (s)-свойством, $D(A) = X$, дуальное отображение U в X непрерывно и слабо непрерывно, то A — псевдоаккретивное отображение.*

Доказательство. Поскольку $D(A) = X$, то множество Ax непусто для любого $x \in X$. Замкнутость и выпуклость Ax следуют из максимальной аккретивности оператора A. Пусть $x_n \rightharpoonup x$, и

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle \leq 0, \quad y_n \in Ax_n. \tag{4}$$

Запишем условие аккретивности A: $\langle U(x_n - x),\ y_n - y\rangle \geq 0$, $y \in Ax$, т.е. $\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle \geq \langle U(x_n - x),\ y\rangle$. Так как U — слабо непрерывное отображение, то из последнего неравенства находим, что $\underline{\lim}\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle \geq 0$. Учитывая свойство (4) последовательности $\{x_n\}$, получаем: $\lim\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle = 0$, а значит, $\lim\langle U(x_n - x),\ y_n - y\rangle = 0$. Тогда (s)-свойство оператора

A обеспечивает сильную сходимость $x_n \to x$. Поскольку отображение A локально ограничено в любой точке $x \in X$ (см. [5], лемма 1), то $y_n \rightharpoonup \bar{y} \in X$ (для простоты записи обозначения для последовательности не меняем, далее мы всегда будем пользоваться этим упрощением). Переходя к пределу в неравенстве $\langle U(x_n - z),\ y_n - w\rangle \geq 0$, $\forall z \in D(A)$, $\forall w \in Az$ имеем $\langle U(x - z), \bar{y} - w\rangle \geq 0$. Свойство максимальной аккретивности A гарантирует теперь включение: $\bar{y} \in Ax$. Следовательно, $\lim\langle U(x_n - z),\ y_n\rangle = \langle U(x - z),\ \bar{y}\rangle$, $\bar{y} \in Ax$, что завершает доказательство леммы. □

Следствие 1. Если оператор U удовлетворяет условиям леммы 4, $A : X \to 2^X$ — максимальный аккретивный оператор, и $\langle U(x_1 - x_2),\ y_1 - y_2\rangle \geq \gamma_{R_0}(\|x_1 - x_2\|)$, где $\|x_i\| \leq R_0$, $y_i \in Ax_i$, $i = 1, 2$, $R_0 > 0$, $\gamma_{R_0}(t)$ $(t > 0)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma_{R_0}(0) = 0$, тогда A — псевдоаккретивное отображение.

Следствие 2. В условиях леммы 4 и следствия 1 A есть отображение типа (A′).

Следствие 3. Тождественный оператор в пространстве с непрерывным и слабо непрерывным дуальным отображением является псевдоаккретивным отображением типа (A′).

Пусть $R(Ax - f)$ — выпуклая замкнутая оболочка слабых пределов подпоследовательностей из $\{y_n - f\}$, где $y_n \in Ax_n$, $x_n \to x$, $x_n \in D(A)$, $\overline{A}$ — максимальное аккретивное расширение оператора A.

Лемма 5. *Пусть $A : X \to 2^X$ — аккретивный, а $C : X \to X$ — ограниченный однозначный псевдоаккретивный операторы, $D(A) = X$, U — непрерывное отображение. Тогда множества $R(Ax + Cx - f)$ и $\overline{A}x + Cx - f$ совпадают при любых $x \in X$ и $f \in X$.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$, тогда последовательность $\{y_n\}$ $(y_n \in Ax)$ ограничена в силу локальной ограниченности A, т.е. $y_n \rightharpoonup \bar{y} \in X$. Кроме того, в предположениях леммы можно убедиться в деминепрерывности оператора C (см. [1], с. 23; [4], с. 190). Значит, $Cx_n \rightharpoonup Cx$ и $\bar{y} + Cx - f \in R(Ax + Cx - f)$. Далее, используя непрерывность U и максимальную аккретивность $\overline{A}$, убеждаемся в том, что $\bar{y} \in \overline{A}x$, т.е. $\bar{y} + Cx - f \in \overline{A}x + Cx - f$. Теперь нетрудно видеть, что $R(Ax + Cx - f) \subset \overline{A}x + Cx - f$. Обратное включение доказывается практически теми же рассуждениями, что и в лемме 4 из [5]. □

Лемма 6. *Пусть $C : X \to 2^X$ — локально ограниченный оператор типа* (A) *или* (A′), *U — непрерывное отображение, тогда $Cx + \alpha x - g = R(Cx + \alpha x - g)$ при любых $\alpha > 0$, $g \in X$ и $x \in X$.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 5, установим лишь включение $R(Cx + \alpha x - g) \subset Cx + \alpha x - g$. Пусть $x_n \to x$, тогда $y_n \rightharpoonup \bar{y}$, $y_n \in Cx_n$, $y_n + \alpha x_n - g \rightharpoonup \bar{y} + \alpha x - g \in R(Cx + \alpha x - g)$. Очевидно, что $\lim\langle Ux_n, y_n\rangle = \langle Ux, \bar{y}\rangle$, $\lim\langle U(x_n - x),\ y_n\rangle = 0$. Поэтому из определений 3 и 4 имеем: $\bar{y} \in Cx$. Значит, $\bar{y} + \alpha x - g \in Cx + \alpha x - g$, что и обеспечивает справедливость доказываемого утверждения. □

Далее решения всех уравнений понимаем в смысле следующего определения (см. [8], [5]).

Определение 8. Элемент $x_0 \in X$ называется решением уравнения

$$Ax = f, \tag{5}$$

если $0 \in R(Ax_0 - f)$.

Теорема 1. *Пусть X и X^* — равномерно выпуклые банаховы пространства, дуальное отображение $U : X \to X^*$ слабо непрерывно, $A : X \to 2^X$ — аккретивный оператор, $D(A) = X$, $C : X \to X$ — ограниченное однозначное псевдоаккретивное отображение, существует число $r > 0$ такое, что*

$$\langle Ux,\ y + Cx - f\rangle \geq 0 \quad \forall y \in Ax, \quad \|x\| = r, \quad f \in X. \tag{6}$$

Тогда уравнение

$$Ax + Cx = f \tag{7}$$

имеет в X по крайней мере одно решение.

Доказательство. Пусть $P_n : X \to X_n$ — оператор проектирования на конечномерное подпространство X_n пространства X (т.е. не теряя общности, считаем X сепарабельным). Для простоты рассуждений предполагаем, что последовательность $\{X_n\}$, $n > 0$, предельно плотна в X. Из леммы 3 работы [5] следует существование решения $x_n \in X_n$ уравнения $P_n(Ax + Cx - f) = 0$, причем $\|x_n\| \le r$. Значит, найдется элемент $y^n \in \overline{A}x_n$ такой, что $P_n(y^n + Cx_n - f) = 0$ (см. лемму 5).

Так как C — ограниченный оператор, то $Cx_n \rightharpoonup \bar{g} \in X$. Ограниченность $\{y_n\}$ доказывается тем же приемом, что и в теореме 1 из [5]. Следовательно, $y^n \rightharpoonup \bar{y} \in X$. Кроме того, $x_n \rightharpoonup \bar{x} \in X$. Запишем условие аккретивности оператора A: $\langle U(x_n - u),\ y^n - v\rangle \ge 0$, $v \in \overline{A}u$, $u \in X$ или

$$\begin{aligned}\langle U(x_n - u),\ Cx_n\rangle \le \langle U(x_n - u),\ Cx_n + y^n - v\rangle = \langle U(x_n - u) - U(x_n - P_n u),\\ Cx_n + y^n - v\rangle + \langle U(x_n - P_n u),\ P_n(Cx_n + y^n - f)\rangle + \langle U(x_n - P_n u),\ f - v\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку оператор U равномерно непрерывен на любом ограниченном множестве пространства X, то $U(x_n - u) - U(x_n - P_n u) \to 0$. Теперь, используя лемму 22.4 из [1] и слабую непрерывность U, из (8) при $n \to \infty$ имеем неравенство

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - u),\ Cx_n\rangle \le \langle U(\bar{x} - u),\ f - v\rangle, \quad v \in \overline{A}u. \tag{9}$$

Отсюда при $u = \bar{x}$ получаем $\overline{\lim}\langle U(x_n - \bar{x}),\ Cx_n\rangle \le 0$. Тогда псевдоаккретивность C дает неравенство $\underline{\lim}\langle U(x_n - u),\ Cx_n\rangle \ge \langle U(\bar{x} - u),\ C\bar{x}\rangle$ $\forall u \in X$. Теперь с учетом (9) запишем цепочку неравенств

$$\langle U(\bar{x} - u),\ f - v\rangle \ge \overline{\lim}\langle U(x_n - u),\ Cx_n\rangle \ge \underline{\lim}\langle U(x_n - u),\ Cx_n\rangle \ge \langle U(\bar{x} - u),\ C\bar{x}\rangle, \tag{10}$$

т. е. $\langle U(\bar{x} - u),\ f - C\bar{x} - v\rangle \ge 0$ при всех $u \in X$, $v \in \overline{A}u$. Максимальная аккретивность оператора $\overline{A}$ и последнее неравенство гарантируют включение $f - C\bar{x} \in \overline{A}\bar{x}$. Значит, $f \in \overline{A}\bar{x} + C\bar{x}$, и лемма 5 позволяет сделать вывод о разрешимости уравнения (7). $\square$

Следствие 4. Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если требование (6) заменить коэрцитивностью оператора $\overline{A} + C$.

Следствие 5. Пусть пространства X и X^*, оператор U удовлетворяют условиям теоремы 1, $C : X \to X$ — ограниченный однозначный псевдоаккретивный коэрцитивный оператор, тогда $R(C) = X$.

Следствие 6. Пусть в условиях следствия 5 требование коэрцитивности C заменено свойством: $\langle Ux, Cx - f\rangle \ge 0$ при $\|x\| \ge r > 0$ для некоторого $f \in X$. Тогда уравнение

$$Cx + \alpha x = g \tag{11}$$

разрешимо при любых $g \in X$ и $\alpha \ge 0$.

Действительно, оператор E максимальный аккретивный и $\langle Ux, Cx + \alpha x\rangle \ge \|x\|[\alpha\|x\| - \|f\|] + \langle Ux, Cx - f\rangle$. Отсюда имеем коэрцитивность отображения $C + \alpha E$, и теорема 1 гарантирует теперь существование решения (11) при любом $g \in X$.

Замечание 1. Утверждения следствий 5 и 6 остаются справедливыми, если оператор C считать ограниченным (возможно, многозначным) типа (A) или (A$'$) (ср. с [4], с. 184). Дадим пояснения к доказательству разрешимости уравнения (11) в данных условиях. Пусть $x_n \in X_n(\|x_n\| \le r)$

есть решение уравнения $P_n(Cx + \alpha x - g = 0)$, т.е. $P_n(y^n + \alpha x_n - g) = 0$, $y^n \in Cx_n$ (см. лемму 6), $x_n \rightharpoonup \bar{x}$. Тогда $\langle Ux_n,\ y^n + \alpha x_n - g\rangle = 0$ или

$$\langle Ux_n, y^n\rangle = \langle Ux_n, g\rangle - \alpha\langle Ux_n, x_n\rangle. \tag{12}$$

Как и в ([4], с. 183), доказывается, что $y^n + \alpha x_n \rightharpoonup g$, т. е. $y^n \rightharpoonup g - \alpha\bar{x}$. Слабая полунепрерывность снизу нормы в банаховом пространстве позволяет из (12) получить соотношения

$$\overline{\lim}\langle Ux_n, y^n\rangle = \langle U\bar{x}, g\rangle - \alpha\,\underline{\lim}\langle Ux_n, x_n\rangle \le \langle U\bar{x}, g - \alpha\bar{x}\rangle. \tag{13}$$

Пусть C — оператор типа (A), тогда из (13) получаем доказываемое включение: $g - \alpha\bar{x} \in C\bar{x}$. Для отображения C типа (A$'$) это же включение выводится из очевидного неравенства

$$\langle U(x_n - \bar{x}),\ y^n\rangle \le \langle U(x_n - P_n\bar{x}),\ g - \alpha P_n\bar{x}\rangle + \langle U(x_n - \bar{x}) - U(x_n - P_n\bar{x}),\ y^n\rangle.$$

Замечание 2. Усиленно непрерывный оператор $C : X \to X$ в пространстве со слабо непрерывным дуальным отображением является, очевидно, псевдоаккретивным. Поэтому теорема 1 дает достаточные условия разрешимости уравнения (5) с оператором A, представимым в виде суммы аккретивного и усиленно непрерывного отображений. Следуя терминологии теории монотонных операторов (см., напр., [1], с. 267), такие операторы можно назвать полуаккретивными.

Замечание 3. В условиях теоремы 1 заменим (6) на неравенство $\langle Ux, y + Cx\rangle \ge b\|x\|$ при $\|x\| \ge r$. Тогда при $f \in X$ имеем $\langle Ux, y + Cx - f\rangle \ge b\|x\| - \|f\|\,\|x\| = \|x\|[b - \|f\|]$, т.е. при $f \in B(0,b) = \{x : \|x\| \le b\}$ справедливо (6). Значит, $B(0,b) \subset R(A + C)$ (ср. с [6]).

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *оператор* C *является однозначным ограниченным отображением типа* (A$'$), *и функционал* $\varphi_u(x,v) = \langle U(x-u), v\rangle$ *слабо непрерывен снизу при любом фиксированном* $u \in X$. *Тогда уравнение* (7) *имеет в* X *по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Покажем псевдоаккретивность оператора C. Пусть $x_n \rightharpoonup x$ и верно (2). Из ограниченности C имеем $Cx_n \rightharpoonup g$. Так как C — оператор типа (A$'$), то $g = Cx$, т. е. $Cx_n \rightharpoonup Cx$. Слабая полунепрерывность снизу функционала φ_u дает неравенство $\underline{\lim}\langle U(x_n - z),\ Cx_n\rangle \ge \langle U(x - z),\ Cx\rangle$. Доказываемое утверждение следует из теоремы 1. □

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 1 оператор* $\overline{A}$ *имеет слабо замкнутый график, а* C *есть ограниченный, возможно, многозначный оператор типа* (A$'$). *Тогда уравнение* (7) *разрешимо.*

Доказательство. Вначале убедимся в тождественности множеств $R(Ax + Cx - f)$ и $\overline{A}x + Cx - f$ для любых x и f из X. Пусть $v^n \to x$, $u^n \in \overline{A}v^n$, $w^n \in Cv^n$. Последовательности $\{u^n\}$ и $\{w^n\}$ ограничены, поэтому $u^n \rightharpoonup u$, $w^n \rightharpoonup w$, $u \in \overline{A}x$. Поскольку $\lim\langle U(v^n - x),\ w^n\rangle = 0$, то $w \in Cx$. Значит, $u + w - f \in \overline{A}x + Cx - f$. Теперь доказательство завершается, как и в лемме 5.

Пусть $z^n \in Cx_n$, $x_n \in X_n$, $y^n \in \overline{A}x_n$, $P_n(y^n + z^n - f) = 0$. Тогда $x_n \rightharpoonup \bar{x}$, $y^n \rightharpoonup \bar{y}$, $z^n \rightharpoonup \bar{g}$. В наших предположениях $\bar{y} \in \overline{A}\bar{x}$. Так как C — отображение типа (A$'$), то используя (9), установим включение: $\bar{g} \in C\bar{x}$. Но $f = \bar{g} + \bar{y}$ (см. [4], с. 183), т.е. $f \in \overline{A}\bar{x} + C\bar{x}$ или $0 \in R(A\bar{x} + C\bar{x} - f)$.

Замечание 4. В пространствах lp $(p > 1)$ дуальное отображение U с масштабной функцией $\mu(t) = t^{p-1}$ удовлетворяет всем требованиям теорем 1–3 (см. [1], с. 330–331). Для сравнения с результатами [6] укажем следующее. Нетрудно проверить, что оператор $-E$ является оператором типа (A) и (A$'$). Однако, очевидно, он не является компактным. В то же время отображение $A : l^2 \to l^2 : Ax = \{2 - \|x\|, 0, 0, \dots\}$ (см. [3], с. 152) компактно. Но построив последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots\}$, $x_n^i = 0$ при $i \ne n$ и $x_n^i = 1$ при $i = n$, легко установить, что A не является оператором типа (A) или (A$'$). Укажем также, что известные утверждения из [3], [4] о разрешимости уравнений с псевдомонотонными операторами и операторами типа (M) следуют из теорем 1–3.

3. Рассмотрим уравнение (5), имеющее непустое множество решений N, с аккретивным оператором A. Пусть пространства X и X^*, отображение U удовлетворяют условиям теоремы 1, A^h и f^δ — приближения A и f соответственно, причем A^h является суммой произвольного аккретивного отображения B^h и ограниченного однозначного псевдоакктеривного отображения C^h, $r(\overline{A}x, \overline{A}^h x) \leq g(\|x\|)h$, где $r(\overline{A}x, \overline{A}^h x)$ — хаусдорфово расстояние в X между множествами $\overline{A}x$ и $\overline{A}^h x$, $\overline{A}^h = \overline{B}^h + C$, $h \geq 0$, $g(t)$ $(t \geq 0)$ — непрерывная неотрицательная функция, $\|f - f^\delta\| \leq \delta$, $\delta \geq 0$. Предположим также, что $D(A) = D(A^h) = X$, $(\delta + h)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$, т.е. можно принять, что $h/\alpha \leq k$, $k > 0$. Построим возрастающую непрерывную функцию $a(t)$, $a(0) > 0$, $a(t)t - kg(t) \to +\infty$ при $t \to \infty$, и оператор $E^a : X \to X$, $E^a x = a(\|x\|)x$.

Лемма 7. *Оператор E^a псевдоаккретивен.*

Доказательство. Пусть $x_n \rightharpoonup x$ и

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ E^a x_n\rangle \leq 0. \tag{14}$$

Докажем, что

$$\underline{\lim}\langle U(x_n - z),\ E^a x_n\rangle \geq \langle U(x - z),\ E^a x\rangle \quad \forall z \in X. \tag{15}$$

Так как $a(t) > 0$, то из (14) имеем неравенство $\overline{\lim}\langle U(x_n - x),\ x_n\rangle \leq 0$. Отсюда с учетом слабой полунепрерывности снизу нормы в X и свойства возрастания $a(t)$ устанавливаем справедливость (15). $\square$

Рассмотрим в X уравнение

$$A^h x + \alpha E^a x = f^\delta, \quad \alpha > 0. \tag{16}$$

В наших предположениях можем записать цепочку соотношений

$$\langle Ux,\ y^h + \alpha E^a x\rangle = \langle Ux,\ y - y^0\rangle + \langle Ux,\ y^0\rangle + \langle Ux,\ y^h - y\rangle + \alpha\langle Ux,\ E^a x\rangle \geq$$
$$\geq \mu(\|x\|)[\alpha a(\|x\|)\|x\| - \|y^0\| - hg(\|x\|)], \quad y^0 \in A(0), \quad y \in \overline{A}x \quad \forall y^h \in \overline{A}^h x.$$

Правило построения функции $a(t)$ обуславливает коэрцитивность оператора $\overline{A}^h + \alpha E^a$, а леммы 7, 1 и теорема 1 гарантируют разрешимость уравнения (16), хотя и не однозначную. Пусть x_α^γ — некоторое решение (16), $\gamma = \{\delta, h\}$.

Теорема 4. *В условиях данного пункта последовательность $\{x_\alpha^\gamma\}$ сильно сходится при $\alpha \to 0$ к решению $\bar{x}$ уравнения* (5), *однозначно определяемому неравенством*

$$\langle U(\bar{x} - x),\ \bar{x}\rangle \leq 0 \quad \forall x \in N, \quad \bar{x} \in N. \tag{17}$$

Доказательство. Из (5) и (16) имеем

$$\langle U(x_\alpha^\gamma - x),\ y - y_\alpha^\gamma\rangle + \langle U(x_\alpha^\gamma - x),\ y_\alpha^\gamma - z_\alpha^\gamma\rangle + \alpha a(\|x_\alpha^\gamma\|)\mu(\|x_\alpha^\gamma - x\|)\|x_\alpha^\gamma - x\| =$$
$$\langle U(x_\alpha^\gamma - x),\ f - f^\delta\rangle - \alpha a(\|x_\alpha^\gamma\|)\langle U(x_\alpha^\gamma - x),\ x\rangle, \tag{18}$$

где $y \in \overline{A}x$, $x \in N$, $y_\alpha^\gamma \in \overline{A}x_\alpha^\gamma$, $z_\alpha^\gamma \in \overline{A}^h x_\alpha^\gamma$, $z_\alpha^\gamma + \alpha a(\|x_\alpha^\gamma\|)\|x_\alpha^\gamma\| = f^\delta$. На основе равенства (18) нетрудно доказать (см. [9], [5]), что существует подпоследовательность из $\{x_\alpha^\gamma\}$, сильно сходящаяся при $\alpha \to 0$ к некоторому решению $\bar{x}$ уравнения (5). Далее, из (18) при любом $x \in N$ имеем

$$\langle U(x_\alpha^\gamma - x),\ E^a x_\alpha^\gamma\rangle \leq [\delta/\alpha + h/\alpha g(\|x_\alpha^\gamma\|)]\mu(\|x_\alpha^\gamma - x\|),$$

откуда после перехода к пределу при $\alpha \to 0$ получим (17). Покажем, что элемент $\bar{x} \in N$, удовлетворяющий (17), единственный. Действительно, пусть

$$\langle U(\bar{x}_1 - x),\ \bar{x}_1\rangle \le 0 \quad \forall x \in N, \quad \bar{x}_1 \in N;$$
$$\langle U(\bar{x}_2 - x),\ \bar{x}_2\rangle \le 0 \quad \forall x \in N, \quad \bar{x}_2 \in N.$$

Полагая в первом неравенстве $x = \bar{x}_2$, а во втором $x = \bar{x}_1$ и складывая полученные неравенства, имеем $\mu(\|\bar{x}_1 - \bar{x}_1\|)\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le 0$, т.е. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 4 обобщает результаты о сходимости операторного метода регуляризации из работ [9], [5].

Используя леммы 2, 3, следствия 5, 6, замечания 1, 2 и теоремы 2, 3, утверждение теоремы 4 можно получить и при иных условиях на возмущенный оператор A^h.

Литература

1. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Kenmochi Nobuyuki. *Accretive mappings in Banach spaces* // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – № 1. – P.163–177.
3. Pascali D., Sburlan S. *Nonlinear mappings of monotone type.* – Bucuresti: Ed. Acad., 1978. – 341 p.
4. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
5. Рязанцева И.П. *О нелинейных операторных уравнениях с аккретивными отображениями* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 1. – С. 42–46.
6. Morales C.H. *Remarks on compact perturbations of m-accretive operators* // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl. – 1991. – V. 16. – № 9. – P. 771–780.
7. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
8. Абрамов А.А., Гаипова А.Н. *О существовании решений некоторых уравнений, содержащих разрывные монотонные преобразования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12. – № 2. – С.525–528.
9. Альбер Я.И. *О решении методом регуляризации операторных уравнений 1 рода с аккретивными операторами в банаховом пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 12. – С.2242–2248.
10. Рязанцева И.П. *Выбор параметра регуляризации для нелинейных уравнений с монотонным приближенно заданным оператором* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 9. – С.49–53.

Нижегородский государственный технический университет

Поступила 21.11.1994