A. V. Pskhu, Уравнение диффузии дробного порядка со многими временными переменными, *Matem. Mod. Kraev. Zadachi*, 2006, Part 3, 187–190

$|\mathrm{Re}\,\lambda| < \kappa_2$. В этом случае локализация вибрационного процесса только путем подбора глубины залегания включения невозможна. Невозможен также и низкочастотный резонанс, так как для полупространства $\omega_{\text{кр}} = 0$.

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. — М.: Научн. мир, 1999. — 246 с.
2. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ, 2000. — № 3. С. 5–9.

*Кубанский государственный университет, г. Краснодар*
donna@kubsu.ru

УДК 517.95

***А. В. Псху***

## УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ВРЕМЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ*

**1.** Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial y^{\alpha_k}} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$; $\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k}$ — дробная производная порядка $\alpha_k$ по переменной $y_k$, либо производная в смысле Римана-Лиувилля ([1, с. 9]), $\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}$, $D_{0t}^{\alpha} g(t) = [\Gamma(m-\alpha)]^{-1} (\partial/\partial t)^m \int\limits_0^t g(s)(t-s)^{m-\alpha-1} ds$, $\alpha \leqslant m$; либо производная Капуто ([1, с. 11]), $\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k}$, $\partial_{0t}^{\alpha} g(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m D_{0t}^{\alpha-m} g(t)$; $y = (y_k) \in \mathbb{R}^m$; $\alpha_k \in (0; 1)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

При $m = 1$ уравнение (1) совпадает с уравнением диффузии дробного порядка. Уравнения с дробными производными могут выступать в качестве математических моделей, описывающих различные процессы в средах с фрактальной геометрией ([1, гл. 5]). Отметим работы [2–8], в которых рассматривались диффузионные и диффузионно-волновые уравнения

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 06–01–96625, № 06–01–96627) и Фонда содействия отечественной науке

дробного порядка (см., также, библиографические комментарии в [7, с. 132]).

В работе построено решение задачи Коши для уравнения (1) и доказана его единственность в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова.

Обозначим через $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in T\}$, где $T = \{y = (y_k) : y_k \in (0; T_k), k = 1, 2, \ldots, m\}$. Если $z \in \mathbb{R}^m$, $z = (z_k, k = 1, 2, \ldots, m)$, то через $z_{(k)}$ будем обозначать проекцию точки $z$ на $\mathbb{R}^{m-1}$ вдоль $z_k$: $z_{(k)} = (z_1, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_m)$. $Y = (0; y_1) \times ... \times (0; y_m)$. $Y_{(k)} = (0; y_1) \times ... \times (0; y_{k-1}) \times (0; y_{k+1}) \times ... \times (0; y_m)$. $T_{(k)} = (0; T_1) \times ... \times (0; T_{k-1}) \times (0; T_{k+1}) \times ... \times (0; T_m)$.

**2.** Регулярным решением уравнения (1) в области $D$ в случае производной Римана-Лиувилля ($\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}$) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $\prod_{k=1}^{m} y_k^{1-\alpha_k} u(x, y) \in C(\bar{D})$, $u_{x_i x_i}(x, y)$, $D_{0y_k}^{\alpha} u(x, y_k) \in C(D)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, y) \in D$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha_k < 1$, $\tau_k(x, y_{(k)}) \in C\left(\mathbb{R}^n \times \bar{T}_{(k)}\right)$, $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $f(x, y)$ *удовлетворяет условию Гельдера, и выполняются соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty} \tau_k(x, y_{(k)}) \exp\left(-\rho |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m; \tag{2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x, y) \exp\left(-\rho |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \tag{3}$$

*где* $\rho < (1-\beta)\left(\beta/T^*\right)^{\beta/(1-\beta)}$, $\beta = \alpha/2$, $\alpha = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} \alpha_k$, $T^* = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} T_k$. *Тогда функция* $u = u(x, y)$, *определенная равенством*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{Y_{(k)}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi, \eta_k) \Gamma\left(x, y, \xi, \eta\right)\Big|_{\eta_k=0} d\xi\, d\eta_{(k)} + F(x, y; f),$$

*где*

$$F(x, y; f) = \int\limits_{Y} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi\, d\eta, \tag{4}$$

*а* $\Gamma\left(x, y, \xi, \eta\right)$ *— фундаментальное решение уравнения* (1), *является регулярным решением уравнения* (1) $\left(\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}\right)$

*и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{y_k\to 0} D_{0y_k}^{\alpha_k-1} u(x,y) = \tau_k(x, y_{(k)}), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

*Решение задачи* (1), (5) *единственно в классе функций, удовлетворяющих для некоторой положительной константы* $\sigma$ *условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,y) \exp\left(-\sigma |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0. \tag{6}$$

**3.** В случае производной Капуто регулярным решением уравнения (1) $\left(\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k}\right)$ в области $D$ назовем функцию $u(x,y)$ из класса $u(x,y) \in C(\bar{D})$, $u_{x_i x_i}(x,y)$, $\partial_{0y_k}^{\alpha} u(x, y_k) \in C(D)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяющую уравнению (1).

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha_k < 1$, $\tau_k(x, y_{(k)}) \in C\left(\mathbb{R}^n \times \bar{T}_{(k)}\right)$, $f(x,y) \in C(\bar{D})$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Гельдера, и выполняются соотношения* (2) *и* (3). *Тогда функция* $u = u(x,y)$, *определенная равенством*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{Y_{(k)}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi, \eta_k) D_{y_k \eta_k}^{\alpha_k - 1} \Gamma\left(x, y, \xi, \eta\right)\Big|_{\eta_k = 0} d\xi \, d\eta_{(k)} + F(x, y; f),$$

*где* $F(x,y;f)$ *задано соотношением* (4), *является регулярным решением уравнения* (1) $\left(\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k}\right)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{y_k\to 0} u(x,y) = \tau_k(x, y_{(k)}), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

*Решение задачи* (1), (7) *единственно в классе функций, удовлетворяющих условию* (6).


1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
2. *Wyss W.* The fractional diffusion equation // J. Math. Phys., 1986. — Vol. 27, No. 11. P. 2782–2785.
3. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1990. — Т. 26, № 4. — С. 660–770.
4. *Геккиева С.Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук, 1994. — Т. 1, № 1. — С. 17–18.

5. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett., 1996. — Vol 9, No. 6. — P. 23–28.
6. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2005. — Т. 8, № 1. — С. 26–31.
7. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005. — 199 с.
8. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана-Лиувилля // Докл. АН, 2006. — Т. 406, № 1. — С. 12–16.

*НИИ прикладной математики и автоматизации*
*Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик*
pskhu@mail333.com

УДК 517.956

***Л. С. Пулькина***

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ИХ СВЯЗИ С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ

Нелокальные задачи для параболических и гиперболических уравнений весьма активно изучаются в настоящее время. Одним из классов нелокальных задач, вызывающих интерес для исследователей, является класс задач с нелокальными интегральными условиями. Заметим, что из физических соображений условия такого вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений.

Аналогичная ситуация хорошо известна из теории обратных задач. Обратными называют такие задачи теории уравнений с частными производными, в которых наряду с искомым решением некоторые коэффициенты уравнения, либо его правая часть, либо другие параметры входных данных подлежат определению. В таких задачах задаются дополнительные условия, которые могут быть получены, например, из информации о состоянии среды в определенный момент времени, либо дополнительная информация поступает в виде некоторых средних значений каких-либо физических характеристик и в математической модели изучаемого процесса может быть