М. И. Белишев, Я. В. Курылев, Нестационарная обратная задача для многомерного волнового уравнения “в большом”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 165, 21–30

М.И.Белишев, Я.В.Курылев

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ "В БОЛЬШОМ"

Изучается нестационарная обратная задача для волнового уравнения с переменной скоростью. Распространение волн в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, инициируемых источниками, распределенными на границе $\Gamma = \partial G \in C^2$ описывается решением начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(x)\Delta u = 0\,; \; x = (x^1,\dots,x^n) \in G,\; 0<t<T \\ u\big|_{t<0} = 0\,; \; \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma\times[0,T]} = f(\gamma,t)\,; \; \gamma \in \Gamma\,. \end{cases}$$

Предполагаются выполненными условия

$$(*) \quad c(x) \geqslant c_1 > 0 \quad (x \in \overline{G}) \;; \; (**) \quad c(x) \in C^2(\overline{G}).$$

При $f(\gamma,t) \in L_2(\Gamma\times[0,T])$ решение задачи $u = u^f(x,t) \in L_2(G; c^{-2}) = \mathcal{H}$ $\left((a,b)_{\mathcal{H}} = \int_G dx\, c^{-2}(x)\, a(x)\, b(x)\right)$. Пусть источник точечный: $f(\gamma,t) = \delta(t)\cdot\delta_{\gamma'}(\gamma)$, где $\delta_{\gamma'}(\gamma)$ – поверхностная δ – функция, сосредоточенная в точке $\gamma' \in \Gamma$; $r(x,\gamma',t) = u^{\delta(t)\delta_{\gamma'}(\gamma)}(x,t)$ – – отвечающая ему волна; $r(\gamma,\gamma',t)$ – ее (обобщенный) след на Γ. Обратная задача (О.з.) состоит в восстановлении скорости $c(x)\big|_G$ по $r(\gamma,\gamma',t)$, известному при всех $\gamma,\gamma' \in \Gamma$, $t>0$.

Дополнительно предполагается известной постоянная c_1 из (*). В работе [I] предложена схема ее решения "в малом", вблизи границы. Подход [2], позволяющий, в принципе, решать задачу на любую глубину, использует многомерные интегральные уравнения первого рода и вряд ли пригоден для численной реализации. Здесь предлагается другая схема решения задачи "в большом", на наш взгляд, более перспективная с вычислительной точки зрения.

Со скоростью $c(x)$ связана метрика в G : $\tau(x,y) = \inf \int_x^y \frac{|dz|}{c(z)}$ („$\inf$" – по всем кусочно-гладким кривым, лежащим в $\overline{G}$ и соединяющим x и y. В дальнейшем через $mes_c A$, $diam_c A$ $(A \subset \overline{G})$ мы будем обозначать меру и диаметр множества A в метрике τ. В силу (*) $diam_c A \leqslant \frac{1}{c_1}\, diam\, A$

В нашей работе с помощью итерационной процедуры восстанавливается функция $\tau(x,\gamma)\big|_{G\times\Gamma} = \lim_{\delta\to+0} \tau_{\sigma(\delta)}(x,\gamma)$

(последовательность $\tau_{\sigma(\varepsilon)}(x,\gamma)$ строится по данным о.з.). Очевидно, этого достаточно для нахождения скорости : $c(x) = \left|\frac{\partial}{\partial \ell}\tau(x,\gamma_0)\right|^{-1}$, где $\frac{\partial}{\partial \ell}$ - производная вдоль геодезической нормали, соединяющей γ_0 и x. Как и в [I, 2], в основе схемы лежат соотношения А.С.Благовещенского и свойство полноты волн в "захваченной" области. Работа состоит из двух частей, написанных соответственно первым и вторым авторами.

I. Соотношения Благовещенского. Для произвольных источников $f(\gamma,t),\ g(\gamma,t) \in L_2(\Gamma\times[0,T]) = F^T$ и отвечающих им волн справедливо равенство:

$$(u^f(\cdot,T),u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}} = (C^T f, g)_{F^T}, \qquad \text{(Б)}$$

где C^T - введенный в [2] оператор в F^T :

$$C^T f(\gamma,t) = \int\limits_{\Gamma\times[0,T]} d\gamma' ds\left[\frac{1}{2}\int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s}\tau(\gamma,\gamma',\xi)\,d\xi\right] f(\gamma',s).$$

Если функция $v(x)$ гармонична : $\Delta v(x) = 0$ $x \in G$ и $v\big|_\Gamma,\ \frac{\partial v}{\partial n}\big|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$, то

$$\left(u^f(\cdot,T),v\right)_{\mathcal{H}} = \left(\varkappa^T v\big|_\Gamma - R^*\left[\varkappa^T\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma\right], f\right)_{F^T}, \qquad \text{(I.I)}$$

где $\varkappa^T(t) = T - t$ и R^* - оператор, сопряженный в F^T к оператору $R: Rg(\gamma,t) = \int\limits_{\Gamma\times[0,t]} d\gamma' ds\ \tau(\gamma,\gamma',t-s)\,g(\gamma',s)$. Подчеркнем, что для заданных $f,\ g,\ v\big|_\Gamma,\ \frac{\partial v}{\partial n}\big|_\Gamma$ правые части (Б) и (I.I) выражаются через данные о.з.

Полнота системы волн. Пусть $Q^T(\Sigma) = \{x\in G : \tau(x,\Sigma) < T\}$ - подобласть G, захваченная к моменту $t = T$ волной от части границы $\Sigma \subseteq \Gamma$, $\operatorname{mes}\Sigma > 0$; $\Sigma^T = \{x\in G : \tau(x,\Sigma) = T\}$ - фронт волны; $\mathcal{H}(Q^T(\Sigma)) = \{a(x)\in\mathcal{H} : \operatorname{supp} a(x) \subset Q^T(\Sigma)\} \subseteq \mathcal{H}$; $F^T(\Sigma) = \{f(\gamma,t)\in F^T : \operatorname{supp} f \subset \Sigma\times[0,T]\} \subseteq F^T$;

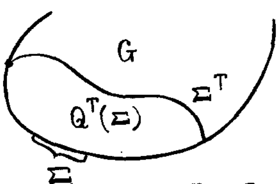

Рис.I

Из теоремы единственности Хольмгрена-Йона [I - 3] выводится

ТЕОРЕМА: пусть $\{f_K(\gamma,t)\}_{K=1}^{\infty}$ - система источников, полная в $F^T(\Sigma)$: $\overline{\Lambda\{f_K(\gamma,t)\}} = F^T(\Sigma)$, тогда

$$\overline{\Lambda\{u^{f_K}(x,T)\}_{K=1}^{\infty}} = \mathcal{H}(Q^T(\Sigma)) \tag{I.2}$$

(Λ - линейная оболочка, черта - замыкания в F^T и $\mathcal{H}$).

Проекторы P_{Σ}^{T}. Пусть $\{f_K(\gamma,t)\}_{K=1}^{\infty}$ - некоторая система источников, полная в $F^T(\Sigma)$. По ней с помощью процесса ортогонализации Шмидта по форме $(C^T\cdot,\cdot)_{F^T}$ построим другую полную систему $\{h_K(\gamma,t)\}_{K=1}^{\infty}$: $(C^T h_K, h_\ell)_{F^T} = \delta_{K\ell}$. В силу (I.2) волны $\{u^{h_K}(x,T)\}_{K=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}(Q^T(\Sigma))$: $(u^{h_K}(\cdot,T), u^{h_\ell}(\cdot,T))_{\mathcal{H}} = (C^T h_K, h_\ell)_{F^T} = \delta_{K\ell}$. Оператор P_{Σ}^{T} :

$$P_{\Sigma}^{T} a(x) = \sum_{K=1}^{\infty} (a, u^{h_K}(\cdot,T))_{\mathcal{H}}\, u^{h_K}(x,T) \tag{I.3}$$

является (орто)проектором в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}(Q^T(\Sigma))$. Его действие сводится к срезке функций на $Q^T(\Sigma)$: $P_{\Sigma}^{T} a(x) = \chi(x; Q^T(\Sigma))\, a(x)$ ($\chi(x;E)$ - индикатор множества $E \subseteq G$). Отметим очевидное свойство коммутации: $P_{\Sigma_1}^{T_1} P_{\Sigma_2}^{T_2} = P_{\Sigma_2}^{T_2} P_{\Sigma_1}^{T_1}$ для $\forall\ \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Gamma$; $T_1, T_2 > 0$.

Разбиение области. Задавшись положительным δ, разобьем границу Γ на части $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$: $\Sigma_K = \Sigma_K(\delta)$, $m = m(\delta)$,

$$\bigcup_{K=1,\ldots,m} \Sigma_K = \Gamma,\ \Sigma_K \cap \Sigma_\ell = \emptyset\ (K \neq \ell),\ \operatorname{mes}\Sigma_K > 0,\ \operatorname{diam}_C \Sigma_K \leqslant \delta .$$

Разбиение обозначим $\sigma(\delta) = \{\Sigma_K\}_{K=1}^{m}$. С шагом (по времени), величина которого равна тому же δ, построим в G семейство фронтов $\Sigma_K^{p\delta} = \{x \in G : \tau(x, \Sigma_K) = p\delta\}$ $p = 0, 1, \ldots, N$; $N = N(\delta)$, $\Sigma_K^{0} \equiv \Sigma_K$

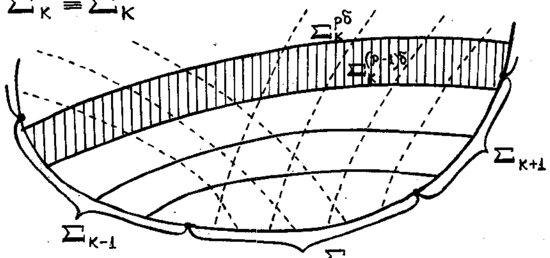

Рис.2

Число шагов $N = N(\delta)$ выберем таким, чтобы $N\delta \geqslant diam_c\, G$ т.е. чтобы каждая из захваченных областей $Q^{N\delta}(\Sigma_\kappa)(\Sigma_\kappa \in \sigma(\delta))$ заведомо покрывала G. На рис.2 штриховкой указан "слой" $Q^{p\delta}(\Sigma_\kappa)\setminus Q^{(p-1)\delta}(\Sigma_\kappa)$, заключенный между фронтами $\Sigma_\kappa^{p\delta}$ и $\Sigma_\kappa^{(p-1)\delta}$. Семейство фронтов $\{\Sigma^{p\delta}\}_{\substack{\kappa=1,\ldots,m(\delta)\\ p=1,\ldots,N(\delta)}}$ разбивает G на подобласти $\Pi^{j}_{\sigma(\delta)}$ (j - мультииндекс : $j=(j_1,\ldots$ $\ldots, j_{m(\delta)})$; $1 \leqslant j_1,\ldots,j_{m(\delta)} \leqslant N(\delta)$), каждая из которых является пересечением "слоев" $\Pi^{j}_{\sigma(\delta)} = \mathrm{Int} \bigcap\limits_{\kappa=1,\ldots,m(\delta)} \left[Q^{j_\kappa\delta}(\Sigma_\kappa)\setminus Q^{(j_\kappa-1)\delta}(\Sigma_\kappa)\right]$ (Int - внутренность). Это разбиение удобно представить в виде дизъюнктной суммы по всем возможным мультииндексам:

$$G = \bigcup_j \Pi^{j}_{\sigma(\delta)}\,;\ \mathrm{mes}_c\left[G\setminus \bigcup_j \Pi^{j}_{\sigma(\delta)}\right] = 0 \tag{I.4}$$

(т.е. первое равенство выполнено с точностью до множества нулевой меры). Отметим, что некоторые слагаемые суммы суть пустые множества, как, например, $\Pi^{(1,\ldots,1)}_{\sigma(\delta)}$ на рис.2.

<u>Сетка центров масс</u>. Каждой из подобластей $\Pi^{j}_{\sigma(\delta)}$ ненулевой меры сопоставим проектор $P^{j}_{\sigma(\delta)} = \left(P^{j_1\delta}_{\Sigma_1}\ominus P^{(j_1-1)\delta}_{\Sigma_1}\right)\cdot\left(P^{j_2\delta}_{\Sigma_2}\ominus P^{(j_2-1)\delta}_{\Sigma_2}\right)\ldots$ $\ldots\left(P^{j_m\delta}_{\Sigma_m}\ominus P^{(j_m-1)\delta}_{\Sigma_m}\right)$, срезающий функции на $\Pi^{j}_{\sigma(\delta)}$.

Очевидно, что $P^{j}_{\sigma(\delta)}1$ совпадает с индикатором $\chi(x;\Pi^{j}_{\sigma(\delta)})$. Пусть $\pi^i(x) = x^i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ суть координатные функции. Отметим в G "центр масс" $\Pi^{j}_{\sigma(\delta)}$ - точку $\bar{x}_{\sigma(\delta)}(j)$ с координатами

$$\begin{aligned}\bar{x}^i_{\sigma(\delta)}(j) &= \left(P^{j}_{\sigma(\delta)}1,1\right)^{-1}_{\mathcal{H}}\cdot\left(P^{j}_{\sigma(\delta)}1,\pi^i\right)_{\mathcal{H}} = \\ &= \left[\int\limits_{\Pi^{j}_{\sigma(\delta)}} dx\, c^{-2}(x)\right]^{-1}\cdot\left[\int\limits_{\Pi^{j}_{\sigma(\delta)}} dx\, c^{-2}(x)\pi^i(x)\right].\end{aligned} \tag{I.5}$$

Решающим для о.з. оказывается следующее обстоятельство:равенства (I.5) позволяют вычислять координаты центров масс через данные о.з. В самом деле, вычисление входящих в (I.4) скалярных произведений сводится к нахождению величин вида $\left(P^{T_1}_{\Sigma_1}P^{T_2}_{\Sigma_2}\ldots P^{T_m}_{\Sigma_m}v, w\right)_{\mathcal{H}}$ с $v = w = 1$ или $v = 1$, $w = \pi^i(x)$. Для этого надо на каждой части $\Sigma_\kappa \in б(\delta)$ выбрать по полной C^T - ортонормированной системе источников (последовательно для всех $T = \delta, 2\delta, \ldots, N\cdot\delta$) и воспользоваться представлениями (Б), (I.I), (I.3). Совокупность центров масс $\bar{X}_{б(\delta)} = \{\bar{x}_{б(\delta)}(j)\}_j$ образует сетку на G .

Сеточные аппроксимации $\tau_{б(\delta)}(x,\gamma)$. Идея построения аппроксимаций, сходящихся к функции $\tau(x,y)|_{G\times\Gamma}$ основана на следующем наблюдении: для достаточно мелких разбиений (малых δ) справедливо приближенное равенство:

$$\tau(x,\gamma)\Big|_{\Pi^j_{б(\delta)}\times\Sigma_\kappa} \approx \tau(\bar{x}_{б(\delta)}(j),\gamma) \approx j_\kappa\cdot\delta \quad (\kappa=1,\ldots,m(\delta)). \tag{I.6}$$

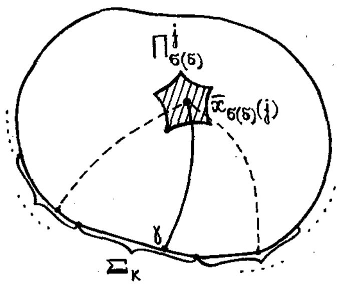

Рис.3

При фиксированном δ аппроксимация $\tau_{б(\delta)}(x,\gamma)$ определяется разбиением $б(\delta)$ и строится так: По данным о.з. согласно (I.5) в G отмечается сетка центров масс $\bar{X}_{б(\delta)} = \{\bar{x}_{б(\delta)}(j)\}_j$. Затем в соответствии с (I.6), на $\bar{X}_{б(\delta)}\times\Gamma$ вводится функция

$$\tau_{б(\delta)}(x,\gamma)\Big|_{\substack{x=\bar{x}_{б(\delta)}(j)\\ \gamma\in\Sigma_\kappa}} = j_\kappa\cdot\delta, \tag{I.7}$$

кусочно-постоянная по γ . При этом, если для некоторого разбиения $б(\delta)$ окажется, что $\bar{x}_{б(\delta)}(j') = \bar{x}_{б(\delta)}(j'')$ $(j'\neq j'')$

то в определении (I.6) можно взять любое из возможных значений $j'_\kappa\delta$ или $j''_\kappa\delta$. Основным результатом § 2 является доказательство сходимости:

$$\tau_{б(\delta)}(x,\gamma) \xrightarrow[\delta\to+0]{} \tau(x,\gamma) \tag{I.8}$$

(сходимость аппроксимаций, определенных на сгущающейся последовательности сеток понимается в обычном смысле). Как отмечалось, по $\tau(x,\gamma)$ скорость $c(x)$ восстанавливается дифференцированием вдоль геодезической нормали, соединяющей x и γ. Детали ее построения см. в § 2.

2. Свойства геодезического расстояния. Из условий (*), (**) следует, что $\tau(x,y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$. Введем отображение $\mathcal{F}$: $\overline{G} \longrightarrow C(\Gamma)$ вида $\mathcal{F}(x) = \tau(x,\cdot)$. Тогда $\mathcal{F}$ - это непрерывное отображение компактного метрического пространства $\overline{G}$ на метрическое пространство $C_{\overline{G}}(\Gamma) = \mathcal{F}(\overline{G}) \subset C(\Gamma)$ с метрикой, индуцированной $C(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА I. Отображение $\mathcal{F}: \overline{G} \longrightarrow C_{\overline{G}}(\Gamma)$ - это непрерывная, открытая биекция $\overline{G}$ на компактное метрическое пространство $C_{\overline{G}}(\Gamma)$.

Для доказательства теоремы нам потребуется вспомогательная метрика на $\overline{G}$. Пусть $\hat{c}(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{c}(x) > 0$ и $\hat{c}(x) = 1$ при достаточно больших $|x|$ такая, что $\hat{c}(x) = c(x)$ при $x \in \overline{G}$. Построение скорости $\hat{c}(x)$, обладающей указанными свойствами проводится стандартным методом (см. [4], гл.I, § 5).

Введем в $\mathbb{R}^n$ метрику $\hat{\tau}(x,y) = \inf \int\limits_x^y \frac{|dz|}{\hat{c}(z)}$ („inf" - по всем кусочно-гладким кривым в $\mathbb{R}^n$, соединяющим x и y). При этом

$$\frac{|x-y|}{\hat{c}_1} \leqslant \hat{\tau}(x,y) \leqslant \frac{|x-y|}{\hat{c}_2}, \tag{2.I}$$

где $\hat{c}_1 = \min\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{c}(x) > 0$, $\hat{c}_2 = \max\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{c}(x) < \infty$. Из (2.I) вытекает, что $\mathbb{R}^n$, снабженное метрикой $\hat{\tau}$, - это полное риманово пространство. В силу теоремы Хопфа-Ринова (см., напр., [5], гл.5, § 3) любые $x, y \in \mathbb{R}^n$ можно соединить хотя бы одной геодезической $l_0(x,y)$, на которой достигается геодезическое расстояние $\hat{\tau}(x,y) = \int\limits_{l_0(x,y)} \frac{|dz|}{\hat{c}(z)}$.

Метрика $\hat{\tau}$, суженная на $\overline{G} \times \Gamma$, задает отображение $\hat{\mathcal{F}}: \overline{G} \longrightarrow C(\Gamma): \hat{\mathcal{F}}(x) = \hat{\tau}(x,\cdot)$; очевидно $\hat{\tau}(x,\gamma) \leqslant \tau(x,\gamma)$ при $x \in \overline{G}$, $\gamma \in \Gamma$. Обозначим через $M_{\hat{\tau}}(x) = \{\gamma \in \Gamma : \hat{\tau}(x,\gamma) = \min\limits_{\gamma' \in \Gamma} \hat{\tau}(x,\gamma')\}$; аналогично определим

ЛЕММА I.
$$M_{\tau}(x) = M_{\hat{\tau}}(x) \tag{2.2}$$

$$\tau(x,\gamma)=\hat{\tau}(x,\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma\in M_{\tau}(x). \tag{2.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x=\gamma_0\in\Gamma$ утверждение очевидно.

Пусть $x\in G$ и $\gamma\in M_{\hat{\tau}}(x)$. По теореме Хопфа-Ринова $\exists$ геодезическая $l_0(\gamma,x)$, соединяющая γ и x (см.рис.4). Эта кривая не имеет общих точек с Γ за исключением начальной точки γ.

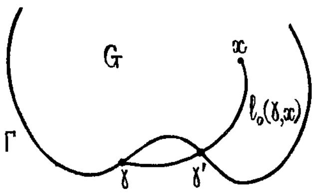

Рис.4

Действительно, если бы нашлась точка $\gamma'\in$ $\in l_0(\gamma,x)\cap\Gamma$, $\gamma'\neq\gamma$, то $\hat{\tau}(\gamma',x)\leqslant\int\limits_{l_0(\gamma',x)}\frac{|dz|}{\hat{c}(z)}<$

$<\int\limits_{l_0(\gamma,x)}\frac{|dz|}{\hat{c}(z)}=\hat{\tau}(\gamma,x)$, что противоречит условию $\gamma\in M_{\hat{\tau}}(x)$.

Итак, $l_0(\gamma,x)\subset\overline{G}$, откуда $\tau(\gamma,x)\leqslant\int\limits_{l_0(\gamma,x)}\frac{|dz|}{c(z)}=$ $=\int\limits_{l_0(\gamma,x)}\frac{|dz|}{\hat{c}(z)}=\hat{\tau}(\gamma,x)$.

Так как $\hat{\tau}(x,\gamma)\leqslant\tau(x,\gamma)$, то при $\gamma\in M_{\hat{\tau}}(x)$ выполнено (2.3) и имеет место включение $M_{\hat{\tau}}(x)\subset M_{\tau}(x)$. Обратное включение очевидно, что доказывает (2.2).

Нетрудно показать также, что геодезическая $l_0(\gamma,x)$ при $\gamma\in M_{\tau}(x)$ нормальна Γ в точке γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу непрерывности $\mathcal{F}$ и компактности $\overline{G}$ для доказательства теоремы достаточно показать инъективность и открытость $\mathcal{F}$.

А) Пусть $\tau(x_1,\cdot)=\tau(x_2,\cdot)$; тогда и $M_{\tau}(x_1)=M_{\tau}(x_2)$ Выберем $\gamma\in M_{\tau}(x_i)$ и проведем геодезическую нормаль $l_0(\gamma)$ к Γ в точке γ. Тогда из замечания после леммы I следует, что точки x_1 и x_2 лежат на $l_0(\gamma)$ на геодезическом расстоянии $\tau(x_1,\gamma)=\tau(x_2,\gamma)$, т.е. $x_1=x_2$.

б) Покажем, что $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ такое, что если

$\|\tau(x_1,\cdot)-\tau(x_2,\cdot)\|_{C(\Gamma)}\leqslant\delta$, то $|x_1-x_2|\leqslant\varepsilon$.

Предположим противное: $\exists\,\varepsilon_0>0$ такое, что для некоторых последовательностей $\{x_1(\kappa)\}$ и $\{x_2(\kappa)\}$ таких что $\|\tau(x_1(\kappa),\cdot)-$ $-\tau(x_2(\kappa),\cdot)\|_{C(\Gamma)}\longrightarrow 0$, тем не менее $|x_1(\kappa)-x_2(\kappa)|>\varepsilon_0$.

Так как $\overline{G}$ компактно, из $\{x_1(k)\}$, $\{x_2(k)\}$ можно выбрать сходящиеся подполсдедовательности (которые мы считаем совпадающими с исходными): $x_1(k) \longrightarrow x_1$, $x_2(k) \longrightarrow x_2$ при $k \longrightarrow \infty$. Имеем $\|\tau(x_1,\cdot)-\tau(x_2,\cdot)\|_{C(\Gamma)} = \lim\limits_{k\to\infty}\|\tau(x_1(k),\cdot)-\tau(x_2(k),\cdot)\|_{C(\Gamma)} =$

$= 0$, но с другой стороны $|x_1-x_2| = \lim\limits_{k\to\infty}|x_1(k)-x_2(k)| \geq \varepsilon_0$, что противоречит инъективности $\mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ I. Существует положительная неубывающая функция $\mu(\rho): \mu(\rho) \to 0\ (\rho \to +0)$, такая что $|x_1 - x_2| \leq \mu(\rho)$ при $\|\tau(x_1,\cdot) - \tau(x_2,\cdot)\|_{C(\Gamma)} \leq \rho$.

Перейдем к доказательству соотношения (I.8), позволяющего восстановить $\tau(x,\gamma)$ при $x \in \overline{G}$, $\gamma \in \Gamma$ по данным о.з.

Итак, нам дана $\tau(\gamma,\gamma',t)$ при $\gamma,\gamma' \in \Gamma$, $t > 0$. Выберем $\delta > 0$ и построим конечное покрытие $\sigma(\delta)$ границы Γ, как это сделано в § I. С помощью равенств (I.5) определим сетку $\overline{X}_{\sigma(\delta)}$. Заметим, что если $x \in \Pi^{j}_{\sigma(\delta)}$ (см.рис.3), то

$$(j_k - 1)\delta < \tau(x, \Sigma_k(\delta)) < j_k\delta \tag{2.4}$$

и $\tau(\gamma,\gamma') \leq \mathrm{diam}_C \Sigma_k(\delta) \leq \delta$ при $\gamma,\gamma' \in \Sigma_k$. Поэтому $\|\tau(x_1,\cdot) - \tau(x_2,\cdot)\|_{C(\Gamma)} \leq 2\delta$ при $x_1, x_2 \in \Pi^{j}_{\sigma(\delta)}$, откуда в силу следствия I

$$|x_1 - x_2| \leq \mu(2\delta) \quad \forall x_1, x_2 \in \Pi^{j}_{\sigma(\delta)}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) и определения $\overline{x}_{\sigma(\delta)}(j)$ вытекает, что

$$|x - \overline{x}_{\sigma(\delta)}(j)| \leq \mu(2\delta) \quad \text{при } \forall x \in \Pi^{j}_{\sigma(\delta)}, \tag{2.6}$$

откуда в силу (2.4)

$$|\tau(\gamma, \overline{x}_{\sigma(\delta)}(j)) - j_k \cdot \delta| \leq \delta + \frac{1}{C_1}\mu(2\delta) \equiv \mu_1(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0. \tag{2.7}$$

Пусть теперь x_0 – произвольная точка $\overline{G}$, $\delta \to 0$ и $\sigma(\delta)$ – соответствующее разбиение Γ. Обозначим $\overline{x}_0(\delta) \in \overline{X}_{\sigma(\delta)}$ точку, ближайшую к x_0 (если таких точек несколько, то выбираем любую).

ЛЕММА 2. Пусть $\gamma_0 \in \Gamma$ и $k(\delta)$ таково, что $\gamma_0 \in \Sigma_{k(\delta)} \in \sigma(\delta)$. Тогда

$$\tau(x_0,\gamma_0)=\lim_{\delta\to 0} j_{K(\delta)}\cdot\delta . \qquad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.4), (2.6) и определения $\bar{x}_0(\delta)$ следует, что $|\bar{x}_0(\delta)-x_0|\le\mu(2\delta)\xrightarrow[\delta\to 0]{}0$. Поэтому

$$\tau(\bar{x}_0(\delta),\gamma_0)\xrightarrow[\delta\to 0]{}\tau(x_0,\gamma_0) \qquad (2.8)$$

и равенство (1.8) немедленно следует из (2.7) и (2.8).

Итак, по данным о.з. мы можем построить $\tau(x,\gamma)$ при $x\in\bar{G}$, $\gamma\in\Gamma$. Нетрудно отсюда получить $c(x)$. Выберем $\gamma\in M_\tau(x)$ и проведем геодезическую нормаль $\ell_0(\gamma)$, выходящую из точки γ и проходящую через точку x : $\ell_0(\gamma)=\{y\in\bar{G}:\gamma\in M_\tau(y)\}$. Тогда $c^{-1}(x)=\frac{\partial\tau(x,\gamma)}{\partial\ell_0}$, где производная берется вдоль $\ell_0(\gamma)$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Восстановление $c(x)$ по $\tau(\gamma,\gamma',t)$ - задача переопределенная. Действительно, нам требуется восстановить функцию n переменных $c(x)$ по функции $(2n-1)$ переменных $\tau(\gamma,\gamma',t)$. Вместе с тем заметим, что в предложенной модификации метода [1] мы восстанавливаем функцию $\tau(x,\gamma), x\in\bar{G}, \gamma\in\Gamma$ зависящую от $(2n-1)$ параметров по $\tau(\gamma,\gamma',t)$, т.е. (во всяком случае на уровне подсчета параметров) задача восстановления $\tau(x,y)$ по $\tau(\gamma,\gamma',t)$ не является переопределенной, и переопределенность возникает при переходе от $\tau(x,\gamma)$ к $c(x)$. Поэтому, по-видимому, условия на $\tau(\gamma,\gamma',t)$, достаточные для разрешимости (о.з.), тесно связаны с условиями на функцию $\tau:\bar{G}\times\Gamma\longrightarrow\mathbb{R}_+$ достаточными для того, чтобы ей соответствовала метрика, порожденная некоторой скоростью $c(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предложенная схема без существенных изменений применима и для решения о.з. в спектральной постановке (см. [1] ; [6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим локальный (по времени) характер используемой процедуры : по $\tau(\gamma,\gamma',t)$, известному лишь для $t\in[0,2T]$, используя модификацию описанной итерационной схемы, можно восстановить $c(x)$ в приграничном слое $Q^T(\Gamma)$, геодезической толщины T (см.рис.5).

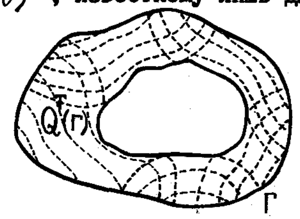

Рис.5

Литература

1. Б е л и ш е в М.И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. Докл.АН СССР, 1987, т.296, М., с.13-16.
2. Б е л и ш е в М.И. Уравнения типа Гельфанда-Левитана в многомерной обратной задаче для волновго уравнения. Наст.сборник, с. 15-20.
3. R u s s e l l D.L. Controlability and stabilizability theory for linear partial differential equations.SIAM Review, 1978, v.20, N 4, p.639-739.
4. Т е й л о р М. Псевдодифференциальные операторы. М., 1985, 472 с.
5. Г р о м о л Д, К л и н г е н б е р г В., М е й е р В. Риманова геометрия в целом. М., 1971, 343 с.
6. Б е л и ш е в М.И., К у р ы л е в Я.В., Обратная задача акустического рассеяния в пространстве с локальной неоднородностью. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн,16. Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.156, с.24-34.