



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Velichko, A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko, The group generated by round permutations of the cryptosystem BelT, *Tr. Inst. Mat.*, 2007, Volume 15, Number 1, 15–21

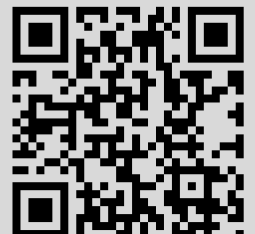
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

March 16, 2025, 21:30:49



УДК 512.542.74

## ГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ТАКТОВЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ КРИПТОСИСТЕМЫ BelT

М. В. Величко, А. А. Осинская, И. Д. Супруненко

Белорусский государственный педагогический университет  
Институт математики НАН Беларуси  
e-mail: mar\_vel@rambler.ru, anna@im.bas-net.by, suprunenko@im.bas-net.by  
Поступила 21.08.2006

Исследуется группа  $\Gamma$ , порожденная тактовыми подстановками криптосистемы BelT [1], принадлежащими фиксированному такту  $t$ . Доказано, что эта группа является знакопеременной группой степени  $2^{128}$ .

Алгоритм блочного шифрования BelT с длиной блока 128 битов и 256-битовым ключом разработан С.В. Агиевичем, В.А. Галинским, Н.Д. Микуличем и Ю.С. Хариним [1, 2]. Он обладает высокой производительностью, сравнимой с таковой для ведущих мировых алгоритмов шифрования (RC6, Rijndael, MARS, Twofish, Serpent, DFC, Safer+). Этот алгоритм позволяет выполнять шифрование на процессоре Pentium-200 со скоростью 18.73 Мбит/с, а на процессоре Pentium III-1000 — со скоростью 187.7 Мбит/с. Дополнительным достоинством алгоритма является быстрый, фактически не требующий вычислений способ определения тактовых ключей.

Всюду в дальнейшем  $\Sigma_n$  и  $A_n$  — симметрическая и знакопеременная группы степени  $n$ ;  $A^n$  — множество всех слов длины  $n$  в алфавите  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ;  $w||v$  — конкатенация

$$w_1 \dots w_n v_1 \dots v_m$$

слов  $w = w_1 \dots w_n$  и  $v = v_1 \dots v_m$ . Предполагаем, что слово  $X \in \mathcal{A}^{128}$  записано в виде  $X_1||X_2||X_3||X_4$ , где  $X_i \in \mathcal{A}^{32}$ , а каждое  $X_i$  — в виде  $X_{i1}||X_{i2}||X_{i3}||X_{i4}$ , где  $X_{ij} \in \mathcal{A}^8$ . Слово  $u \in \mathcal{A}^{32}$  записываем как  $u = u_1||u_2||u_3||u_4$ , где  $u_i \in \mathcal{A}^8$ . Нулевое слово длины 8 или 32 обозначается символом 0. Из контекста всегда ясно, о слове какой длины идет речь.

Далее  $\bar{v}$  — число  $2^7v_1 + 2^6v_2 + \dots + v_8$  для слова  $v = v_1 \dots v_8 \in \mathcal{A}^8$ ;  $\bar{u}$  — число

$$\bar{u}_1 + 2^8\bar{u}_2 + 2^{16}\bar{u}_3 + 2^{24}\bar{u}_4$$

для слова  $u \in \mathcal{A}^{32}$ ;  $\langle V \rangle_i$  — слово  $v \in \mathcal{A}^i$  такое, что  $\bar{v} \equiv V \pmod{2^i}$ ,  $i = 8$  или  $32$ ;  $u \oplus v$  — поразрядная по модулю 2 сумма двоичных слов  $u, v \in \mathcal{A}^{32}$ ;  $u \boxplus v$  — слово  $\langle \bar{u} + \bar{v} \rangle_{32}$  для слов  $u, v \in \mathcal{A}^{32}$ ;  $u \boxminus v$  — слово  $w \in \mathcal{A}^{32}$  такое, что  $u = v \boxplus w$ ;  $\lambda(u)$  — слово  $\left\langle 2\bar{u} + \left\lfloor \frac{\bar{u}}{2^{31}} \right\rfloor \right\rangle_{32}$  для слова  $u \in \mathcal{A}^{32}$ ;  $a \leftarrow u$  — запись значения  $u$  в регистр  $a$ ;  $a \leftrightarrow b$  — перестановка значений регистров  $a$  и  $b$ ;  $S_{32}$  — преобразование множества  $\mathcal{A}^{32}$ , которое ставит в соответствие слову  $u \in \mathcal{A}^{32}$  слово

$$S_{32}(u) = S(u_1)||S(u_2)||S(u_3)||S(u_4),$$

где подстановка  $S : \mathcal{A}^8 \rightarrow \mathcal{A}^8$  задается в работе [2, табл. 1]. Положим  $G_r(u) = \lambda^r(S_{32}(u))$ .

**Описание алгоритма BelT.** Этот алгоритм предназначен для зашифрования и расшифрования слов  $X \in \mathcal{A}^{128}$  на ключе  $\theta \in \mathcal{A}^{256}$ . Ключу  $\theta = \theta_1 \parallel \dots \parallel \theta_8$ ,  $\theta_i \in \mathcal{A}^{32}$ , ставятся в соответствие слова  $\kappa_i \in \mathcal{A}^{32}$ . При зашифровании  $\kappa_i$  является  $i$ -м элементом последовательности

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8, \theta_1, \dots, \theta_8, \dots$$

Для криптопреобразования слова  $X \in \mathcal{A}^{128}$  используются 32-разрядные регистры  $a, b, c, d$ , первоначально содержащие значения  $a \leftarrow X_1, b \leftarrow X_2, c \leftarrow X_3, d \leftarrow X_4$ . Криптопреобразование состоит в выполнении объединенных в такты вычислений над содержимым регистров. Дополнительно используется вспомогательный 32-разрядный регистр  $e$ . При зашифровании выполняются такты  $1, 2, \dots, 8$ . На  $t$ -м такте зашифрования выполняются шаги:

- 1)  $b \leftarrow b \oplus G_5(a \boxplus \kappa_{7t-6});$
- 2)  $c \leftarrow c \oplus G_{21}(d \boxplus \kappa_{7t-5});$
- 3)  $a \leftarrow a \boxplus G_{13}(b \boxplus \kappa_{7t-4});$
- 4)  $e \leftarrow G_{21}(b \boxplus c \boxplus \kappa_{7t-3}) \oplus \langle t \rangle_{32};$
- 5)  $b \leftarrow b \boxplus e;$
- 6)  $c \leftarrow c \boxplus e;$
- 7)  $d \leftarrow d \boxplus G_{13}(c \boxplus \kappa_{7t-2});$
- 8)  $b \leftarrow b \oplus G_{21}(a \boxplus \kappa_{7t-1});$
- 9)  $c \leftarrow c \oplus G_5(d \boxplus \kappa_{7t});$
- 10)  $a \leftrightarrow b;$
- 11)  $c \leftrightarrow d;$
- 12)  $b \leftrightarrow c.$

Обозначим через  $\Gamma_t$  группу, порожденную всеми подстановками  $t$ -го такта с фиксированными параметрами  $\kappa_{7t-4}$ ,  $\kappa_{7t-3}$  и  $\kappa_{7t-2}$ .

**Теорема.**  $\Gamma = \Gamma_t = A_{2^{128}}$ .

Теорема показывает, что модификации шагов 3)–7) алгоритма BelT не уменьшают группу, порожденную его тактовыми подстановками.

При доказательстве основных результатов использовались компьютерные вычисления. Программы имеются у авторов.

Далее считаем такт  $t$  фиксированным. Обозначим через  $St$  стабилизатор нулевого слова в  $\Gamma_t$ .

**Определение.** Назовем слово  $v \in \mathcal{A}^8$  словом общего положения, если  $8 \leq \bar{v} \leq 238$ . Слово  $u \in \mathcal{A}^{32}$  является словом общего положения, если все  $u_i$  — слова общего положения.

**Лемма 1.** Группы  $\Gamma$  и  $\Gamma_t \subseteq A_{2^{128}}$ .

**Доказательство.** При  $\beta_0, \dots, \beta_6 \in \mathcal{A}^{32}$  обозначим символом  $h(\beta_0, \dots, \beta_6)$  подстановку из  $\Sigma_{2^{128}}$ , соответствующую  $t$ -му такту алгоритма при значениях ключа  $\kappa_{7-i} = \beta_i$ . Элемент  $h(\beta_0, \dots, \beta_6)$  есть произведение 10 подстановок, соответствующих шагам 1), 2), 3), 4)–6), 7), 8), 9), 10), 11) и 12). Нетрудно заметить, что каждая из этих подстановок четна при любых значениях ключа. Поэтому  $\Gamma$  и  $\Gamma_t \subseteq A_{2^{128}}$ .

**Лемма 2.** Группа  $\Gamma_t$  не стабилизирует нулевое слово.

**Доказательство.** Доказательство почти очевидно. Выбрав произвольные значения  $\kappa_{7t-5}$  и  $\kappa_{7t-6}$ , можно подобрать такие  $\kappa_{7t}$  и  $\kappa_{7t-1}$ , что подстановка, являющаяся результатом выполнения шагов 1)–9) такта, переводит нулевое слово в ненулевое. Ясно, что это справедливо и для тактовой подстановки, соответствующей данному ключу.

**Лемма 3.** Для любого слова  $u \in \mathcal{A}^8$  общего положения и произвольного слова  $v \in \mathcal{A}^8$  существует набор  $\delta_1, \dots, \delta_{2l} \in \mathcal{A}^8$  такой, что

$$S(\delta_1) \oplus \dots \oplus S(\delta_{2l}) = 0, \quad \overline{\delta_i} + \overline{u} < 256, \quad S(\langle \overline{\delta_1} + \overline{u} \rangle_8) \oplus \dots \oplus S(\langle \overline{\delta_{2l}} + \overline{u} \rangle_8) = v.$$

При этом  $2 \leq l \leq 6$ .

**Доказательство.** Лемма доказана с помощью компьютерных вычислений (см. Приложение А).

**Предложение 1.** Стабилизатор нулевого слова в группе  $\Gamma_t$  действует транзитивно на множестве всех ненулевых слов.

**Доказательство.** При  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{A}^{32}$  пусть  $g(\sigma), g'(\sigma)$  и  $g_i(\sigma_1, \sigma_2) \in A_{2^{128}}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) — подстановки, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} g(\sigma) &: X \mapsto X_1 \| X_2 \oplus G_5(X_1 \boxplus \sigma) \| X_3 \| X_4; \\ g'(\sigma) &: X \mapsto X_1 \| X_2 \| X_3 \| X_4 \oplus G_5(X_2 \boxplus \sigma); \\ g_1(\sigma_1, \sigma_2) &: X \mapsto X_1 \oplus G_{21}(X_3 \boxplus \sigma_1) \oplus G_{21}(X_3 \boxplus \sigma_2) \| X_2 \| X_3 \| X_4; \\ g_2(\sigma_1, \sigma_2) &: X \mapsto X_1 \| X_2 \oplus G_5(X_1 \boxplus \sigma_1) \oplus G_5(X_1 \boxplus \sigma_2) \| X_3 \| X_4; \\ g_3(\sigma_1, \sigma_2) &: X \mapsto X_1 \| X_2 \| X_3 \oplus G_{21}(X_4 \boxplus \sigma_1) \oplus G_{21}(X_4 \boxplus \sigma_2) \| X_4; \\ g_4(\sigma_1, \sigma_2) &: X \mapsto X_1 \| X_2 \| X_3 \| X_4 \oplus G_5(X_2 \boxplus \sigma_1) \oplus G_5(X_2 \boxplus \sigma_2). \end{aligned}$$

Покажем, что  $g_i(\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma_t$  при  $1 \leq i \leq 4$ . Легко видеть, что  $g_i(\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , — инволюции. Фиксируем  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5 \in \mathcal{A}^{32}$ . Положим

$$h_i = h(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5, \sigma_i), \quad i = 1, 2.$$

Тогда  $h_i = fg(\sigma_i)$ , где  $f \in A_{2^{128}}$ , и  $g_2(\sigma_1, \sigma_2) = h_1^{-1}h_2 \in \Gamma_t$ . Заметим, что подстановки шагов 1) и 2) каждого такта коммутируют, это верно и для шагов 8) и 9). Поменяв местами шаги 1) и 2) и рассуждая, как при  $i = 2$ , получаем, что  $g_3(\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma_t$ . Пусть  $l$  — подстановка, получающаяся в результате выполнения шагов 10)–12);  $h'_i = h(\sigma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_6)$ , где  $\gamma_j \in \mathcal{A}^{32}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда  $h'_i = lg'(\sigma_i)f'$ , где  $f' \in A_{2^{128}}$ , и подстановка

$$h'_1(h'_2)^{-1} = lg'(\sigma_1)g'(\sigma_2)l^{-1} = g_4(\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma_t.$$

Аналогично показываем, что  $g_1(\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma_t$ , поменяв местами шаги 8) и 9).

При  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2l} \in \mathcal{A}^{32}$  положим  $g_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{2l}) = g_i(\sigma_1, \sigma_2) \dots g_i(\sigma_{2l-1}, \sigma_{2l})$ . Обозначим через  $St^i$  подгруппу, порожденную всеми  $g_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{2l}) \in St$ . Нетрудно видеть, что подгруппа  $St^i$  абелева. Пусть  $St^0$  — подгруппа, порожденная  $St^1, St^2, St^3$  и  $St^4$ . Покажем, что  $St^0$  действует транзитивно на множестве ненулевых слов. Так как  $\lambda$  — биективное линейное преобразование, то  $g_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{2l}) \in St^i$  тогда и только тогда, когда

$$S_{32}(\sigma_1) \oplus S_{32}(\sigma_2) \oplus \dots \oplus S_{32}(\sigma_{2l}) = 0.$$

Положим  $\tau = (1, 2, 4, 3) \in \Sigma_4$  ( $\tau$  — цикл в симметрической группе степени 4). Нетрудно заметить, что преобразование  $\lambda$  является линейным оператором. Используя лемму 3 и свойства оператора  $\lambda$ , можно доказать утверждение А.

**Утверждение А.** Пусть  $X \in \mathcal{A}^{128}$  и  $X_i$  — слово общего положения ( $1 \leq i \leq 4$ ). Тогда для любого  $W \in \mathcal{A}^{32}$  существует элемент  $\gamma \in St^{\tau(i)}$  такой, что  $\gamma(X) = Z_1 \| Z_2 \| Z_3 \| Z_4$  с  $Z_{\tau(i)} = X_{\tau(i)} \oplus W$  и  $Z_j = X_j$  при  $j \neq \tau(i)$ .

Докажем, что с помощью преобразований из  $St^0$  можно перевести слово  $X \in \mathcal{A}^{128}$  с подсловом  $X_1$  общего положения в произвольное слово  $Y = Y_1 \| Y_2 \| Y_3 \| Y_4$ ,  $Y_i \in \mathcal{A}^{32}$ , у которого

хотя бы одно из подслов  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  общего положения. Действительно, из утверждения А следует, что для любых слов  $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}^{32}$  существуют элементы  $s_1 = g_1^1 g_3^1 g_4^1 g_2^1$ ,  $s_2 = g_2^2$ ,  $s_3 = g_3^3 g_4^3 g_2^3$ ,  $s_4 = g_4^4 g_2^4$  такие, что  $g_l^i \in St^l$  ( $i, l = 1, 2, 3, 4$ ) и  $s_i(X) = Z^i$  с  $Z_i^i = A_i$ . Поэтому если  $Y_j$  — слово общего положения, то существует элемент  $s \in St^0$  такой, что  $s(X) = Z$  и  $Z_j = Y_j$ . Пусть  $k_i = \tau^i(j)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Рассуждая для слова  $Z$ , как выше для  $X$ , убедимся, что существуют элементы  $q_i \in St^0$  такие, что  $(q_3(Z))_{k_3} = Y_{k_3}$ ,  $(q_3(Z))_j = Y_j$ ,  $(q_2 q_3(Z))_k = Y_k$  при  $k = k_2, k_3, j$  и  $q_1 q_2 q_3(Z) = Y$ . Таким образом, установлено, что все слова  $X \in \mathcal{A}^{128}$ , у которых хотя бы одно подслово  $X_i$  общего положения, лежат в одной  $St^0$ -орбите.

При  $1 \leq i \leq 4$  обозначим через  $\Omega_i \subset \mathcal{A}^{32}$  совокупности слов  $u \in \mathcal{A}^{32}$  таких, что хотя бы  $i$  из подслов  $u_1, u_2, u_3, u_4$  являются словами общего положения. Ясно, что  $\Omega_4$  — это множество всех слов общего положения. Используя утверждение А и явную конструкцию оператора  $\lambda$ , покажем, что если у слова  $X \in \mathcal{A}^{128}$  есть хотя бы одно подслово  $X_i \in \Omega_j$ , то в  $St^0$ -орбите слова  $X$  содержится слово  $Y \in \mathcal{A}^{128}$ , у которого хотя бы одно подслово  $Y_k \in \Omega_{j+1}$ ,  $1 \leq i, k \leq 4$ ,  $1 \leq j \leq 4$ . Отсюда следует, что все слова  $X \in \mathcal{A}^{128}$ , у которых хотя бы одно подслово  $X_i \in \Omega_1$ , лежат в одной  $St^0$ -орбите.

Теперь пусть  $X \in \mathcal{A}^{128}$ ,  $X \neq 0$  и все  $X_i$  не являются словами общего положения, т.е.  $\overline{X_{ij}} < 8$  либо  $\overline{X_{ij}} > 238$  для любых  $i$  и  $j$ . Для завершения доказательства предложения достаточно установить, что в  $St^0$ -орбите слова  $X$  есть слово  $Y$  с  $Y_i \in \Omega_1$  хотя бы для одного  $i$ . Тогда все ненулевые слова лежат в одной  $St^0$ -орбите. Проанализируем различные возможности, при которых все  $X_i$  не являются словами общего положения.

Пусть  $238 < \overline{X_{ij}} < 246$  для некоторых  $i$  и  $j$ . С использованием компьютерных вычислений (см. Приложение А) установлено, что существуют слово  $Z \in \mathcal{A}^{32}$  с  $\overline{Z_j} = 29$  и элемент  $\sigma \in St^i$  такие, что  $\sigma(X)_i = X_i \oplus \lambda^5(Z)$  или  $X_i \oplus \lambda^{21}(Z)$ . Отсюда следует, что слово  $X$  лежит в одной  $St^i$ -орбите со словом  $Y$  требуемого вида. Если  $0 < \overline{X_{ij}} < 8$ , то справедливо аналогичное утверждение, только  $\overline{Z_j} = 142$ .

Пусть все ненулевые  $\overline{X_{ij}} \geq 246$ . Выберем  $i$  и  $j$  с  $X_{ij} \neq 0$  и положим  $u = X_{ij}$ . С помощью компьютерных вычислений установлено, что в этом случае существуют  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathcal{A}^8$  со следующими свойствами:

а)  $S(\delta_1) \oplus S(\delta_2) \oplus S(\delta_3) \oplus S(\delta_4) = 0$ ;

б)  $\overline{\delta_k} + \overline{u} \geq 256$  для  $1 \leq k \leq 4$ ;

в) если  $\delta'_k \in \mathcal{A}^8$  и  $\overline{\delta'_k} = \overline{u} + \overline{\delta'_k} - 256$ , то  $S(\delta'_1) \oplus S(\delta'_2) \oplus S(\delta'_3) \oplus S(\delta'_4) = 01101101$  и  $\overline{S(\delta'_1) \oplus S(\delta'_2) \oplus S(\delta'_3) \oplus S(\delta'_4)} = 109$ .

Используя этот факт и свойства оператора  $\lambda$ , можно показать, что в  $St^i$ -орбите слова  $X$  есть искомый элемент  $Y$ . Предложение доказано.

**Следствие.** *Группа  $\Gamma_t$  2-транзитивна.*

**Доказательство.** Из леммы 2 и предложения 1 вытекает, что  $\Gamma_t$ -орбита нулевого слова есть все множество  $\mathcal{A}^{128}$ . Далее из предложения 1 следует 2-транзитивность.

**Предложение 2.** *Группа  $St$  не сопряжена с подгруппой группы  $GL(128, 2)$  в группе  $\Sigma_{128}$ .*

**Доказательство.** Очевидно, что порядок множества неподвижных точек любого элемента группы  $GL(128, 2)$  есть степень числа 2, так как эти точки образуют подпространство пространства слов длины 128. Поэтому достаточно указать элемент  $g \in St$  с другим порядком множества неподвижных точек. Положим  $k_1 = 17$ ,  $k_2 = 11$ ,  $k_3 = 7$ ,  $k_4 = 0$  и  $\delta_i = (k_i)_{32}$ . Тогда  $g = g_1(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) \in St^1$ . Для любого  $w \in \mathcal{A}_8$  имеем  $\langle \overline{w} + k_i \rangle_{32} = v_i \|z_i\| 0 \|0$ , при этом всегда  $\overline{z_i} = 0$  или 1. Оказалось, что существует ровно три слова  $w$  таких, что все  $z_i = 0$  и  $S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus S(v_3) \oplus S(v_4) = 0$ , и не существует таких слов  $w$ , у которых

$S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus S(v_3) \oplus S(v_4) = 0$ , а  $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 2$  или 4 (Приложение В). Отсюда следует, что слово  $X$  неподвижно относительно элемента  $g$  тогда и только тогда, когда  $X_{11}$  равно одному из трех упомянутых выше слов. Поэтому порядок множества неподвижных точек элемента  $g$  равен  $3 \cdot 2^{120}$  и не является степенью двойки. Предложение доказано.

**Лемма 4.**  $2^{128}$  не представляется в виде  $(q^d - 1)/(q - 1)$ , где  $q$  — степень простого числа, и в виде  $2^{2d-1} \pm 2^{d-1}$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $2^{128} = q^{d-1} + q^{d-2} + \dots + q + 1$ . Очевидно, что  $q$  нечетно, а  $d$  четно. Предположим, что  $d = 2$ . Тогда  $2^{128} - 1 = (2^{64} - 1)(2^{64} + 1) = q$ . Но у чисел  $2^{64} - 1$  и  $2^{64} + 1$  разные простые делители. Получаем противоречие, поскольку  $q$  — степень простого числа.

Теперь пусть  $d = 2k > 2$ . Тогда

$$(q^d - 1)/(q - 1) = (q^k - 1)(q^k + 1)/(q - 1) = (q^k + 1)(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1).$$

Числа  $x = q^k + 1$  и  $y = q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1$  являются степенями двойки и  $x > y$ . Следовательно,  $y|x$ . Но тогда  $y|z = qy - x = q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q - 1$  и  $z > 0$ . Приходим к противоречию, так как  $z < y$ .

2) Число  $2^{128}$  нельзя представить в виде  $2^{2d-1} \pm 2^{d-1}$ , поскольку у последнего числа есть нечетные простые сомножители при  $d > 1$ .

**Доказательство теоремы.** В силу следствия группа  $\Gamma_t$  2-транзитивна. Согласно теореме Бернсайда [3] (современное изложение в [4, § 17]), 2-транзитивная группа подстановок имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, которая либо элементарная абелева, либо простая. Если эта подгруппа элементарная абелева, то  $\Gamma_t$  сопряжена с подгруппой аффинной группы и  $St$  сопряжена с подгруппой группы  $GL(128, 2)$ . В силу предложения 2 это невозможно.

Список чисел  $n$ , для которых существует 2-транзитивная группа подстановок степени  $n$  с неабелевой минимальной нормальной подгруппой, отличная от знакопеременной и симметрической, приведен в [5]. Это числа вида  $(q^d - 1)/(q - 1)$ , где  $q$  — степень простого числа,  $2^{2d-1} \pm 2^{d-1}$ , 11, 12, 15, 22, 23, 24, 28, 176 и 276. Очевидно, что

$$2^{128} \notin \{11, 12, 15, 22, 23, 24, 28, 176, 276\}.$$

Используя лемму 4, получаем, что  $\Gamma_t$  — знакопеременная группа. Теперь применим лемму 1. Теорема доказана.

Авторы благодарят директора учреждения Белорусского государственного университета “Национальный научно-исследовательский центр прикладных проблем математики и информатики” члена-корреспондента НАН Беларуси Ю.С. Харина и заведующего лабораторией этого центра С.В. Агиевича за постановку задачи, консультации и предоставление компьютерных программ, использующихся при реализации алгоритма.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свойства преобразования  $S$ , используемые при анализе стабилизатора нулевого слова.**

Для каждого ненулевого слова  $u \in \mathcal{A}_8$  укажем все  $v \in \mathcal{A}_8$ , для которых существуют слова  $\delta_1, \dots, \delta_{12} \in \mathcal{A}_8$  такие, что

$$S(\delta_1) \oplus \dots \oplus S(\delta_{12}) = 0, \quad \overline{\delta_i} + \overline{u} < 256 \quad \text{и} \quad S(\langle \overline{\delta_1} + \overline{u} \rangle_8) \oplus \dots \oplus S(\langle \overline{\delta_{12}} + \overline{u} \rangle_8) = v.$$

Ниже для каждого значения  $U = \overline{u}$  приведены число  $N$  искомым слов  $v$  для данного  $u$  и множество  $\Delta$  значений  $\overline{v}$ .

$$U = 1; \quad N = 2; \quad \Delta = \{0, 142\}.$$

$$U = 2; \quad N = 4; \quad \Delta = \{0, 142, 214, 88\}.$$

$U = 3; N = 8; \Delta = \{0, 142, 214, 156, 88, 18, 196, 74\}$ .

$U = 4; N = 16; \Delta = \{0, 142, 214, 88, 18, 156, 193, 196, 74, 23, 153, 79, 5, 139, 211, 93\}$ .

$U = 5; N = 32; \Delta = \{0, 142, 214, 88, 18, 156, 196, 74, 23, 153, 193, 37, 79, 5, 139, 211, 93, 185, 55, 111, 225, 171, 125, 243, 174, 32, 120, 246, 188, 50, 106, 228\}$ .

$U = 6; N = 64; \Delta = \{0, 142, 214, 88, 18, 156, 196, 74, 23, 153, 193, 79, 5, 139, 211, 93, 185, 55, 111, 225, 171, 46, 37, 25, 243, 174, 32, 120, 246, 188, 50, 106, 228, 97, 239, 183, 57, 115, 253, 165, 43, 118, 248, 160, 100, 234, 178, 60, 216, 86, 14, 128, 202, 68, 28, 146, 207, 65, 25, 151, 221, 83, 11, 133\}$ .

$U = 7; N = 128; \Delta = \{0, 142, 214, 88, 18, 156, 196, 74, 23, 153, 193, 79, 5, 139, 211, 93, 185, 55, 111, 225, 171, 37, 125, 243, 174, 32, 120, 246, 188, 50, 106, 228, 97, 239, 183, 57, 115, 253, 165, 43, 118, 248, 252, 160, 46, 100, 234, 178, 60, 216, 86, 14, 128, 202, 68, 28, 146, 207, 65, 25, 151, 221, 83, 11, 129, 15, 87, 217, 147, 29, 69, 203, 150, 24, 64, 206, 132, 10, 82, 220, 56, 182, 238, 96, 42, 164, 114, 47, 161, 249, 119, 61, 179, 235, 224, 110, 54, 184, 242, 124, 36, 170, 247, 121, 33, 229, 107, 51, 89, 215, 143, 1, 75, 197, 157, 78, 192, 152, 92, 4, 138, 210, 22, 19, 189, 175, 101, 133\}$ .

$8 \leq U \leq 238; N = 256$ .

$U = 239; N = 128; \Delta = \{0, 27, 182, 4, 199, 250, 20, 157, 137, 211, 16, 15, 162, 238, 195, 178, 31, 254, 153, 141, 166, 11, 215, 234, 61, 76, 225, 103, 115, 88, 245, 41, 229, 72, 57, 99, 119, 45, 241, 92, 90, 43, 134, 63, 146, 78, 130, 47, 94, 74, 150, 59, 124, 209, 160, 180, 104, 197, 164, 213, 120, 193, 108, 176, 173, 220, 200, 185, 216, 169, 189, 204, 38, 87, 67, 50, 83, 34, 54, 71, 65, 48, 36, 85, 52, 69, 81, 32, 202, 187, 175, 222, 191, 206, 218, 171, 113, 101, 117, 97, 139, 159, 143, 155, 236, 248, 232, 252, 22, 2, 18, 6, 106, 126, 110, 122, 144, 132, 148, 128, 247, 227, 243, 231, 13, 25, 9, 29\}$ .

$U = 240; N = 64; \Delta = \{0, 182, 199, 250, 157, 16, 27, 11, 234, 166, 215, 141, 61, 76, 103, 225, 241, 45, 92, 119, 90, 43, 134, 150, 74, 59, 209, 160, 124, 108, 193, 176, 220, 173, 204, 189, 87, 38, 71, 54, 48, 65, 32, 81, 187, 202, 171, 218, 113, 97, 139, 155, 236, 252, 22, 6, 106, 122, 144, 128, 247, 231, 13, 29\}$ .

$U = 241; N = 32; \Delta = \{0, 199, 157, 27, 234, 182, 92, 119, 45, 241, 90, 134, 43, 193, 176, 108, 220, 173, 71, 54, 65, 48, 218, 171, 113, 155, 236, 6, 106, 128, 247, 29\}$ .

$U = 242; N = 16; \Delta = \{0, 27, 182, 119, 199, 176, 108, 193, 173, 220, 171, 218, 113, 6, 106, 29\}$ .

$U = 243; N = 8; \Delta = \{0, 182, 199, 108, 218, 171, 113, 29\}$ .

$U = 244; N = 4; \Delta = \{0, 199, 218, 29\}$ .

$U = 245; N = 2; \Delta = \{0, 29\}$ .

$U \geq 246; N = 1; \Delta = \{0\}$ .

Эти списки получены с помощью компьютерных вычислений; элементы множества  $\Delta$  записаны в том порядке, в котором они были получены при выполнении программы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ В. Вычисление неподвижных точек одного преобразования.

Положим  $k_1 = 17, k_2 = 11, k_3 = 7, k_4 = 0$  и  $\delta_i = \langle k_i \rangle_{32}$ . В доказательстве предложения 2 рассматривалось множество неподвижных точек преобразования  $g = g_1(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) \in St^1$ . Из конструкции оператора  $g$  следует, что  $g(X) = X$  тогда и только тогда, когда  $X_{11}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{если } \overline{\langle X_{11} + k_i \rangle_{32}} = v_i \|z_i\| 0 \|0, \quad \text{то } S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus S(v_3) \oplus S(v_4) = 0 \quad \text{и} \quad (1)$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0, 2 \quad \text{или} \quad 4.$$

Заметим, что в любом случае  $\overline{z_i} = 0$  или 1. Непосредственно проверяется, что  $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} < 4$  и что  $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 2$  тогда и только тогда, когда  $245 \leq \overline{X_{11}} \leq 248$ . С помощью компьютерных вычислений установлено, что  $X_{11}$  удовлетворяет условиям (1) лишь при  $\overline{X_{11}} \in \{0, 1, 2\}$ .

## Литература

1. *Агиевич С.В., Галинский В.А., Микулич Н.Д., Харин Ю.С.* Алгоритм блочного шифрования BelT // Комплексная защита информации: Тезисы докл. VII Междунар. конф. Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2003. С. 95–97.
2. *Агиевич С.В., Галинский В.А., Микулич Н.Д., Харин Ю.С.* Об одном алгоритме блочного шифрования // Управление защитой информации. 2002. Т. 6. № 4. С. 407–412.
3. *Burnside W.* Theory of groups of finite order. Cambridge: Cambridge University Press, 1911.
4. *Супруненко Д.А.* Группы подстановок. Минск: Навука і тэхніка, 1996.
5. *Камерон П.Дж.* Конечные группы подстановок и конечные простые группы // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 2 (231). С. 135–157.

**М. V. Velichko, A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko**  
**The group generated by round permutations of the cryptosystem BelT**

### Summary

It is proved that the group generated by all round permutations of the cryptosystem BelT is the alternating group of degree  $2^{128}$ . This result can be used for estimating security of the cryptosystem BelT and its modifications.