V. G. Nikonov, V. S. Litvinenko, Geometrical approach to the argumentum of bijection of one coordinate-threshold reflection,
Comp. nanotechnol., 2015, Issue 4, 26–30

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

2.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ БИЕКТИВНОСТИ ОДНОГО КООРДИНАТНО-ПОРОГОВОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Никонов Владимир Глебович, доктор технических наук, член Президиума РАЕН

Литвиненко Виталий Сергеевич, сотрудник ФГУП «НИИ «КВАНТ». E-mail: vslitvinenko@mail.ru

Аннотация: Использование пороговых операций представляется перспективным направлением построения узлов переработки дискретной информации, ввиду потенциальной возможности реализации вычисления скалярного произведения непосредственно в среде-носителе сигнала, например, перспективных оптических вычислительных средах.

В статье анализируется представление в пороговом базисе биективных отображений двоичных векторов, обладающих простотой реализацией как исходного, так и обратного преобразования с помощью, так называемых, квазиадамаровых матриц A_n. В настоящее время эмпирически показана биективность таких отображений при n = 4, 6, 8, однако, не было дано соответствующих строгих доказательств. В данной работе приводится первое подобное доказательство, основанное на изучении геометрических свойств отображения, порожденного квазиадамаровой матрицей A_4.

В ходе доказательства установлено, что оно носит уникальный характер и возможно в предложенном виде лишь при n = 4. Вместе с доказательством важного прикладного утверждения о биективности отображения, заданного квазиадамаровой матрицей A_4, в статье выделены интересные особенности его геометрической интерпретации.

Ключевые слова: биективные отображения, пороговые функции, многомерные конусы, квазиадамаровы матрицы.

GEOMETRICAL APPROACH TO THE ARGUMENTUM OF BIJECTION OF ONE COORDINATE-THRESHOLD REFLECTION

Nikonov Vladimir Glebovich, Doctor of Technical Sciences, a member of the Presidium of Russian Academy of Natural Sciences

Litvinenko Vitaly Sergeevich, employee of Federal State Unitary Enterprise Scientific Research Institute KVANT. E-mail: vslitvinenko@mail.ru

Abstract: The application of threshold operations is the perspective direction of the construction of discrete information processing nodes considering the potential possibility of realization of calculating the scalar product directly in the carrier signal, for instance, perspective optical computing medium.

The article analyzes the reflection of bijective binary vectors with simple implementation of both the initial and inverse transformation by means of so-called quasi-hadamard matrices A_n in threshold basis. Currently bijection of such reflection is empirically shown for n = 4, 6, 8, however there was no relevant strict proof. The first relevant proof based on the study of the geometrical properties of the reflection generated by quasi-hadamard matrice A_4 is provided in this work.

During the proof it was found that it is unique and possible as proposed only for n = 4. The article highlights the interesting features of its geometrical interpretation together with the proof of important applied statement about bijection of reflection generated by quasi-hadamard matrice A_4.

Index terms: bijections, threshold functions, multivariate cones, quasi-hadamard matrices.

Рассмотрим произвольное преобразование F пространства V_n, заданное системой координатных функций $(f_1, \dots, f_n)$. В этом случае преобразование

$F: (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow (y_1, \ldots, y_n)$,
где $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in V_n$
записывается в виде

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n); \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n); \\ \ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad (1)$$

где f_i , $i \in \overline{1,n}$ – двоичные функции от *n* переменных. Важнейшим прикладным требованием, предъявляемым к преобразованию F пространства V_n, является его биективность. Пороговые функции представляют интерес в связи с простотой технической реализации, а также в связи со своими вычислительными возможностями.

Напомним определение двоичной пороговой функции.

Определение 1: Двоичная функция $f: V_n \rightarrow V_1$ называется *пороговой*, если для некоторых действительных чисел $a_1, \ldots, a_n, c$ значения функции f определяются условием:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow a_1 x_1 + \ldots a_n x_n \geq c, \qquad (2)$$

где суммирование производится в действительной области. Действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ получили название *коэффициентов линейной формы*, а *c – порога*.

Для одной и той же пороговой функции коэффициенты и значение порога могут выбираться неоднозначно.

Определение 2: *Квазиадамаровой матрицей* будем называть квадратную матрицу над полем действительных чисел, состоящую из элементов {-1, 0, 1}, с попарно ортогональными строками и имеющую чётный размер, причём каждая строка и каждый столбец такой матрицы содержат хотя бы один нуль и хотя бы один отличный от нуля элемент.

Пусть *L* – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ размерности *n*. Рассмотрим множество V_n векторов, состоящих из ±1, которое образует *n*-мерный двоичный куб.

При построении биективных отображений будем использовать квазиадамаровы матрицы следующего вида:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{2,1} & \ldots & 0 & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $a_{i,j}$ = ±1, со свойством $A_n A_n^T = (n-1)E$.

Заметим, что матрицы подобного вида, так называемые конференс-матрицы, изучались Витольдом Белевичем (см [1]) и рассматривались в работе [6].

Определение 3: На множестве V_n определим *координатно-пороговое отображение* $S_{A_n}: V_n \rightarrow V_n$, задаваемое матрицей A_n. Пусть $(u_1,\ldots,u_n), (v_1,\ldots,v_n) \in V_n$,

$S_{A_n}((u_1,\ldots,u_n)) = (v_1,\ldots,v_n)$,

где

$$\begin{cases} v_1 = 1 <=> a_{1,1}u_1 + \cdots + a_{1,n-1}u_{n-1} > 0 \\ \ldots \\ v_n = 1 <=> a_{n,2}u_2 + \cdots + a_{n,n}u_n > 0 \end{cases}$$

(4)

Замечание 1: Отображение S_{A_n} можно задать эквивалентным образом. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{u} \in V_n$, $\vec{u}A = \vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Тогда $S_A(\vec{u}) = \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i = sign(c_i)$, $i = \overline{1,n}$, а функция знака определяется условием $sign(a) = \begin{cases} 1, a > 0 \\ -1, a < 0 \\ 0, a = 0 \end{cases}$.

Замечание 2: Так как размер матриц вида (3) четен (см [1]), то, в условиях замечания 1, $c_i = \vec{v} A_i^{\downarrow}$ – нечетное целое число.

Задачей данной работы является исследование вопроса о биективности координатно-порогового отображения S_A. В докладе предлагается оригинальное геометрическое доказательство биективности отображения S_A для случая n = 4. Эмпирически было зафиксировано существование матриц, задающих биективное координатно-пороговое отображение, при n = 4, 6, 8, однако при n = 10, 12 были найдены матрицы, задающие не биективные координатно-пороговые отображения.

Определение 4: *Элементарными преобразованиями* матрицы будем называть перестановку строк, перестановку столбцов, умножение строки на -1 и умножение столбца на -1.

Зафиксируем квазиадамарову матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Система (4) для координатно-порогового отображения S_{A_4}*((u₁,u₂,u₃,u₄)) = (v₁,v₂,v₃,v₄)*, задаваемого матрицей (5), примет вид

$$\begin{cases} v_1 = 1 <=> u_1 + u_2 + u_3 > 0 \\ v_2 = 1 <=> u_1 - u_2 + u_4 > 0 \\ v_3 = 1 <=> u_1 - u_3 - u_4 > 0 \\ v_4 = 1 <=> u_2 - u_3 + u_4 > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Пример 1: Рассмотрим вектор $\vec{u} = (-1,1,-1,1)$. Подставляя вектор $\vec{u}$ в систему неравенств (6), получим

$$(-1) + 1 + (-1) < 0$$
$$(-1) - 1 + 1 < 0$$
$$-1 - (-1) - 1 < 0$$
$$1 - (-1) + 1 > 0,$$

откуда $S_{A_4}(\vec{u}) = \vec{v} = (-1,-1,-1,1)$. Образ вектора $\vec{u}$ при отображении S_{A_4} можно вычислить и другим способом. Умножим $\vec{u}A_4 = \vec{c} = (-1,-1,-1,3)$ и, покоординатно применив к вектору $\vec{c}$ функцию знака, вновь придем к вектору $\vec{v} = (-1,-1,-1,1)$.

Замечание 3: Любая квазиадамарова матрица A_n порядка 4 с помощью элементарных преобразований сводится к матрице A_4. Справедливость этого факта можно установить непосредственной проверкой.

Определение 5: Пусть $v_i = \pm 1$, $i = \overline{1,n}$. *Ортант* $Ort((v_1, v_2,\ldots, v_n))$ в $\mathbb{R}^n$ есть подмножество

$\{(x_1,\ldots,x_n) \mid v_i x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\}$.

Определение 6: Назовем *i-ым ребром* ортанта $Ort((v_1, v_2,\ldots, v_n))$ множество

$\{(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0) \mid v_i x_i \geq 0\}$.

Определение 7: Луч, порожденный вектором $\vec{v} = (v_1, v_2,\ldots, v_n)$, где $v_i = \pm 1$, $i = \overline{1,n}$, назовем *биссектрисой* ортанта $Ort(\vec{v})$. Определение является корректным, так как в каждом ортанте лежит ровно один вектор указанного вида, причем углы между ним и каждым из ребер ортанта совпадают и равны $arcos\sqrt{\frac{1}{n}}$.

Определение 8: Назовем *i-ой гранью* ортанта $Ort((v_1, v_2,\ldots, v_n))$ подмножество

$\{\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \mid \vec{x} \in Ort((v_1, v_2,\ldots, v_n)),\ x_i = 0\}$.

Определение 9: *Опорным конусом*, ассоциированным с вектором $\vec{v} \in V_n$, будем называть конус, вершина которого имеет координату (0,…,0), высота совпадает с биссектрисой ортанта $\vec{v}$, а угол раствора равен $2arcos\sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

Замечание 4: Опорный конус, ассоциированный с вектором $\vec{v} = (v_1,\ldots, v_n)$, вписан в $Ort(\vec{v})$, касается каждой грани этого ортанта. Рассмотрим произвольное $i \in \overline{1,n}$. Вектор $\vec{\alpha} = (v_1,\ldots,v_{i-1},0,v_{i+1},\ldots, v_n)$ назовем *проекцией* биссектрисы опорного конуса $\vec{v}$ на *i*-ую грань. Вектор $\vec{\alpha}$ лежит на опорном конусе, ввиду того, что $cos(\vec{\alpha}, \vec{v}) = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

С другой стороны, для любого вектора $\vec{\beta} = (x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$ из *i*-ой грани

$$cos(\beta, \vec{v}) = \frac{(\beta,\vec{v})}{|\beta||\vec{v}|} = \frac{v_1x_1+\cdots+v_nx_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{\frac{(v_1x_1+\cdots+v_nx_n)}{n-1}}{\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n-1}}}.$$

Заметим, что $v_i x_i = |x_i|$, а $(v_i x_i)^2 = x_i^2$. По неравенству о средних

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n-1}} \geq \frac{(v_1x_1+\cdots+v_nx_n)}{n-1},$$

поэтому $arcos(\beta, \vec{v}) \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Следовательно, ни один вектор, лежащий на грани, не лежит внутри конуса, то есть опорный конус касается граней.

Рассмотрим координатно-пороговое отображение с геометрической точки зрения. Матрица $\widehat{A_n} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}A_n$ – матрица поворота, то есть ортогональная матрица, которая используется для выполнения ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. Каждой матрице поворота $\widehat{A_n}$ соответствует поворот векторного пространства *L*, который определяется умножением векторов из *L* на $\widehat{A_n}$. Причем, так как $\vec{0}\widehat{A_n} = \vec{0}$, то поворот осуществляется относительно начала координат. Далее, $\widehat{A_n}\widehat{A_n^T} = E$, поэтому матрица $\widehat{A_n^T}$ задает обратное преобразование (обратный поворот). Умножение векторов из *L* на $A_n = \sqrt{n-1}\cdot\widehat{A_n}$ задает поворот векторного пространства *L* с его растяжением в $\sqrt{n-1}$ раз. С геометрической точки зрения координатно-пороговое преобразование S_{A_n}, задаваемое матрицей A_n, выглядит следующим образом: рассматривается вектор $\vec{u} \in V_n$, осуществляется его поворот с растяжением в $\sqrt{n-1}$ раз, соответственно матрице A_n, получаем вектор $\vec{c}$, затем ищется ближайший к $\vec{c}$ вектор $\vec{v}$ из V_n, тогда $S_A(\vec{u}) = \vec{v}$. Таким образом, наряду с преобразованием S_{A_n}, порожденным матрицей A_n, можно рассматривать и преобразование $S_{\widehat{A_n}}$, порожденное также по формуле (4), но уже матрицей $\widehat{A_n}$ и отметить, что эти отображения совпадают.

Теорема 1: Преобразование S_{A_4}— биективно, причем $S_{A_4}^{-1} = S_{A_4{}^T}$.

Доказательство: Пусть
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in V_4, \quad \vec{u}A_4 = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4),$
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, где $v_i = sign(c_i)$, $i = \overline{1,4}$, тогда $\vec{c} \in Ort(\vec{v})$.

Из свойств матрицы A_4 следует, что
$|\vec{c}| = \sqrt{3}|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$.

По замечанию 2, c_i – нечетное число, то есть $c_i \in \{\pm1, \pm3\}$, $i = \overline{1,n}$.Так как $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$, то одна координата вектора $\vec{c}$ равна ±3, а остальные равны ±1. Найдем косинус угла между $\vec{c}$ и $\vec{v}$. По определению координатно-порогового отображения $v_i = sign(c_i)$, значит $v_i \cdot c_i = |c_i|$, $\cos(\vec{c}, \vec{v}) = \frac{(\vec{c},\vec{v})}{|\vec{c}||\vec{v}|} = \frac{3+1+1+1}{2\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Если в ортант $Ort(\vec{v})$ вписать опорный конус, то косинус половины угла раствора этого конуса равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому вектор $\vec{c}$ лежит на поверхности этого конуса, значит $S_{A_4}(\vec{u}) = \vec{v}$. Так как при отображении, соответствующем матрице A_4, вектор $\vec{u}$ попал на опорный конус, ассоциированный с вектором $\vec{v}$, и углы между векторами сохраняются при повороте векторного пространства с его растяжением, то при отображении, соответствующем матрице A_4^T, вектор $\vec{v}$ попадет на опорный конус, ассоциированный с вектором $\vec{u}$, $S_{A_4{}^T}(\vec{v}) = \vec{u}$. Если существуют два вектора $\overrightarrow{u_1} \neq \overrightarrow{u_2}$ такие, что $\vec{u}\,A_4$ и $\overrightarrow{u_2}A_4$ лежат на опорном конусе, ассоциированном с вектором $\vec{v}$, то $\vec{v}A_4^T$ будет лежать на пересечении опорных конусов, ассоциированных с векторами $\overrightarrow{u_1}$ и $\overrightarrow{u_2}$. Такие конусы могут пересекаться только в точке касания с гранью, но все вектора на гранях имеют нулевую координату, что противоречит замечанию 2. При отображении векторного пространства L, соответствующего матрице A_4, вектора из V_4 попадут на различные опорные конусы, значит преобразование S_{A_4} биективно, причем $S_{A_4}^{-1} = S_{A_4{}^T}$.

В заключении отметим, что представленное доказательство, по-видимому, является уникальным и справедливо лишь для $n = 4$, так как использование в его логике погружение образа отображаемого вектора в опорный конус при росте n вряд ли будет ожидаемым, так как при $n \to \infty$ опорный конус будет иметь тенденцию к сужению (см. табл. 1). Более того, из табл. 1 следует, что угол раствора опорного конуса будет стремиться к 0, при увеличении n.

Табл. 1

n	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Угол раствора опорного конуса	90º	60º	41,4º	29º	20,4º	14,4º	10,1º	7,2º	5º

Список литературы:

1. Belevitch, V. Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony. 1950. vol. 26, pp. 231—244.
2. Goethals, J.M., and Seidel, J.J. Orthogonal matrices with zero diagonal. Canadian Journal of Mathematics. 1967. vol. 19, pp. 1001—1010.
3. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра . 2003. Т. 1, 2.
4. Никонов В.Г., Саранцев А.В. Методы компактной реализации биективных отображений, заданных регулярными системами однотипных булевых функций // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Прикладная и компьютерная математика. 2003. Т. 2. № 1. С. 94-105.
5. Никонов В.Г., Саранцев А.В. Построение и классификация регулярных систем однотипных функций // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе: материалы XXXI Международной конференции. Т. 5 из Прил. 1. – М.: .Академия естествознания, 2004. С. 173-174.

6. Никонов В.Г., Сидоров Е.С. О способе построения взаимно однозначных отображений при помощи квазиадамаровых матриц // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. 2009. №2 (65).

РЕЦЕНЗИЯ

Представленная статья посвящена изучению возможностей синтеза биективных отображений в пороговом базисе. Такая направленность в известном смысле соответствует тематике журнала, в силу того, что пороговые функции обладают потенциальной простотой реализации в перспективных вычислительных средах, например, в оптических.

В статье рассматривается способ синтеза отображений с помощью квазиадамаровых матриц, порождающих координатно-пороговые функции. Приводится оригинальное, геометрическое по своей природе, доказательство биективности координатно-порогового отображения при n = 4. Доказательство основывается на погруженности исходного вектора и его образа в опорный конус, вписанный в ортант, и обнаружении факта, что при n = 4 образ вектора оказывается на поверхности опорного конуса. Уникальность найденного доказательства подтверждается тем, что при n > 4 образ вектора выходит за рамки конуса.

В целом статья затрагивает актуальную проблематику реализации базовых логических операций в новой элементной базе и заслуживает опубликования.

Доцент МИРЭА (Технического университета)
кандидат технических наук, доцент

Шурупов А.Н.