Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, вып. 1. С. 38–57.

УДК 517.95

ИНВАРИАНТНАЯ ПОДМОДЕЛЬ РАНГА 2 НА ПОДАЛГЕБРЕ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ПЕРЕНОСОВ ДЛЯ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Д. Т. Сираева[1,a], **С. В. Хабиров**[1,2,b]

[1] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия*
[2] *Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа, Россия*
[a] *sirdilara@gmail.com*, [b] *habirov@anrb.ru*

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии. Для инвариантной подмодели 2-мерной подалгебры в виде линейной комбинации переносов, выбранной из построенной ранее оптимальной системы неподобных подалгебр, найдены интегралы системы, определяется её тип, система приводится к симметрическому виду и к характеристическому виду, находятся точные решения, определяются преобразования эквивалентности для линеаризованной системы, решается задача групповой классификации, строится оптимальная система неподобных подалгебр, применяются интегральные преобразования.

Ключевые слова: *подалгебра, инвариантная подмодель, точное решение, групповая классификация, преобразование эквивалентности.*

Введение

В работе [1] намечена программа ПОДМОДЕЛИ для уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{gathered}\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ \rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\\ p_t + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho a^2(\rho,p)\mathrm{div}\vec{u} = 0,\ a^2 = f_\rho,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\vec{u} = (u,v,w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $p = f(\rho,S)$ — уравнение состояния, S — энтропия. Программа ПОДМОДЕЛИ предполагает вычисление допускаемой алгебры Ли, групповую классификацию по произвольному элементу $f(\rho,S)$, вычисление оптимальной системы неподобных подалгебр, изучение подмоделей с групповой точки зрения. Задача групповой классификации решена в [1]. В работе [2] приведены все неизоморфные алгебры Ли групповой классификации, для каждой из которых способ перечисления неподобных подалгебр окончательно сформулирован в [3]. В данной работе рассматриваются уравнения газовой динамики (1) с уравнением состояния, полученным в классификации [1]:

$$p = f(\rho) + h(S),\ a^2 = f'.\tag{2}$$

Из (2) определяется энтропия S.

Уравнения (1) инвариантны при действии группы G_{11} (группы Галилея, расширенной равномерным растяжением) и при действии переноса по p:

1) $\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a}$ (переносы по пространству $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$);

2) $t' = t + a_0$ (перенос по времени с оператором $X_{10} = \partial_t$);

3) $\vec{x}\,' = O\vec{x}$, $\vec{u}\,' = O\vec{u}$, $OO^T = 1$, $\det O = 1$ (вращения с операторами $X_7 = y\partial_z - z\partial_y + \nu\partial_w - w\partial_\nu$, $X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w$, $X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_\nu - \nu\partial_u$, записанными в декартовой системе координат);

4) $\vec{x}\,' = \vec{x} + t\vec{b}, \vec{u}\,' = \vec{u} + \vec{b}$ (галилеевы переносы с операторами $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $X_5 = t\partial_y + \partial_\nu$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$);

5) $t' = ct, \vec{x}\,' = c\vec{x}$ (равномерное растяжение с оператором $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$);

6) $p' = p + a_0$ (перенос по p с оператором $Y_1 = \partial_p$).

Система (1) допускает алгебру Ли L_{12} с базисом $X_1, ..., X_{11}, Y_1$, для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена в [4]. В данной работе рассматривается инвариантная подмодель 2-мерной подалгебры из оптимальной системы линейной комбинации переносов с групповой точки зрения: найдены интегралы системы, определяется тип системы, приводится система к симметрическому виду и к характеристическому виду, находятся точные решения, определяются преобразования эквивалентности для линеаризованной системы, решается задача групповой классификации, строится оптимальная система неподобных подалгебр, показано применение интегральных преобразований.

1. Линеаризация инвариантной подмодели

Рассматривается подалгебра из оптимальной системы работы [4] под номером 2.36:

$$X_3 + X_4 = \partial_z + t\partial_x + \partial_u, \quad X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p.$$

Инварианты подалгебры

$$t, y, u - z, v, w, \rho, p - x + tz$$

задают представление инвариантного решения:

$$u = v_1 + z,\ v = u_1,\ w = w_1,\ \rho,\ p = p_1 + x - tz, \tag{3}$$

где u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 — функции переменных t, y.

Подстановка (3) в (1) с уравнением состояния (2) приводит к инвариантной подмодели ранга 2:

$$\begin{gathered} Du_1 + \rho^{-1}p_{1y} = 0, \\ Dv_1 = -\rho^{-1} - w_1, \\ Dw_1 = t\rho^{-1}, \\ D\rho + \rho u_{1y} = 0, \\ Dp_1 + \rho f_\rho u_{1y} = tw_1 - v_1, \end{gathered} \tag{4}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y$.

Вводится замена переменных: $t = t(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ так, чтобы $D = \partial_\xi$. Отсюда следует

$$t_\xi = 1, u_1 = y_\xi \Rightarrow t = \xi + \eta.$$

Якобиан обратной замены $\xi = \xi(t, y)$, $\eta = \eta(t, y)$ имеет вид

$$I = t_\xi y_\eta - t_\eta y_\xi = y_\eta - y_\xi \neq 0.$$

Справедливы соотношения на производные:

$$\xi_t = y_\eta I^{-1},\ \xi_y = -I^{-1},\ \eta_t = -y_\xi I^{-1},\ \eta_y = I^{-1}. \tag{5}$$

Инвариантная подмодель (4) записывается в новых переменных в силу (5):

$$\begin{gathered}
\rho y_{\xi\xi}(y_\eta - y_\xi) + p_{1\eta} - p_{1\xi} = 0,\\
v_{1\xi} = -\rho^{-1} - w_1,\\
w_{1\xi} = (\xi + \eta)\rho^{-1},\\
(y_\eta - y_\xi)\rho_\xi + \rho(y_\eta - y_\xi)_\xi = 0,\\
p_{1\xi} + \rho f'(\ln(y_\eta - y_\xi))_\xi = (\xi + \eta)w_1 - v_1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Четвёртое уравнение в системе (6) интегрируется:

$$\rho(y_\eta - y_\xi) = R(\eta) > 0. \tag{7}$$

Из второго и третьего уравнений в (6) следует

$$w_{1\xi} = -(\xi + \eta)(w_1 + v_{1\xi}).$$

Пятое уравнение в силу (7) влечёт равенство

$$(p_1 - f(\rho))_\xi = (\xi + \eta)w_1 - v_1.$$

Последние два равенства дают интеграл

$$p_1 = f(\rho) - w_1 - (\xi + \eta)v_1 + Q(\eta). \tag{8}$$

Из (7) следует, что $y_\eta = VR + u_1$ в силу $y_\xi = u_1$. Условие совместности принимает вид

$$u_{1\eta} = RV_\xi + u_{1\xi}.$$

Первое уравнение (6) в силу (7), (8) даёт уравнение для V.

Таким образом, система (6) приводится к системе из четырёх уравнений для четырёх функций:

$$\begin{gathered}
u_{1\xi} + RV_\xi = u_{1\eta},\\
v_{1\xi} = -w_1 - V,\\
w_{1\xi} = V(\xi + \eta),\\
-Ru_{1\xi} + g'V_\xi = g'V_\eta - w_{1\eta} - (\xi + \eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q',
\end{gathered} \tag{9}$$

где $V = \rho^{-1}$, $f(\rho) = g(V)$, $f' = -V^2 g'$.

Производные по переменной ξ от всех функций определяются из уравнений (9) при условии

$$\begin{vmatrix} 1 & R \\ -R & g' \end{vmatrix} = g' + R^2 \neq 0. \tag{10}$$

В этом случае (9) есть система типа Коши, для которой можно поставить задачу с начальными данными.

Если условие (10) не выполнено, то функция $V = V(\eta)$ зависит от одной переменной η при условии $R \neq \text{const}$.

Если $g' = -R^2 = \text{const}$, то $g = -R^2V + G$ должна быть линейной функцией (специальное уравнение состояния). В этом случае (9) — линейная система.

К исходным переменным t, y по решению системы (9) можно вернуться, вычислив криволинейный интеграл

$$y = \int u_1 d\xi + (u_1 + RV)d\eta$$

по любому пути в области определения гладкого решения. Тогда будет получена зависимость $y = y(\xi, \eta)$ и вместе с равенством $t = \xi + \eta$ получится замена переменных, которая по заданному решению (9) даёт решение (4).

Задача с начальными данными на нехарактеристической кривой поставлена корректно, т. е. существует единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных в некоторой окрестности кривой.

2. Приведение к симметрическому виду

Система (9) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ R & 0 & 0 & -g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+\eta & 1 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\eta + \begin{pmatrix} 0 \\ -w_1 - V \\ V(\xi+\eta) \\ (\xi+\eta)w_1 - Q' \end{pmatrix} \tag{11}$$

содержит несимметричную матрицу коэффициентов при производных по η.

С помощью линейных комбинаций уравнений системы (9)

$$\begin{gathered} (9)_1 + aR(9)_2 + bR(9)_3, \\ (9)_2 + a(9)_4, \\ (9)_3 + b(9)_4, \\ (9)_4 - ag'(9)_2 - bg'(9)_3, \end{gathered}$$

где $a = -(\xi + \eta)g'^{-1}$, $b = -g'^{-1}$, $(9)_i$ — i-е уравнение системы (9), система (11) переходит в систему с симметрическими матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & aR & bR & R \\ aR & 1 & 0 & -ag' \\ bR & 0 & 1 & -bg' \\ R & -ag' & -bg' & -g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\xi+\eta) & a & -ag' \\ 0 & b(\xi+\eta) & b & -bg' \\ 0 & \xi+\eta & 1 & -g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{pmatrix}_\eta +$$
$$+ \begin{pmatrix} -aR(w_1 + V) + bRV(\xi+\eta) \\ a(\xi+\eta)w_1 - aQ' - w_1 - V \\ V(\xi+\eta) + b(\xi+\eta)w_1 - bQ' \\ ag'(w_1 + V) - bg'V(\xi+\eta) + (\xi+\eta)w_1 - Q' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедлива теорема единственности задачи Коши в характеристической области [5].

3. Гиперболичность подмодели

Система (9) записывается в матричном виде:

$$A^\xi \vec{U}_\xi + A^\eta \vec{U}_\eta = B, \tag{12}$$

где

$$\vec{U} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ V \end{Vmatrix}, A^\xi = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R & 0 & 0 & g' \end{Vmatrix}, A^\eta = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi+\eta & 1 & -g' \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -w_1 - V \\ V(\xi+\eta) \\ -(\xi+\eta)w_1 + Q' \end{Vmatrix}.$$

Для вектора $\vec{k} = (k, l)$ характеристическая матрица системы (12) имеет вид

$$A = kA^\xi + lA^\eta = \begin{Vmatrix} k-l & 0 & 0 & Rk \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -Rk & l(\xi+\eta) & l & g'(k-l) \end{Vmatrix}.$$

Вектор $\vec{k}$ характеристический, если он удовлетворяет равенству $\det A = 0$. Отсюда следует уравнение

$$k^2(g'(k-l)^2 + R^2k^2) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) в зависимости от знака g' имеет следующие вещественные корни:
a) при $g' > 0$ один корень $k_0 = 0$ кратности 2;
b) при $g' < 0$ один корень $k_0 = 0$ кратности 2 и два корня $k_\pm$

$$k_\pm = \frac{l|g'|^{\frac{1}{2}}}{|g'|^{\frac{1}{2}} \pm R}; \tag{14}$$

c) при $g' = 0$, $R \neq 0$ один корень $k_0 = 0$ кратности 4.

Характеристикой называется кривая $h(\xi, \eta) = 0$, нормаль к которой совпадает с характеристическим вектором $\nabla h = (h_\xi, h_\eta) = (k, l)$. Эту кривую можно искать в виде

$$h(\xi, \eta) = \eta - \eta(\xi) = 0, \quad \nabla h = (-\eta_\xi, 1) = (k, l).$$

Для корня $k_0 = 0$ характеристика C_0 задаётся равенством

$$C_0 : \eta = \text{const}. \tag{15}$$

Для корня k_+ из формул (14) характеристика определяется уравнением

$$C_+ : \frac{d\xi}{d\eta} = -1 - |g'|^{-\frac{1}{2}} R. \tag{16}$$

Для корня k_- имеем

$$C_- : \frac{d\xi}{d\eta} = -1 + |g'|^{-\frac{1}{2}} R. \tag{17}$$

Вычислим левые собственные векторы характеристической матрицы A для каждого корня. Для $k_0 = 0$ есть два собственных вектора $e_1^0 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2^0 = (0, 0, 1, 0)$ в случаях a), b), c); для k_+ — собственные векторы

$$e_+ = (-\gamma, -(\xi+\eta)(1 + R\gamma^{-1}), -(1 + R\gamma^{-1}), 1);$$

для k_- — собственные векторы

$$e_- = (\gamma, (\xi+\eta)(R\gamma^{-1}-1), R\gamma^{-1}-1, 1),$$

где $\gamma = |g'|^{\frac{1}{2}}$ в случае b).

Система (12) гиперболическая, если число корней характеристического уравнения (13) с учётом кратностей и число левых собственных векторов совпадают с порядком системы [5]. Значит, в случае b) система (12) гиперболическая, а в случаях a), c) она таковой не является.

Для каждого левого собственного вектора можно написать условие на соответствующей характеристике. Для этого матричное уравнение (12) скалярно умножаем на левый собственный вектор и получаем равенство, в котором любая искомая функция дифференцируется вдоль характеристики. В итоге

$$C_0 : v_{1\xi} = -w_1 - V, \quad w_{1\xi} = (\xi+\eta)V; \tag{18}$$

$$C_+ : \gamma D_+ u_1 + (\xi+\eta)D_+ v_1 + D_+ w_1 + \gamma^2 D_+ V = w_1\gamma^{-1}R(\xi+\eta) + Q', \tag{19}$$

где $D_+ = -(1+R\gamma^{-1})\partial_\xi + \partial_\eta$;

$$C_- : -\gamma D_- u_1 + (\xi+\eta)D_- v_1 + D_- w_1 + \gamma^2 D_- V = -w_1\gamma^{-1}R(\xi+\eta) + Q', \tag{20}$$

где $D_- = (R\gamma^{-1}-1)\partial_\xi + \partial_\eta$.

Обыкновенные уравнения (15)–(20) для 7 неизвестных функций образуют замкнутую характеристическую форму гиперболической системы. Она является основой для численных расчётов краевых задач по методу характеристик.

4. Точные решения

Рассматривается система (9) из § 1 не типа Коши:

$$g'(V) = -R^2(\eta) < 0. \tag{21}$$

В этом случае функция V зависит от одной переменной η для любого уравнения состояния. Тогда система (9) переопределена:

$$\begin{gathered} u_{1\xi} = u_{1\eta}, \\ v_{1\xi} = -w_1 - V, \\ w_{1\xi} = V(\xi+\eta), \\ -Ru_{1\xi} = -R^2V' - w_{1\eta} - (\xi+\eta)(v_{1\eta} + w_1) + Q'. \end{gathered} \tag{22}$$

Интегрированием по ξ последних трёх уравнений в (22) определяются функции

$$\begin{gathered} w_1 = \tfrac{1}{2}\xi^2 V + \xi\eta V + W(\eta), \\ v_1 = -\tfrac{1}{6}\xi^3 V - \tfrac{1}{2}\xi^2\eta V - \xi(V+W) + V_1(\eta), \\ u_1 = \tfrac{1}{5}A_4\xi^5 + \tfrac{1}{4}A_3\xi^4 + \tfrac{1}{3}A_2\xi^3 + \tfrac{1}{2}A_1\xi^2 + A_0\xi + U_1(\eta), \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} A_4 = -\tfrac{1}{6}R^{-1}V',\ A_3 = -\tfrac{2}{3}\eta V' R^{-1}, \\ A_2 = (-\tfrac{1}{2}V' - W' + \eta V - \tfrac{1}{2}\eta^2 V')R^{-1}, \\ A_1 = ((1+\eta)^2 V + V_1' + W - \eta W')R^{-1}, \\ A_0 = (-Q' + W' + \eta V_1' + \eta W)R^{-1} + RV'. \end{gathered} \tag{24}$$

В (23) функции
$$V, R, Q, W, V_1, U_1 \tag{25}$$
от одной переменной η подлежат дальнейшему определению. В силу первого уравнения из (22) и выражения для u_1 из (23) справедливы равенства
$$\begin{gathered}A_4 = A_{40},\ A_3 = 4A_{40}\eta + A_{30},\ A_2 = 6A_{40}\eta^2 + 3A_{30}\eta + A_{20},\\ A_1 = 4A_{40}\eta^3 + 3A_{30}\eta^2 + 2A_{20}\eta + A_{10},\\ A_0 = A_{40}\eta^4 + A_{30}\eta^3 + A_{20}\eta^2 + A_{10}\eta + A_{00},\\ U_1 = \tfrac{1}{5}A_{40}\eta^5 + \tfrac{1}{4}A_{30}\eta^4 + \tfrac{1}{3}A_{20}\eta^3 + \tfrac{1}{2}A_{10}\eta^2 + A_{00}\eta + U_{10},\end{gathered} \tag{26}$$
где A_{i0}, U_{10} — постоянные, $i = 0, 1, \ldots, 4$. Выражения (26) сравним с выражениями из (24) и получим обыкновенные уравнения для функций (25), кроме U_1, с добавлением уравнения (21):
$$\begin{gathered}V' = -6RA_{40},\ A_{30} = 0,\ RA_{20} = \tfrac{1}{2}V'(\eta^2 - 1) - W' + V\eta,\\ (1 + \eta^2)V + V_1' + W - \eta W' = (4A_{40}\eta^3 + 2A_{20}\eta + A_{10})R,\\ -Q' + W' + \eta V_1' + \eta W + R^2V' = (A_{40}\eta^4 + A_{20}\eta^2 + A_{10}\eta + A_{00})R.\end{gathered} \tag{27}$$

Система (27), (21) определяет функции (25) в двух взаимоисключающих случаях $A_{40} = 0$ и $A_{40} \neq 0$.

В случае $A_{40} = 0$ фунции $V = V_0$ и $R = R_0$ — постоянные. Условие $R = R(\eta)$ нарушено. Из уравнений (22) всё равно следует представление решения (23), где
$$\begin{gathered}V = V_0,\ R = R_0,\ W = \tfrac{1}{2}\eta^2V_0 - \eta R_0A_{20} + W_0,\\ V_1 = -\tfrac{1}{6}V_0\eta^3 + R_0A_{20}\eta^2 + (R_0A_{10} - W_0 - V_0)\eta + V_{10},\\ Q = Q_0 + W_0 - R_0(A_{00} + A_{20})\eta.\end{gathered}$$

Таким образом, из представления инвариантного решения (3) определяется частное решение гидродинамических уравнений (1):
$$\begin{aligned}&u = z - t(\tfrac{1}{6}t^2 + 1)V_0 - tW_0 + V_{10}+\\ &+(y - \tfrac{1}{12}A_{20}t^4 - \tfrac{1}{6}A_{10}t^3 - \tfrac{1}{2}A_{00}t^2 - U_{10}t - x_{10})(tA_{20} + A_{10})V_0^{-1},\\ &v = \tfrac{1}{3}A_{20}t^3 + \tfrac{1}{2}A_{10}t^2 + A_{00}t + U_{10},\\ &w = \tfrac{1}{2}V_0t^2 + W_0 - V_0^{-1}A_{20}(y - \tfrac{1}{12}A_{20}t^4 - \tfrac{1}{6}A_{10}t^3 - \tfrac{1}{2}A_{00}t^2 - U_{10}t - x_{10}),\\ &\rho = \tfrac{1}{V_0}, \quad g'(V) = -R_0^2,\\ &p = x - tz + g(V_0) + \tfrac{1}{2}t^2(\tfrac{1}{3}t^2 + 1)V_0 + W_0t^2 - V_{10}t + Q_0-\\ &-(A_{20}t^2 + A_{10}t + A_{00})(y - \tfrac{1}{12}A_{20}t^4 - \tfrac{1}{6}A_{10}t^3 - \tfrac{1}{2}A_{00}t^2 - U_{10}t - x_{10})V_0^{-1}.\end{aligned} \tag{28}$$

В случае $A_{40} \neq 0$, так как $g' < 0$, обозначим $g'(V) = -\alpha^2(V) = -R^2$. Интегрирование (27) даёт представление искомых функций:
$$\begin{aligned}&\int\limits_{V_0}^{V} \tfrac{dV}{\alpha(V)} = -6A_{40}\eta,\ V_0 = V(0),\ W = \left(\tfrac{\eta^2}{2} + \tfrac{A_{20}}{6A_{40}} - \tfrac{1}{2}\right)V + W_{00},\\ &V_1 = \left[-\tfrac{1}{6}\eta^3 - (\tfrac{A_{20}}{6A_{40}} + \tfrac{1}{2})\eta - \tfrac{A_{10}}{6A_{40}}\right]V - \eta W_{00} + V_{10},\\ &Q = \left(\tfrac{A_{00}+A_{20}}{6A_{40}} - \tfrac{1}{2}\right)V - g(V) + W_{00} + Q_0,\\ &R = -\tfrac{V'}{6A_{40}}.\end{aligned} \tag{29}$$

Из (23), (29) и представления инвариантного решения (3) определяется частное решение гидродинамических уравнений (1):

$$\begin{aligned} &u = z - \tfrac{1}{6}(t^3 + (3 + \tfrac{A_{20}}{A_{40}})t + \tfrac{A_{10}}{A_{40}})\rho^{-1} - tW_{00} + V_{10},\\ &v = \tfrac{1}{5}A_{40}t^5 + \tfrac{1}{3}A_{20}t^3 + \tfrac{1}{2}A_{10}t^2 + A_{00}t + U_{10},\\ &w = \tfrac{1}{2}(t^2 - 1 + \tfrac{A_{20}}{3A_{40}})\rho^{-1} + W_{00},\\ &\rho = \big[\tfrac{2}{5}A_{40}^2t^6 + A_{20}A_{40}t^4 + 2A_{10}A_{40}t^3 + 6A_{00}A_{40}t^2 +\\ &\qquad\qquad + 12U_{10}A_{40}t + 12A_{40}(x_0 - y)\big]^{-\frac{1}{2}},\\ &p = x - tz + \tfrac{1}{6}(t^4 + \tfrac{A_{20}}{A_{40}}t^2 + \tfrac{A_{10}}{A_{40}}t + \tfrac{A_{00}}{A_{40}})\rho^{-1} + t^2W_{00} - tV_{10} + Q_0. \end{aligned} \tag{30}$$

Если рассматривать решения (28), (30) с точностью до преобразований 1–6 из введения, то можно считать $W_{00} = V_{10} = U_{10} = x_0 = Q_0 = x_{10} = W_0 = g(V_0) = 0$, и остаются четыре существенные постоянные V_0, A_{00}, A_{10}, A_{20} в (28) и A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{40} в (30).

5. Движение частиц для точных решений

В работах [6; 7] исследовано движение частиц решения (28) в простейшем случае при $A_{20} = A_{10} = 0$.

Исследуем решение (30) при $A_{00} = A_{10} = A_{20} = 0$, $A_{40} = k$:

$$\begin{aligned} &u = z - \tfrac{1}{6}(t^3 + 3t)[\tfrac{2}{5}k^2t^6 - 12ky]^{\frac{1}{2}},\\ &v = \tfrac{1}{5}kt^5,\\ &w = \tfrac{1}{2}(t^2 - 1)[\tfrac{2}{5}k^2t^6 - 12ky]^{\frac{1}{2}},\\ &\rho^{-2} = \tfrac{2}{5}k^2t^6 - 12ky,\\ &p = x - tz + \tfrac{1}{6}t^4\rho^{-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Решение определено в области $\frac{2}{5}k^2t^6 > 12ky$. Отражение $k \to -k$, $y \to -y$, $t \to -t$ оставляет инвариантными формулы (31), поэтому достаточно рассмотреть случай $k < 0$. Область определения решения

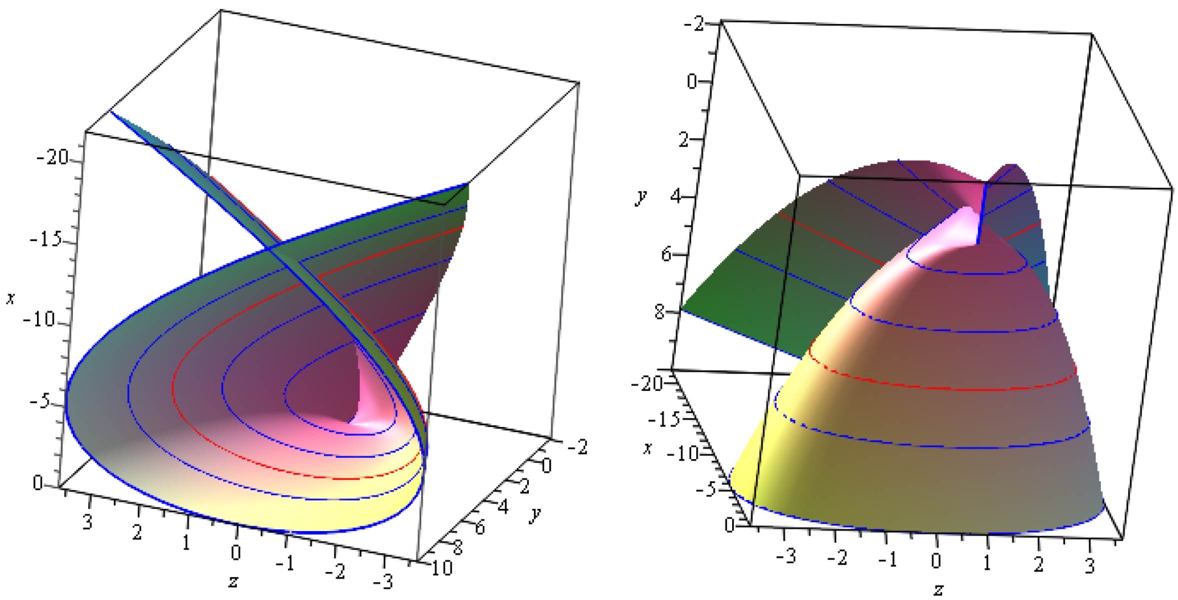
$$y > -\tfrac{1}{30}|k|t^6.$$

Пусть при $t = 0$ частица газа находится в точке x_0, $y_0 > 0$, z_0. Тогда мировые линии частиц определены равенствами

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}\beta t^2 + z_0t + x_0,\\ y &= -\tfrac{1}{30}|k|t^6 + y_0,\\ z &= \tfrac{1}{2}\beta t(\tfrac{1}{3}t^2 - 1) + z_0, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\beta = \sqrt{12|k|y_0}$, и вдоль мировой линии $\rho = \beta^{-1}$, $p = x_0 + tz_0 + \frac{1}{2}\beta t^2(\frac{1}{3}t^2 - 1)$. Равенства (32) задают переход от лагранжевых переменных x_0, $y_0 \geq 0$, z_0 к переменным x, y, z. Якобиан преобразования равен 1, значит, мировые линии частиц не пересекаются и величина конечного объёма не меняется со временем. Вдоль мировой линии плотность не меняется.

При $y_0 = 0$ $(x = x_0 + z_0t, y = -\frac{|k|}{30}t^6, z = z_0)$ плотность бесконечна — источник частиц с плоскости (x, z). При $y_0 \to \infty$ плотность стремится к нулю — вакуум. Значит, среда разлетается от источника к вакууму на бесконечности.



Вид спереди Вид сзади

Поверхность из траекторий движения частиц в координатах $\widetilde{x}$, y, $\widetilde{z}$ в интервале $0 < y_0 < 10$, $-2 < t < 2$. Выделены траектории при $|k| = 1$, $y_0 = 0, 1, 3, 5, 7, 10$

Проекции мировой линии на оси x и y монотонно сходятся ($t < 0$) и расходятся ($t > 0$), а проекция на ось z колеблется в интервале времени $|t| < \sqrt{3}$.

Для представления всех траекторий мировых линий (32), проходящих через точки (x_0, y_0, z_0), выберем инерционную систему координат:

$$\widetilde{x} = x - x_0 - z_0 t = -\frac{1}{2}\beta t^2, \quad \widetilde{z} = z - z_0 = \frac{1}{2}\beta t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right).$$

В зависимости от y_0, $|k| = 1$ численно построим траектории в координатах $\widetilde{x}$, y, $\widetilde{z}$ (рисунок). На рисунке изображена поверхность из траекторий движения частиц в интервале $0 < y_0 < 10$, $-2 < t < 2$. Выделены траектории при $y_0 = 0, 1, 3, 5, 7, 10$. При $t < 0$ и $t \to 0$ частицы сгущаются к оси y. При $t > 0$ происходит разлёт.

6. Преобразования эквивалентности линейной системы

Система (9) для уравнения состояния $p = -R^2V + h(S)$, $R = \text{const}$ является линейной. С обозначениями $u^1 = u_1$, $u^2 = v_1$, $u^3 = w_1$, $u^4 = V$, $Q' = q(\eta)$ систему запишем в виде

$$\begin{aligned}
&u^1_\xi + Ru^4_\xi = u^1_\eta,\\
&u^2_\xi = -u^3 - u^4,\\
&u^3_\xi = (\xi + \eta)u^4,\\
&R^4u^4_\eta - Ru^1_\eta + (\xi + \eta)(u^2_\eta + u^3) + u^3_\eta = q, \quad q_\xi = 0, \quad q_{u_i} = 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

где $q = q(\eta)$ — произвольный элемент.

Преобразования эквивалентности системы (33) не изменяют её вид, а лишь меняют произвольный элемент. Оператор преобразований эквивалентности, продолженный на производные, входящие в систему (33), разыскивается в виде [8]

$$X = \zeta^\xi\partial_\xi + \zeta^\eta\partial_\eta + \zeta^{u^i}\partial_{u^i} + \zeta^q\partial_q + (\widetilde{D}_\xi\zeta^{u^i} - u^i_\xi\widetilde{D}_\xi\zeta^\xi - u^i_\eta\widetilde{D}_\xi\zeta^\eta)\partial_{u^i_\xi} +$$
$$+(\widetilde{D}_\eta\zeta^{u^i} - u^i_\xi\widetilde{D}_\eta\zeta^\xi - u^i_\eta\widetilde{D}_\eta\zeta^\eta)\partial_{u^i_\eta} + (D_\xi\zeta^q - q_\xi D_\xi\zeta^\xi - q_\eta D_\xi\zeta^\eta - q_{u^i}D_\xi\zeta^{u^i})\partial_{q_\xi} +$$
$$+(D_{u^i}\zeta^q - q_\xi D_{u^i}\zeta^\xi - q_\eta D_{u^i}\zeta^\eta - q_{u^i}D_{u^j}\zeta^{u^j})\partial_{q_{u^i}} + \ldots,$$

где координаты оператора ζ^ξ, ζ^η, ζ^{u^i} зависят от переменных ξ, η, u^i, q, а операторы полного дифференцирования, действующие в своих пространствах, таковы:

$$\widetilde{D}_\xi = \partial_\xi + u^i_\xi\partial_{u^i} + (q_\xi + q_{u^i}u^i_\xi)\partial_q, \quad \widetilde{D}_\eta = \partial_\eta + u^i_\eta\partial_{u^i} + (q_\eta + q_{u^i}u^i_\eta)\partial_q,$$
$$D_\xi = \partial_\xi + q_\xi\partial_q, \quad D_{u^i} = \partial_{u^i} + q_{u^i}\partial_q.$$

Запишем условия инвариантности системы (33) относительно оператора X. Для двух последних уравнений они имеют вид

$$Xq_\xi|_{(33)} = 0, \quad Xq_{u^i}|_{(33)} = 0, \tag{34}$$

где переход на многообразие осуществляется с помощью динамических переменных u^1_η, u^2_η, u^3_η, u^4_ξ, q_η. Остальные производные выражаются из системы (33).

Условие (34) запишем в виде

$$\zeta^q_\xi = q_\eta\zeta^\eta_\xi, \quad \zeta^q_{u^i} = q_\eta\zeta^\eta_{u^i}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при динамических переменных (расщепление по q_η), получим

$$\zeta^q_\xi = \zeta^\eta_\xi = 0, \quad \zeta^q_{u^i} = \zeta^\eta_{u^i} = 0,$$

т. е. координаты ζ^q и ζ^η зависят только от η, q.

Условия инвариантности для остальных уравнений системы (33) имеют вид

$$\begin{gathered}
\widetilde{D}_\xi\zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\widetilde{D}_\xi\zeta^\xi = \widetilde{D}_\eta\zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\widetilde{D}_\eta\zeta^\xi - u^1_\eta(\zeta^\eta_\eta + \zeta^\eta_q q_\eta) - \\
-R(\widetilde{D}_\xi\zeta^{u^4} - u^4_\xi\widetilde{D}_\xi\zeta^\xi), \\
\widetilde{D}_\xi\zeta^{u^2} + (u^3 + u^4)\widetilde{D}_\xi\zeta^\xi + \zeta^{u^3} + \zeta^{u^4} = 0, \\
\widetilde{D}_\xi\zeta^{u^3} - (\xi+\eta)u^4\widetilde{D}_\xi\zeta^\xi = u^4(\zeta^\xi + \zeta^\eta) + (\xi+\eta)\zeta^{u^4}, \\
R^2\big[\widetilde{D}_\eta\zeta^{u^4} - u^4_\xi\widetilde{D}_\eta\zeta^\xi - u^4_\eta\big(\zeta^\eta_\eta + q_\eta\zeta^\eta_q\big)\big] - \\
-R\big[\widetilde{D}_\eta\zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\widetilde{D}_\eta\zeta^\xi - u^1_\eta(\zeta^\eta_\eta + q_\eta\zeta^\eta_q)\big] + (\zeta^\xi + \zeta^\eta)(u^2_\eta + u^3) + \\
+(\xi+\eta)\big[\zeta^{u^3} + \widetilde{D}_\eta\zeta^{u^2} + (u^3+u^4)\widetilde{D}_\eta\zeta^\xi - u^2_\eta(\zeta^\eta_\eta + q_\eta\zeta^\eta_q)\big] + \widetilde{D}_\eta\zeta^{u^3} - \\
-(\xi+\eta)u^4\widetilde{D}_\eta\zeta^\xi - u^3_\eta(\zeta^\eta_\eta + q_\eta\zeta^\eta_q) = \zeta^q,
\end{gathered} \tag{35}$$

где u^4_η нужно выразить из четвёртого уравнения системы (33).

Расщепляя условия инвариантности (35) по переменной q_η, получим

$$\begin{gathered}
\zeta^{u^1}_q = (u^1_\eta - Ru^4_\xi)\zeta^\xi_q + u^1_\eta\zeta^\eta_q \Rightarrow \zeta^\eta_q = \zeta^\xi_q = \zeta^{u^1}_q = 0, \\
R^2\zeta^{u^4}_q + (\xi+\eta)\zeta^{u^2}_q + \zeta^{u^3}_q = 0.
\end{gathered} \tag{36}$$

Расщепляя (35) по u^4_ξ, получим

$$\zeta^\xi = \zeta^\xi(\xi), \quad \zeta^{u^3}_{u^4} = R\zeta^{u^3}_{u_1}, \quad \zeta^{u^2}_{u^4} = R\zeta^{u^2}_{u_1}, \quad \zeta^{u^1}_{u^4} - R\zeta^{u^1}_{u^1} + R(\zeta^{u^4}_{u^4} - R\zeta^{u^4}_{u^1}) = 0. \tag{37}$$

Второе уравнение из условий (35) после расщепления по u^1_η в силу (37) определяет функцию

$$\begin{gathered}\zeta^{u^4}=u^4(\zeta^{u^2}_{u^2}-(\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3}-\zeta^\xi_\xi)-\zeta^{u^3}-\zeta^{u^2}_\xi-u^3(\zeta^\xi_\xi-\zeta^{u^2}_{u^2}),\\ \zeta^{u^2}_{u^1}=\zeta^{u^2}_{u^4}=0.\end{gathered} \tag{38}$$

Из третьего уравнения условий (35) после расщепления по u^1_η, u^4 следуют равенства в силу (37), (38)

$$\begin{aligned}&\zeta^{u^3}_{u^1}=\zeta^{u^3}_{u^4}=0\Rightarrow\zeta^{u^4}_{u^1}=0,\\ &\zeta^{u^3}_{u^2}-(\xi+\eta)\zeta^{u^3}_{u^3}+(\xi+\eta)(\zeta^{u^2}_{u^2}-(\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3})+\zeta^\xi+\zeta^\eta=0,\\ &\zeta^{u^3}_\xi-u^3\zeta^{u^3}_{u^2}+(\xi+\eta)\big[\zeta^{u^3}+u^3(\zeta^\xi_\xi-\zeta^{u^2}_{u^2})+\zeta^{u^2}_\xi\big]=0.\end{aligned} \tag{39}$$

Из четвёртого уравнения в (35) после расщепления по u^1_η следуют в силу (37), (39) равенства

$$\begin{aligned}&\zeta^{u^1}_{u^4}=\zeta^{u^4}_{u^1}=0,\\ &\zeta^{u^1}_{u^1}=\zeta^{u^4}_{u^4}=\zeta^{u^2}_{u^2}-(\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3}-\zeta^\xi_\xi=c(\xi,\eta,u^2,u^3).\end{aligned} \tag{40}$$

Первое уравнение из (35) после расщепления по динамическим переменным влечёт с учётом (40) соотношения

$$\begin{aligned}&\zeta^\xi=D\xi+C_1,\quad \zeta^\eta=D\eta+C_2,\\ &\zeta^{u^1}_{u^2}=\zeta^{u^1}_{u^3}=0\Rightarrow\zeta^{u^1}=c(\xi,\eta)u^1+\zeta^1(\xi,\eta),\end{aligned}$$

где D, C_1, C_2 — постоянные, и ещё одно равенство, которое можно расщепить по переменным u^1 и u^4:

$$c_\xi=c_\eta\Rightarrow c=c(\xi+\eta),$$

$$c'+(\xi+\eta)(-\zeta^{u^3}_{u^3}-\zeta^{u^2}_{\xi u^3}+\zeta^{u^2}_{u^2}+u^3\zeta^{u^2}_{u^2u^3}-D)+\zeta^{u^3}_{u^2}+\zeta^{u^2}_{\xi u^2}-u^3\zeta^{u^2}_{u^2u^2}=0, \tag{41}$$

$$\zeta^1_\xi-\zeta^1_\eta=R\big[\zeta^{u^3}_\xi+\zeta^{u^2}_{\xi\xi}-u^3\zeta^{u^3}_{u^2}+(u^3)^2\zeta^{u^2}_{u^2u^2}-2u^3\zeta^{u^2}_{\xi u^2}\big]. \tag{42}$$

Из (38)–(40) определяются зависимости

$$\begin{aligned}&\zeta^{u^2}=(c+D)u^2+\widetilde{\zeta}^{u^2}(\xi,\eta,I,q),\quad I=u^3+(\xi+\eta)u^2,\\ &\zeta^{u^3}=-u^2(C_1+C_2+(\xi+\eta)(2D+c))+\widetilde{\zeta}^{u^3}(\xi,\eta,I,q),\\ &\zeta^{u^4}=cu^4+u^2[C_1+C_2+2D(\xi+\eta)-(1+(\xi+\eta)^2)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I]+\\ &+Ic-\widetilde{\zeta}^{u^3}-\zeta^{u^2}_\xi+(\xi+\eta)I\widetilde{\zeta}^{u^2}_I,\end{aligned} \tag{43}$$

где новые искомые функции не зависят от u^2. Следовательно, после подстановки представления (43) в условия инвариантности их можно расщеплять по переменной u^2.

Из остатков четвёртого условия инвариантности после расщепления по u^2_η, u^3_η и затем по u^2 и по u^4 следует, что

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\zeta}^{u^2}_{II} = 0, c' = 0 \Rightarrow c = C = \text{const},\\
&R^2\big[(\xi+\eta)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I + C - \widetilde{\zeta}^{u^3}_I - \widetilde{\zeta}^{u^2}_{\xi I}\big] - C + \widetilde{\zeta}^{u^3}_I + (\xi+\eta)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I = 0, && (44)\\
&C_1 + C_2 + 2D(\xi+\eta) = 0 \Rightarrow D = 0, C_1 + C_2 = 0,\\
&-R^2\big[(1+(\xi+\eta)^2)\widetilde{\zeta}^{u^2}_{\eta I} + \widetilde{\zeta}^{u^2}_{\xi I}\big] +\\
&+(1-R^2)(\xi+\eta)\widetilde{\zeta}^{u^2}_I + (1-R^2)\widetilde{\zeta}^{u^3}_I = C(1-R^2), && (45)\\
&R^2\big[-(\widetilde{\zeta}^{u^3} + \widetilde{\zeta}^{u^2}_\xi)_\eta + I\widetilde{\zeta}^{u^2}_I + I\widetilde{\zeta}^{u^2}_{\eta I}(\xi+\eta)\big] + (q-(\xi+\eta)I)C - R\widetilde{\zeta}^{u^1}_\eta =\\
&= \zeta^q - (\xi+\eta)(\widetilde{\zeta}^{u^3} + \widetilde{\zeta}^{u^2}_\eta) - \widetilde{\zeta}^{u^3}_\eta. && (46)
\end{aligned}
$$

Из равенств (41), (45) после подстановки функций (43) следуют равенства

$$\widetilde{\zeta}^{u^2}_I = 0, \quad \widetilde{\zeta}^{u^3}_I = C.$$

Уравнения (44) выполняются тождественно. Уравнения (39), (42) и (46) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\zeta^1_\xi - \zeta^1_\eta = -R\zeta^4_\xi, \quad \zeta^4 = -\zeta^3 - \zeta^2_\xi,\\
&R^2\zeta^4_\eta - R\zeta^1_\eta + (\xi+\eta)(\zeta^3 + \zeta^2_\eta) + \zeta^3_\eta = \zeta^q - Cq, && (47)\\
&\zeta^3_\xi = (\xi+\eta)\zeta^4.
\end{aligned}
$$

Дифференцируем (47) по q, тогда в силу (36)

$$
\begin{gathered}
\zeta^4_{\xi q} = 0, \quad \zeta^3_{\xi q} = (\xi+\eta)\zeta^4_q, \quad \zeta^2_{\xi q} = -\zeta^3_q - \zeta^4_q,\\
R^2\zeta^4_{\eta q} + (\xi+\eta)(\zeta^3_q + \zeta^2_{\eta q}) + \zeta^3_{\eta q} = \zeta^q_q - C.
\end{gathered}
$$

Отсюда после интегрирования получим

$$
\begin{gathered}
\zeta^4 = a(\eta,q) + \sigma^4(\xi,\eta), \quad \zeta^1 = \zeta^1(\xi,\eta), \quad \zeta^3 = (\tfrac{1}{2}\xi^2 + \eta\xi)a + \sigma^3(\xi,\eta),\\
\zeta^2 = -a(\xi + \tfrac{1}{2}\eta\xi^2 + \tfrac{1}{6}\xi^3) + \sigma^2(\xi,\eta),\\
R^2 a_{q\eta} + (\xi+\eta)a_q\eta\xi + a_q\xi = \zeta^q_q - C.
\end{gathered}
$$

Последнее уравнение расщепляем по ξ, получим $a_q = 0$, $\zeta^q = Cq + h(\eta)$.

Таким образом, можно считать, что

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{u^i} = Cu^i + \zeta^i(\xi,\eta), \quad \zeta^\xi = C_1, \quad \zeta^\eta = -C_1,\\
&\zeta^1_\xi = \zeta^1_\eta - R\zeta^4_\xi,\\
&\zeta^2_\xi = -\zeta^3 - \zeta^4, && (48)\\
&\zeta^3_\xi = (\xi+\eta)\zeta^4,\\
&R^2\zeta^4_\eta - R\zeta^1_\eta + (\xi+\eta)(\zeta^3 + \zeta^2_\eta) + \zeta^3_\eta = h(\eta).
\end{aligned}
$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Алгебра Ли преобразований эквивалентности системы* (33) *бесконечномерна и задаётся базисом*

$$X_1 = \partial_\xi - \partial_\eta, \quad X_2 = u^i\partial_{u^i} + q\partial_q,$$
$$X_{h(\eta)} = h(\eta)\partial_q + \zeta^i\langle h(\eta)\rangle\partial_{u^i},$$
$$X_\infty = \zeta_0^i(\xi,\eta)\partial_{u^i},$$

где $\zeta^i\langle h(\eta)\rangle$ *— частное решение неоднородной системы* (48), $\zeta_0^i(\xi,\eta)$ *— общее решение однородной системы* (48) *при* $h = 0$.

Следствие 1. *Ядро допускаемых алгебр системы* (42) *для произвольной функции* $q(\eta) \neq 0$ *порождается операторами* X_1, X_∞, $X_q = \zeta^i\langle q(\eta)\rangle\partial_{u^i}$. *При* $q = 0$ *добавляется растяжение* $X_2 = u^i\partial_{u^i}$. *Любое точное решение неоднородной системы порождает преобразование эквивалентности, приводящее систему к однородной.*

7. Групповая классификация линейной системы

В системе (33) $q = q(\eta)$ — произвольный элемент. Проведём групповую классификацию по произвольному элементу. Оператор, допускаемый системой (33), разыскиваем в виде

$$X = \zeta^\xi\partial_\xi + \zeta^\eta\partial_\eta + \zeta^{u^i}\partial_{u^i} + (D_\xi\zeta^{u^i} - u^i_\xi D_\xi\zeta^\xi - u^i_\eta D_\xi\zeta^\eta)\partial_{u^i_\xi} + \\ + (D_\eta\zeta^{u^i} - u^i_\xi D_\eta\zeta^\xi - u^i_\eta D_\eta\zeta^\eta)\partial_{u^i_\eta},$$

где координаты оператора ζ^ξ, ζ^η, ζ^{u^i} зависят от переменных ξ, η, u^i, а операторы полного дифференцирования имеют вид

$$D_\xi = \partial_\xi + u^i_\xi\partial_{u^i}, \quad D_\eta = \partial_\eta + u^i_\eta\partial_{u^i}.$$

Условия инвариантности системы (33) таковы:

$$\begin{gathered} D_\xi\zeta^{u^1} - u^1_\eta D_\xi\zeta^\xi - u^1_\eta D_\xi\zeta^\eta + R(D_\xi\zeta^{u^4} - u^4_\eta D_\xi\zeta^\eta) = \\ = D_\eta\zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)D_\eta\zeta^\xi - u^1_\eta D_\eta\zeta^\eta, \end{gathered} \tag{49}$$

$$D_\xi\zeta^{u^2} + (u^3 + u^4)D_\xi\zeta^\xi - u^2_\eta D_\xi\zeta^\eta + \zeta^{u^3} + \zeta^{u^4} = 0, \tag{50}$$

$$D_\xi\zeta^{u^3} - (\xi+\eta)u^4 D_\xi\zeta^\xi - u^3_\eta D_\xi\zeta^\eta = (\xi+\eta)\zeta^{u^4} + u^4(\zeta^\xi + \zeta^\eta), \tag{51}$$

$$\begin{gathered} R^2(D_\eta\zeta^{u^4} - u^4_\xi D_\eta\zeta^\xi - u^4_\eta D_\eta\zeta^\eta) - R\big[D_\eta\zeta^{u^1} - (u^1_\eta - Ru^4_\xi)D_\eta\zeta^\xi - u^1_\eta D_\eta\zeta^\eta\big] + \\ +(\xi+\eta)(D_\eta\zeta^{u^2} + (u^3+u^4)D_\eta\zeta^\xi - u^2_\eta D_\eta\zeta^\eta + \zeta^{u^3}) + \\ +(\zeta^\xi + \zeta^\eta)(u^2_\eta + u^3) + D_\eta\zeta^{u^3} - (\xi+\eta)u^4 D_\eta\zeta^\xi - u^3_\eta D_\eta\zeta^\eta = q_\eta\zeta^\eta, \end{gathered} \tag{52}$$

где u^4_η выражается в силу последнего уравнения системы (33).

Условия инвариантности расщепляем по динамическим переменным u^4_ξ, u^1_η, u^2_η, u^3_η. Приравнивая нулю коэффициенты при u^4_ξ, получим

$$(52) \Rightarrow \zeta^\xi_{u_1} + R^{-1}\zeta^\xi_{u_4} = 0, \quad \zeta^\xi_{u_2} = (\xi+\eta)\zeta^\xi_{u_4},$$
$$\zeta^\xi_{u_3} = R^{-2}\zeta^\xi_{u_4}, \quad \zeta^\xi_\eta + \zeta^\xi_{u_4}(R^{-2}q - (\xi+\eta)u^3) = 0,$$

$$(50),(51) \Rightarrow \zeta^\eta_{u_4} = R\zeta^\eta_{u_1}, \quad \zeta^{u_2}_{u_4} - R\zeta^{u_2}_{u_1} + (u^3+u^4)(\zeta^\xi_{u_4} - R\zeta^\xi_{u_1}) = 0,$$
$$\zeta^{u^3}_{u_4} - R\zeta^{u^3}_{u_1} = (\xi+\eta)u^4(\zeta^\xi_{u_4} - R\zeta^\xi_{u_1}),$$

$$(49) \Rightarrow \zeta^\xi_{u_4} = R\zeta^\xi_{u_1}, \quad \zeta^{u^1}_{u_4} - R\zeta^{u^1}_{u_1} + R(\zeta^{u^4}_{u_4} - R\zeta^{u^4}_{u_1}) = 0. \tag{53}$$

Отсюда следует, что

$$\zeta^{\xi}=\zeta^{\xi}(\xi),\quad \zeta^{u^i}_{u_4}=R\zeta^{u^i}_{u_1},\quad i=2,3.$$

Расщепление по остальным динамическим переменным приводит к равенствам

$$\begin{gathered}(49)\Rightarrow \zeta^{\eta}_{u^2}=\zeta^{\eta}_{u^3}=0,\quad \zeta^{\xi}_{\xi}=\zeta^{\eta}_{\eta},\\ \zeta^{u^1}_{u^2}=(\xi+\eta)R^{-2}(\zeta^{u^1}_{u^4}-R\zeta^{\eta}_{\xi}),\quad \zeta^{u^1}_{u^3}=R^{-2}(\zeta^{u^1}_{u^4}-R\zeta^{\eta}_{\xi}),\\ \zeta^{u^1}_{\xi}-(u^3+u^4)\zeta^{u^1}_{u^2}+(\xi+\eta)u^4\zeta^{u^1}_{u^3}+R\big[\zeta^{u^4}_{\xi}-(u^3+u^4)\zeta^{u^4}_{u^2}+(\xi+\eta)u^4\zeta^{u^4}_{u^3}\big]-\\ -R^{-1}(q-(\xi+\eta)u^3)\zeta^{\eta}_{\xi}=\zeta^{u^1}_{\eta}+\zeta^{u^1}_{u^4}R^{-2}(q-(\xi+\eta)u^3);\end{gathered}\tag{54}$$

$$\begin{gathered}(50)\Rightarrow \zeta^{\eta}=\zeta^{\eta}(\eta),\quad \zeta^{u^2}_{u^1}=0=\zeta^{u^2}_{u^4},\\ \zeta^{u^2}_{\xi}-(u^3+u^4)\zeta^{u^2}_{u^2}+(\xi+\eta)u^4\zeta^{u^2}_{u^3}+(u^3+u^4)\zeta^{\xi}_{\xi}+\zeta^{u^3}+\zeta^{u^4}=0;\end{gathered}\tag{55}$$

$$\begin{gathered}(51)\Rightarrow \zeta^{u^3}_{u^1}=0=\zeta^{u^3}_{u^4},\\ \zeta^{u^3}_{\xi}-(u^3+u^4)\zeta^{u^3}_{u^2}+(\xi+\eta)u^4\zeta^{u^3}_{u^3}+(\xi+\eta)u^4\zeta^{\xi}_{\xi}=(\xi+\eta)\zeta^{u^4}+u^4(\zeta^{\xi}+\zeta^{\eta});\end{gathered}\tag{56}$$

$$(52),(53)\Rightarrow \zeta^{u^4}_{u^4}=\zeta^{u^1}_{u^1},\quad \zeta^{u^1}_{u^4}=R^2\zeta^{u^4}_{u^1},$$

$$R^2\zeta^{u^4}_{u^2}-(\xi+\eta)\zeta^{u^4}_{u^4}-R\zeta^{u^1}_{u^2}+R^{-1}\zeta^{u^1}_{u^4}(\xi+\eta)+(\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^2}+\zeta^{\xi}+\zeta^{\eta}+\zeta^{u^3}_{u^2}=0;\tag{57}$$

$$R\zeta^{u^4}_{u^3}-\zeta^{u^4}_{u^4}-R\zeta^{u^1}_{u^3}+R^{-1}\zeta^{u^1}_{u^4}+(\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3}+\zeta^{u^3}_{u^3}=0,\tag{58}$$

$$\begin{gathered}R^2\zeta^{u^4}_{\eta}+(\zeta^{u^4}_{u^4}-\zeta^{\eta}_{\eta}-R^{-1}\zeta^{u^1}_{u^4})(q-(\xi+\eta)u^3)-R\zeta^{u^1}_{\eta}+\\ +(\xi+\eta)(\zeta^{u^2}_{\eta}+\zeta^{u^3})+u^3(\zeta^{\xi}+\zeta^{\eta})+\zeta^{u^3}_{\eta}=q'\zeta^{\eta}.\end{gathered}\tag{59}$$

Из этих равенств следует

$$\begin{gathered}\zeta^{\xi}=D\xi+C_1,\quad \zeta^{\eta}=D\eta+C_2,\\ (54),(55)\Rightarrow \zeta^{u^4}=cu^4+\zeta^4,\quad c=\zeta^{u^2}_{u^2}-(\xi+\eta)\zeta^{u^2}_{u^3}-D,\\ \zeta^4=u^3\zeta^{u^2}_{u^2}-\zeta^{u^3}-\zeta^{u^2}_{\xi}-Du^3,\\ \zeta^{u^1}=c(\xi,\eta)u^1+\zeta^1(\xi,\eta).\end{gathered}$$

В равенствах (56)–(59) переменная u^4 свободная. Приравнивая нулю коэффициенты при u^4, получим

$$\begin{gathered}c=C\text{ — постоянная},\\ \zeta^{u^2}=(C+D)u^2+\zeta^2(\xi,\eta,I),\quad I=u^3+(\xi+\eta)u^2,\\ \zeta^{u^3}=-(C_1+C_2+C(\xi+\eta))u^2+\zeta^3(\xi,\eta,I),\\ \zeta^{u^4}=Cu^4+\zeta^4(\xi,\eta,u^2,u^3),\quad \zeta^{u^1}=Cu^1+\zeta^1(\xi,\eta),\\ \zeta^4=u^2(C_1+C_2)+CI-\zeta^3-\zeta^2_{\xi}+\zeta^2_I\big[I(\xi+\eta)-u^2(1+(\xi+\eta)^2)\big].\end{gathered}$$

С этими выражениями равенства (56)–(59) имеют свободную переменную u^2. Приравнивая нулю коэффициенты, получим

$$(1+(\xi+\eta)^2)(\zeta^3_I - C + (\xi+\eta)\zeta^2_I) = 2(\xi+\eta)(C_1+C_2), \tag{60}$$

$$\zeta^3_\xi + I(C_1+C_2-\zeta^3_I(\xi+\eta)) = (\xi+\eta)\big[I\zeta^2_I(\xi+\eta) - \zeta^3 - \zeta^2_\xi\big], \tag{61}$$

$$\zeta^2_{II} = 0 = \zeta^3_{II},$$

$$C_1+C_2-(\xi+\eta)\zeta^2_{\xi I} + (-1+(\xi+\eta)^2)\zeta^2_I + 2D(\xi+\eta) = 0, \tag{62}$$

$$R^2\big[C-\zeta^3_I - \zeta^2_{I\xi} + \zeta^2_I(\xi+\eta)\big] - C + (\xi+\eta)\zeta^2_I + \zeta^3_I = 0,$$

$$(\xi+\eta)(C_1+C_2-2\zeta^2_I) + (1+(\xi+\eta)^2)(C-\zeta^3_I-\zeta^2_{\xi I}) = 0,$$

$$\zeta^1_\xi - \zeta^1_\eta + R\big[-\zeta^3_\xi - \zeta^2_{\xi\xi} + 2I\zeta^2_I - I\big(C_1+C_2+(\xi+\eta)(C-\zeta^3_I-\zeta^2_{\xi I})\big)\big] = 0,$$

$$-2D(\xi+\eta)^2 - 2(C_1+C_2)(\xi+\eta) + \zeta^3_I - C + R^2(C-\zeta^3_I-\zeta^2_{\xi I}) = 0,$$

$$R^2(I\zeta^2_I - \zeta^3_\eta - \zeta^2_{\xi\eta}) + (C-D)(q-(\xi+\eta)I) - R\zeta^1_\eta + (\xi+\eta)(\zeta^2_\eta+\zeta^3) +$$
$$+I(C_1+C_2+D(\xi+\eta)) + \zeta^3_\eta = q'(D\eta+C_2).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta^2 = dI + \widetilde{\zeta}^2, \quad \zeta^3 = eI + \widetilde{\zeta}^3,$$

$$(60) \Rightarrow e = C - (\xi+\eta)d + 2(C_1+C_2)\frac{\xi+\eta}{1+(\xi+\eta)^2},$$

$$(61) \Rightarrow d = (C_1+C_2)\frac{(\xi+\eta)^4+3}{(1+(\xi+\eta)^2)^3},$$

$$(62) \Rightarrow D = 0, \quad C_1+C_2 = 0 \Rightarrow e = C, d = 0.$$

Остальные равенства принимают вид

$$\zeta^{u^1} = Cu^1 + \zeta^1(\xi,\eta), \quad \zeta^{u^2} = Cu^2 + \zeta^2(\xi,\eta), \quad \zeta^{u^3} = Cu^3 + \zeta^3(\xi,\eta),$$

$$\zeta^{u^4} = Cu^4 + \zeta^4(\xi,\eta), \quad \zeta^\xi = C_1, \quad \zeta^\eta = -C_1;$$

$$\zeta^1_\xi = \zeta^1_\eta - R\zeta^4_\xi, \quad \zeta^2_\xi = -\zeta^3 - \zeta^4, \quad \zeta^3_\xi = (\xi+\eta)\zeta^4,$$

$$R^2\zeta^4_\eta - R\zeta^1_\eta + (\xi+\eta)(\zeta^2_\eta + \zeta^3) + \zeta^3_\eta = -q'C_1 - Cq.$$

Результат вычислений позволяет сформулировать классификационное утверждение.

Теорема 2. *Алгебра Ли, допускаемая однородной системой* (33) ($q=0$)*, задаётся базисом*

$$X_1 = \partial_\xi - \partial_\eta, \quad X_2 = u^i\partial_{u^i}, \quad X_\infty = \zeta^i_0(\xi,\eta)\partial_{u^i} = \langle\zeta^i_0\rangle,$$

где ζ^i_0 *— любое решение однородной системы.*

При постоянной $q=Q$ *базис допускаемой алгебры таков:*

$$X_1 = \partial_\xi - \partial_\eta, \quad X_2 = (u^i - \zeta^i\langle Q\rangle)\partial_{u^i}, \quad \langle\zeta^i_0\rangle,$$

где $\zeta^i\langle Q\rangle$ *— частное решение неоднородной системы.*

При функции общего вида $q(\eta)$ базис алгебры имеет вид

$$X_1 = \partial_\xi - \partial_\eta - \zeta^i \langle q' \rangle \partial_{u^i}, \quad X_2 = (u^i - \zeta^i \langle Q \rangle)\partial_{u^i}, \quad \langle \zeta_0^i \rangle.$$

Коммутаторы базисных операторов таковы:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, \langle \zeta_0^i \rangle] = \langle \zeta_{0\xi}^i - \zeta_{0\eta}^i \rangle, \quad [X_2, \langle \zeta_0^i \rangle] = -\langle \zeta_0^i \rangle, \quad [\langle \zeta_{10}^i \rangle, \langle \zeta_{20}^i \rangle] = 0.$$

Таким образом, алгебра Ли разлагается в полупрямую сумму абелевой подалгебры и абелева идеала $L = \{X_1, X_2\} \dot{\oplus} \langle \zeta_0^i \rangle$.

Внутренние автоморфизмы по оператору X_1 являются решениями задачи

$$X'_{a_1} = [X', X_1] = -(\zeta_{0\xi}^{i\prime} - \zeta_{0\eta}^{i\prime})\partial_{u^i}, \; X'|_{a_1=0} = X = x^1 X_1 + x^2 X_2 + \langle \zeta_0^i \rangle.$$

Решение имеет вид

1. $\zeta_0^{i\prime} = \zeta_0^i(\xi - a_1, \eta + a_1)$.
   Аналогично вычисляются автоморфизмы для других базисных операторов.

2. $\zeta^{i\prime} = e^{a_2} \zeta_0^i$.

3. $\zeta_0^{i\prime} = x'(\zeta_{0\xi}^i - \zeta_{0\eta}^i) - x^2 \zeta_0^i + \zeta_{00}^i$.

С помощью внутренних автоморфизмов вычисляется оптимальная система неподобных подалгебр [8]:

1-мерные подалгебры

$$X_1 + aX_2, X_2, \langle \zeta_0^i \rangle;$$

2-мерные подалгебры

$$\{X_1, X_2\}, \{X_2, \langle \zeta_0^i \rangle\}, \{X_1 + aX_2, \langle \zeta_*^i \rangle\}, \{X_2, \langle \zeta_0^i \rangle\}, \{\langle \zeta_1^i \rangle, \langle \zeta_2^i \rangle\},$$

где ζ_1^i, ζ_2^i — два линейно независимых решения однородной системы.

Подалгебра $\{X_1 + aX_2, \langle \zeta_*^i \rangle\}$ должна удовлетворять условию замкнутости

$$[X_1 + aX_2, \langle \zeta_0^i \rangle] = \langle \zeta_{0\xi}^i - \zeta_{0\eta}^i \rangle - a\langle \zeta_0^i \rangle = \lambda \langle \zeta_0^i \rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle \zeta_{0\xi}^i - \zeta_{0\eta}^i \rangle = (\lambda + a)\zeta_0^i \Rightarrow \zeta_0^i = (\lambda + a)\xi + \zeta_0^i(t), \; t = \xi + \eta -$$

решение однородной системы (33). Общее решение имеет вид

$$\zeta_*^1 = A^1 + (\lambda + a)(R + 1 + R^{-1})t - \frac{1}{2}t^2 R^{-1} + \frac{2}{3}t^3 R^{-2},$$

$$\zeta_*^2 = A^2 + (\lambda + a + A^3 + A^4)t - \frac{1}{2}t^2(\lambda + a)R^{-1} - \frac{1}{6}A^4 t^3 + \frac{1}{12}(\lambda + a)(1 + R^{-1})t^4,$$

$$\zeta_*^3 = A^3 + (\lambda + a)t + \frac{1}{2}A^4 t^2 - \frac{1}{3}(\lambda + a)(1 + R^{-1})t^3,$$

$$\zeta_*^4 = A^4 - (\lambda + a)(1 + R^{-1})t,$$

где A^i — произвольные постоянные. Множество таких решений $\zeta^i_* = A^k\zeta^i_{k*}$ образуют абелеву подалгебру L_4 с базисом $\langle\zeta^i_{k*}\rangle$, $k = 1,2,3,4$. Получаем 3-мерные подалгебры

$$\{X_1, X_2 + \langle\zeta^i_2\rangle, \langle\zeta^i_*\rangle\}, \{X_1, \langle\zeta^i_{*1}\rangle, \langle\zeta^i_{*2}\rangle\}, \{X_2, \langle\zeta^i_1\rangle, \langle\zeta^i_2\rangle\}, \{\langle\zeta^i_1\rangle, \langle\zeta^i_2\rangle, \langle\zeta^i_3\rangle\};$$

4-мерные подалгебры

$$\{X_1, X_2 + \langle\zeta^i_2\rangle, \langle\zeta^i_{*1}\rangle, \langle\zeta^i_{*2}\rangle\}, \{X_1, \langle\zeta^i_{*1}\rangle, \langle\zeta^i_{*2}\rangle, \langle\zeta^i_{*3}\rangle\},$$

$$\{X_2, \langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,3\}, \{\langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,4\};$$

5-мерные подалгебры

$$\{X_1, X_2 + \langle\zeta^i_2\rangle, \langle\zeta^i_{*k}\rangle, k = 1,2,3\}, \{X_1, \langle\zeta^i_{*k}\rangle, k = 1,2,\ldots,4\},$$

$$\{X_2, \langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,4\}, \{\langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,5\};$$

6-мерные подалгебры

$$\{X_1, X_2 + \langle\zeta^i_2\rangle, \langle\zeta^i_{*k}\rangle, k = 1,2,\ldots,4\}, \{X_2, \langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,5\}, \{\langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,6\};$$

l-мерные подалгебры, $l \geq 7$,

$$\{X_2, \langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,l-1\}, \{\langle\zeta^i_k\rangle, k = 1,2,\ldots,l\}.$$

Для каждой подалгебры можно рассматривать дифференциально-инвариантные решения [8].

8. Интегральные преобразования системы

В системе (33) вернёмся к физической переменной $t = \xi + \eta$:

$$\begin{gathered} Ru^4_t = u^1_\eta, \quad u^2_t = -u^3 - u^4, \quad u^3_t = tu^4, \\ R^2u^4_\eta - Ru^1_\eta + t(u^3 - u^2_t - u^2_\eta) + u^3_t + u^3_\eta = q(\eta). \end{gathered} \tag{63}$$

Преобразование Фурье по η для функций $f(\eta) \to 0$ при $\eta \to \pm\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\exp^{-i\omega\eta}\,d\eta = \widehat{f}(\omega), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)\exp^{-i\omega\eta}\,d\eta = -i\omega\widehat{f}(\omega)$$

приводит систему (63) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} R\widehat{u}^4_t = -i\omega\widehat{u}^1, \quad \widehat{u}^2_t = -\widehat{u}^3 - \widehat{u}^4, \quad \widehat{u}^3_t = t\widehat{u}^4, \\ -i\omega(R^2\widehat{u}^4 - R\widehat{u}^1) + 2t(\widehat{u}^3 + \widehat{u}^4) + ti\omega\widehat{u}^2 - i\omega\widehat{u}^3 = \widehat{q}i\omega. \end{gathered} \tag{64}$$

Если перейти к одному уравнению для $\widehat{u}^3$, то получится уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами.

Преобразование Лапласа [9] по t ($\widehat{u}^i(\omega,t) \to U^i(\omega,s)$, $\widehat{q} \to Q$) приводит систему (64) к виду

$$R(U^4 - \widehat{u}^4_0) = -i\omega U^1, \quad sU^2 - \widehat{u}^2_0 = -U^3 - U^4, \quad sU^3 - \widehat{u}^3_0 = -U^4_s,$$

$$-R^2U^4 + RU^1 - \left[U^2 - 2i\omega^{-1}(U^3 + U^4)\right]_s - U^3 = Q,$$

где $\widehat{u}^i_0$ — начальные данные функций $\widehat{u}^i(\omega,t)$ при $t = 0$.

Для функции U^4 получим уравнение второго порядка [10]

$$(1 + 2i\omega^{-1}s)sU^4_{ss} - 2(s^2+1)(si\omega^{-1} + 1)U^4_s + s(1+s^2)U^4 =$$

$$= -(Q + i\omega^{-1}R^2\widehat{u}^4_0)s^3 + s\widehat{u}^2_0 - \widehat{u}^3_0(2 + 2i\omega^{-1}s + s^2).$$

Заключение

Для инвариантной подмодели ранга 2 квазилинейной системы гидродинамического типа рассмотрены аналитические способы получения решений: интегралы, характеристический вид, преобразования эквивалентности, групповая классификация по произвольному элементу интеграла, интегральные преобразования. Получены и исследованы некоторые точные решения.

Список литературы

1. **Овсянников, Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика / Л. В. Овсянников // Приклад. математика и механика. — 1994. — Т. 58, вып. 4. — С. 30–55.
2. **Хабиров, С. В.** Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики / С. В. Хабиров // Уфим. мат. журн. — 2011. — Т. 3, вып. 2. — С. 87–90.
3. **Хабиров, С. В.** Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа / С. В. Хабиров // Уфим. мат. журн. — 2014. — Т. 6, вып. 2. — С. 99–103.
4. **Сираева, Д. Т.** Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов / Д. Т. Сираева // Уфим. мат. журнал. — 2014. — Т. 6, вып. 1. — С. 94–107.
5. **Хабиров, С. В.** Лекции. Аналитические методы в газовой динамике / С. В. Хабиров. — Уфа : Гилем, 2003. — 192 с.
6. **Сираева, Д. Т.** Движение объема частиц, соответствующее инвариантному решению подмодели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Тр. Ин-та механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН. — 2016. — Т. 11, вып. 2. — С. 205–209.
7. **Сираева, Д. Т.** Распространение возмущений звуковой волны на инвариантном решении модели ранга 2 гидродинамического типа / Д. Т. Сираева // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании. Математика. Физика. Химия : сб. тр. IX Междунар. шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых (г. Уфа, 3–7 октября 2016 г.). Уфа : РИЦ БашГУ, 2016. — С. 35–42.
8. **Чиркунов, Ю. А.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск : НГТУ, 2012. — 659 с.
9. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1987. — 831 с.
10. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1976. — 576 с.

Поступила в редакцию 28.01.2018
После переработки 15.02.2018

Сведения об авторах

Сираева Дилара Тахировна, аспирант, ассистент кафедры математики, Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; e-mail: sirdilara@gmail.com.

Хабиров Салават Валеевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия; профессор кафедры математики, Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; e-mail: habirov@anrb.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, iss. 1. P. 38–57.

INVARIANT SUBMODEL OF RANK 2 ON SUBALGEBRA OF TRANSLATIONS LINEAR COMBINATIONS FOR A HYDRODYNAMIC TYPE MODEL

D.T. Siraeva[1,a], **S.V. Khabirov**[1,2,b]

[1] *Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia*
[2] *Mavlutov Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center of RAS, Ufa, Russia*
[a] *sirdilara@gmail.com,* [b] *habirov@anrb.ru*

The equations of hydrodynamic type with the equation of state in the form of pressure, represented as a sum of density and entropy functions, are considered in the article. For the invariant submodel of a 2-dimensional subalgebra in the form of a linear combination of translations chosen from the previously constructed optimal system of non-similar subalgebras, we find the integrals of the system, determine the type of the system, reduce the system to the symmetric form and the characteristic form, find exact solutions, define equivalence transformations for the linearized system, the group classification problem is solved, an optimal system of non-similar subalgebras is constructed, and the application of integral transformations is shown.

Keywords: *subalgebra, invariant submodel, exact solution, group classification, equivalence transformation.*

References

1. **Ovsyannikov L.V.** The "podmodeli" program. Gas dynamics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 601–627.
2. **Khabirov S.V.** Nonisomorphic Lie algebras admitted by gasdynamic models. *Ufa Mathematical Journal*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 85–55.
3. **Khabirov S.V.** Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations. *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 97–101.
4. **Siraeva D.T.** Optimal system of non-similar subalgebras of sum of two ideals. *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 90–103.
5. **Khabirov S.V.** *Lektsii. Analiticheskiye metody v gazovoy dinamike* [Lectures. Analytical methods in gas dynamics]. Ufa, Gilem Publ., 2003. 192 p. (In Russ.).
6. **Siraeva D.T.** Dvizheniye obyoma chastits, sootvetstvuyushcheye invariantnomu resheniyu podmodeli ranga 2 gidrodinamicheskogo tipa [The motion of the particles volume corresponding to invariant solution of rank 2 submodel of hydrodynamic type]. *Trudy Instituta mekhaniki imeni R.R. Mavljutova UNTc RAN* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics of Ufa Scientific center of RAS], 2016, vol. 11, no. 2, pp. 205–209. (In Russ.).
7. **Siraeva D.T.** Rasprostraneniye vozmushcheniy zvukovoy volny na invariantnom reshenii modeli ranga 2 gidrodinamicheskogo tipa [Propagation of perturbations of a sound wave on an invariant solution of a hydrodynamic type model of rank 2]. *Fundamental'naya matematika i yeyo prilozheniya v yestestvoznanii. Matematika. Fizika. Khimiya* [Fundamental mathematics and its applications in the natural sciences. Mathematics. Physics.Chemistry]. Proceedings of IX International School-Conference for students, graduate students and young scientists (Ufa, October 3–7, 2016). Ufa, Bashkir State University, 2016. Pp. 35—42. (In Russ.).
8. **Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V.** *Elementy simmetriynogo analiza differentsial'nykh uravneniy mekhaniki sploshnoy sredy* [Elements of differential equations symmetry analysis for continuum mechanics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University, 2012. 659 p. (In Russ.).

9. **Korn G.A., Korn T.M.** *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* McGraw-Hill, Inc., New York, 1961. 943 p.
10. **Kamke E.** *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 576 p. (In Russ.).

Accepted article received 28.01.2018
Corrections received 15.02.2018