N. A. Karazeeva, A. A. Cotsiolis, A. P. Oskolkov, Dynamical systems generated by initial-boundary value problems for equations of motion of linear viscoelastic fluids,
*Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1990, Volume 188, 59–87

https://www.mathnet.ru/eng/tm1793

Н. А. КАРАЗЕЕВА, А. А. КОТСИОЛИС, А. П. ОСКОЛКОВ

# О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

## § 0. Введение. Вывод уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей

0.1. Движение несжимаемой жидкости описывается, как известно, системой уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \operatorname{grad} p = \operatorname{div} \sigma + f, \qquad \operatorname{div} v = 0, \tag{0.1}$$

причем $\sigma = (\sigma_{ik})$ — девиатор тензора напряжений, $\operatorname{tr} \sigma = 0$.*) Введение в уравнения (0.1) девиатора тензора напряжений $\sigma$ имеет целью учет реакций, возникающих в жидкости в процессе ее движения. Устанавливая связь между $\sigma$, тензором скорости деформаций $D = (D_{ik}) \equiv (v_{ix_k} + v_{kx_i})/2$ и их производными, мы тем самым устанавливаем тип жидкости. Такое соотношение между $\sigma$ и $D$ называется определяющим, или реологическим, уравнением, или уравнением состояния [1, 2]. Простейшим примером определяющего уравнения, описывающим идеальную несжимаемую жидкость, является уравнение $\sigma = 0$.

Наиболее распространенной системой аксиом, описывающих движение жидкостей, являются аксиомы Стокса [1, 2]. Жидкость, определяющие уравнения которой удовлетворяют аксиомам Стокса, называют стоксовой жидкостью. Для несжимаемой стоксовой жидкости определяющее уравнение имеет вид [1—3]

$$\sigma = \alpha D + \beta D^2, \tag{0.2}$$

причем $\alpha$ и $\beta$ — скалярные функции главных инвариантов $I \equiv \operatorname{div} v = 0$, $II \equiv \sum_{i,k} D_{ik}^2 \equiv \vartheta^2$, $III = \det D$ тензора $D$.

Если в (0.2) $\alpha \equiv 2\nu \equiv \text{const}$, $\beta \equiv 0$, получаем ньютоновский закон

$$\sigma = 2\nu D. \tag{0.3}$$

Жидкость с определяющим уравнением (0.3) называют ньютоновской жидкостью. Подставляя (0.3) в (0.1), получаем уравнение Навье—Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = f, \qquad \operatorname{div} v = 0. \tag{0.4}$$

Постоянная $\nu$ называется кинематическим коэффициентом вязкости.

Начально-краевые задачи и задача Коши для уравнений Навье—Стокса на протяжении полутора столетий изучались многими известными математиками и механиками. Наиболее полные и законченные математически строгие результаты по гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости получены в работах чл.-кор. АН СССР О. А. Ладыженской [3]. Созданные в ее работах функциональные методы решения краевых и начально-краевых задач уравнений математической физики, для которых характерны переход к обобщенной по-

*) Полный тензор напряжений в несжимаемой жидкости $T \equiv -pE + \sigma$.

становке задачи, наиболее естественным образом связанной с задачей, и широкое использование идей и методов функционального анализа, открыли новый этап в изучении уравнений Навье—Стокса. Они оказали начиная с 50-х годов нашего столетия определяющее влияние на все исследования по теории уравнений Навье—Стокса и стимулируют в последние годы исследования течений вязких жидкостей в областях с некомпактными и свободными границами, течений вязких жидкостей с бесконечным интегралом энергии, развитие строгой теории устойчивости течений вязких жидкостей, построение математической теории турбулентности вязкой несжимаемой жидкости и более общих нелинейных эволюционных систем с диссипацией.

0.2. Работы О. А. Ладыженской [4—9] и подробно процитированные в обзоре О. А. Ладыженской [8] работы А. В. Бабина и М. И. Вишика, Ч. Фойаша и Р. Темама, Дж. Малле-Паре, Ю. С. Ильяшенко, А. Дуади и Дж. Остерле, Дж. Хейла, Дж. Генри, А. Аро, Г. Вебба, П. Массата, В. К. Калантарова и других советских и зарубежных математиков создали новое направление в теории начально-краевых задач и теории асимптотических методов для дифференциальных уравнений с частными производными — теорию динамических систем для нелинейных задач диссипативного типа. Содержание этой теории составляют нахождение минимальные глобальных $B$-аттракторов $\mathfrak{M}$ начально-краевых задач для нелинейных эволюционных задач с диссипацией, построение и исследование динамических систем $\{\mathfrak{M};\ V_t,\ t \in R\}$, порождаемых на $\mathfrak{M}$ этими начально-краевыми задачами, и нахождение числовых характеристик аттрактора $\mathfrak{M}$: числа определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$, хаусдорфовой и фрактальной размерностей $d_H(\mathfrak{M})$ и $d_f(\mathfrak{M})$ и др. Напомним основные понятия этой теории.

Пусть $H$ — гильбертово пространство, $B$ — ограниченное множество из $H$, $\mathfrak{B}$ — совокупность всех ограниченных множеств $B$ из $H$. Пусть, далее, $V_t$, $t \in R^+$, — полугруппа нелинейных непрерывных операторов, действующих на пространстве $H$.

Говорят [7], что множество $B_0$ притягивает множество $B$, если по $\forall \varepsilon > 0$ найдется число $t_1(\varepsilon, B)$, такое, что при $\forall t \geqslant t_1$, $V_t(B) \subset O_\varepsilon(B_0)$, где $O_\varepsilon(B_0)$ — $\varepsilon$-окрестность $B_0$, т. е. совокупность всех открытых шаров радиуса $\varepsilon$ с центрами в $B_0$. Множество $B_0$ называется поглощающим [7], если для $\forall B \in \mathfrak{B}$ найдется $t_1(B)$, такое, что при $\forall t \geqslant t_1(B)$ $V_t(B) \subset B_0$. Очевидно, поглощающее множество $B_0$ притягивает $\forall B \in \mathfrak{B}$.

Глобальным $B$-аттрактором полугруппы $V_t$ называется замкнутое множество, которое притягивает $\forall B \in \mathfrak{B}$ [7]. Минимальным глобальным $B$-аттрактором полугруппы $V_t$ называется наименьшее замкнутое множество $\mathfrak{M}$, которое притягивает любое $B \in \mathfrak{B}$ [7]. Минимальный глобальный $B$-аттрактор $\mathfrak{M}$ полугруппы $V_t$ является ее истинным аттрактором в том смысле, что любая его правильная замкнутая часть уже не обладает теми свойствами притяжения (аттракции), которыми обладает сам истинный аттрактор $\mathfrak{M}$. Наконец, множество $\mathcal{A} \in H$ называется инвариантным относительно полугруппы $V_t$, если $V_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ при $\forall t \in R^+$.

Впервые нетривиальный (т. е. отличный от единственной точки или периодической траектории) минимальный глобальный $B$-аттрактор $\mathfrak{M}$ для нелинейных уравнений с частными производными был найден О. А. Ладыженской [4] для двумерных уравнений Навье—Стокса с граничным «условием прилипания» ($v|_{\partial\Omega} = 0$). Она показала, во-первых, что для изученной ею задачи минимальный глобальный $B$-аттрактор является инвариантным, связным, компактным множеством в фазовом пространстве $\mathring{J}(\Omega)$, ограниченным в «более хороших» пространствах $H^s(\Omega)$, $s \geqslant 1$ [4]. Во-вторых, что динамика $V_t$ этой задачи на $\mathfrak{M}$ существенно отличается от динамики на всем $\mathring{J}(\Omega)$: разрешающие операторы $V_t$ задачи на $\mathring{J}(\Omega)$ определены лишь при $t \in R^+ = [0, \infty)$ и образуют там непрерывную полугруппу, тогда как на $\mathfrak{M}$ операторы $V_t$ определены при $t \in R = (-\infty, \infty)$ и образуют непрерывную группу. О. А. Ладыженская нашла также две числовые характеристики аттрактора $\mathfrak{M}$: число определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$ — числовую характеристику «конечномерности динамики $V_t$ на $\mathfrak{M}$» [4, 9] и хаусдорфову размерность $d_H(\mathfrak{M})$ [5—9].

В последовавших после [4] работах О. А. Ладыженской [5—9], а также А. В. Бабина и М. И. Вишика, Ч. Фойаша и Р. Темама, В. К. Калантарова и других математиков (подробную библиографию см. в обзоре [8]) минимальные глобальные $B$-аттракторы были построены для многих других нелинейных уравнений в частных производных, в том числе и возникающих в гидродинамике. Вместе с тем было показано (см. особенно работы [7—9]), что наличие минимального глобального $B$-аттрактора $\mathfrak{M}$, его свойства, конечномерность динамики $V_t$ на $\mathfrak{M}$ и конечность хаусдорфовой (а также и фрактальной) размерностей аттрактора $\mathfrak{M}$ вытекают из некоторых общих теорем о непрерывных полугруппах $V_t$, $t \in R^+$, нелинейных операторов, которые и предлагается проверить исследователю в его конкретной задаче. Так, например, в работах [6—9] Ладыженской доказано, что полугруппа $V_t$, $t \in R^+$, нелинейных разрешающих операторов, отвечающих нелинейным эволюционным задачам диссипативного типа, имеет компактный минимальный глобальный $B$-аттрактор $\mathfrak{M}$ конечной хаусдорфовой размерности, если эта полугруппа принадлежит классу 1 или классу 2.

Полугруппа $V_t : X \to X$, $t \in R^+$, называется полугруппой класса 1, или полугруппой с параболическим характером диссипации, если при $\forall t > 0$ оператор $V_t$ вполне непрерывен. Существенную часть полугрупп $V_t$, $t \in R^+$, класса 2, или асимптотически компактных полугрупп, составляют полугруппы $V_t : X \to X$, $t \in R^+$, в которых разрешающие операторы $V_t$ при $t > 0$ можно представить в виде суммы $V_t = W_t + U_t$ сжимающих операторов $W_t$ и вполне непрерывных операторов $U_t$.

Многочисленные примеры уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных, приводящих к полугруппам класса 1 и 2, указаны в работах О. А. Ладыженской, А. В. Бабина и М. И. Вишика, А. Аро, Г. Вебба, П. Массата, Дж. Чидагли и Р. Темама, В. К. Калантарова, А. А. Котсиолиса и А. П. Осколкова (см. [8]). В настоящей работе показывается, что задачи обоих типов возникают также и в теории начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей: именно задачи с параболическим хара тером диссипации появляются при описании двумерных течений жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$, а диссипативные задачи гиперболического типа встречаются при описании произвольных трехмерных течений жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 0, 1, 2\ldots$

0.3. Еще в середине XIX в. было известно, что существуют жидкости, не подчиняющиеся ньютоновскому закону (0.3) и даже стоксовскому определяющему уравнению (0.2). Таковыми являются, например, жидкости, в которых после прекращения движения напряжения не обращаются мгновенно в нуль, а спадают по некоторому закону, т. е. имеет место релаксация напряжений, жидкости, в которых после снятия напряжений движение не прекращается мгновенно, а затухает по некоторому закону, т. е. имеет место запаздывание деформации, а также жидкости, в которых имеют место оба этих эффекта. Первые модели таких жидкостей были предложены Максвеллом, Кельвином и Фойгтом [10—14]. Жидкости Максвелла описываются определяющим уравнением

$$\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\nu D, \qquad \lambda,\ \nu > 0, \tag{0.5}$$

причем $\nu$, как и выше, — кинематический коэффициент вязкости, а $\lambda$ — время релаксации, и характеризуются тем, что после прекращения движения напряжения в них убывают как $\exp(-\lambda^{-1} t)$.

Жидкости Кельвина—Фойгта описываются определяющим уравнением

$$\sigma = 2\nu \left( D + \varkappa \nu^{-1} \frac{\partial D}{\partial t} \right), \tag{0.6}$$

причем $\varkappa$ — время запаздывания, и характеризуются тем, что после снятия напряжений тензор скоростей деформаций убывает как $\exp(-\varkappa^{-1} t)$. Подставляя (0.6) в (0.1), получим уравнения движения жидкостей Кельвина—Фойгта:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \operatorname{grad} p = f, \qquad \operatorname{div} v = 0. \tag{0.7}$$

Много позже, в середине 50-х годов нашего столетия, Олдройт [10—14] предложил модель жидкости, определяющее уравнение которой имеет вид

$$\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma = 2\nu\left(1+\varkappa\nu^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)D, \qquad \lambda,\ \nu,\ \varkappa>0, \tag{0.8}$$

и напряжение после прекращения движения затухает как $\exp(-\lambda^{-1}t)$, а тензор скоростей деформаций после снятия напряжения убывает как $\exp(\varkappa^{-1}t)$. Уравнения движения жидкостей Олдройта запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}+\lambda\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial v_k}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_k}+v_k\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x_k}\right)-\nu\,\Delta v-\varkappa\frac{\partial\,\Delta v}{\partial t}+$$
$$+\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\operatorname{grad}p=F, \qquad \operatorname{div}v=0. \tag{0.9}$$

На базе моделей Максвелла, Олдройта и Кельвина—Фойгта в настоящее время создана феноменологическая теория линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации и времен запаздывания [10—14]. Так называются жидкости, определяющее уравнение которых имеет вид

$$\left(1+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^l}{\partial t^l}\right)\sigma=2\nu\left(1+\sum_{m=1}^{M}\varkappa_m\nu^{-1}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\right)D, \qquad \nu,\ \lambda_L,\ \varkappa_M>0, \tag{0.10}$$

причем числа $L$ и $M$ связаны одним из трех условий: либо $M=L-1$, $L=1, 2, \ldots$ — жидкости Максвелла порядка $L$; либо $M=L=1, 2, \ldots$ — жидкости Олдройта порядка $L$; либо $M=L+1$, $L=0, 1, \ldots$ — жидкости Кельвина—Фойгта порядка $L$.

Коэффициенты $\{\lambda l\}$ называются временами релаксации, а коэффициенты $\{\varkappa_m\}$ — временами запаздывания (или ретардации).

0.4. Различные варианты уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации и времен запаздывания получены в работах А. П. Осколкова [15—20]. Он показал, в частности, что движение жидкости Олдройта порядка 1 с определяющим уравнением (0.8) наиболее естественно описывается либо системой интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu\,\Delta v-\int_0^t K(t-\tau)\,\Delta v(\tau)\,d\tau+\operatorname{grad}p=f,\\ \operatorname{div}v=0, \qquad \mu=\varkappa\lambda^{-1}, \qquad K(t)=\lambda^{-1}(\nu-\mu)\exp(-\lambda^{-1}t),\end{gathered} \tag{0.11}$$

либо — после введения новой неизвестной функции $u(t)\equiv\int_0^t K(t-\tau)\,v\,d\tau$ — системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu\,\Delta v-\Delta u+\operatorname{grad}p=f, \qquad \operatorname{div}v=0,\\ v=\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\lambda^{-1}u, \qquad \alpha=\lambda(\nu-\mu)^{-1}.\end{gathered} \tag{0.12}$$

В настоящей работе предлагается еще один вариант уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей, прототипом для которого послужили полученные Осколковым уравнения (0.11) и (0.12) движения жидкостей Олдройта порядка 1. Полученные здесь уравнения, как показал опыт их использования, особенно удобны при исследовании разрешимости начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей на бесконечном интервале времени, при построении аттракторов и динамических систем, порождаемых этими начально-краевыми задачами, при изучении гидродинамической устойчивости течений линейных вязкоупругих жидкостей. Однако в отличие от уравнений А. П. Осколкова [15—20] полученные здесь уравнения справедливы лишь при определенных указанных ниже условиях на $\{\lambda l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$.

Предположим прежде всего, что корни $\{\alpha l\}$ полинома $Q(p) \equiv 1 + \sum_{l=1}^{L} \lambda l p^l$ вещественны, различны, т. е. $Q'(\alpha l) \neq 0$, $l = 1, \ldots, L$, и отрицательны: $\alpha_l < 0$, $l = 1, \ldots, L$. Положим, далее, что

$$P_m(p) \equiv \nu + \sum_{l=1}^{L-1} \varkappa_l p^l, \tag{0.13}$$

$$P_0(p) \equiv \nu - \mu + \sum_{l=1}^{L-1} (\varkappa_l - \mu\lambda_l) p^l, \qquad \mu \equiv \varkappa_L \lambda_L^{-1}, \tag{0.14}$$

$$\begin{gathered} P_k(p) \equiv \nu - \mu p - \mu_1 + \sum_{l=1}^{L} (\varkappa_l - \mu_1\lambda_l - \mu\lambda_{l-1}) p^l, \\ \mu \equiv \varkappa_{L+1}\lambda_L^{-1}, \qquad \mu \equiv (\varkappa_L - \mu\lambda_{L-1})\lambda_L^{-1}, \qquad \lambda_0 \equiv 0, \end{gathered} \tag{0.15}$$

и будем предполагать, что $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$ удовлетворяют также следующим условиям:
для жидкостей Максвелла порядка $L = 1, 2, \ldots$

$$\beta_s^{(m)} \equiv P_m(\alpha_s)[Q'(\alpha_s)]^{-1} > 0, \quad s = 1, \ldots, L; \tag{0.16}$$

для жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$

$$\beta_s^{(0)} \equiv P_0(\alpha_s)[Q'(\alpha_s)]^{-1} > 0, \quad s = 1, \ldots, L; \tag{0.17}$$

для жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$

$$\beta_s^{(k)} \equiv P_k(\alpha_s)[Q'(\alpha_s)]^{-1} > 0, \quad s = 1, \ldots, L. \tag{0.18}$$

Условия (0.17) для жидкости Олдройта порядка 1 совпадают с известным условием Олдройта [10]: $\nu - \varkappa\lambda^{-1} > 0$. Для жидкости Олдройта порядка 2 условия (0.17), как легко видеть, сводятся к следующим:

$$\begin{gathered} D \equiv \lambda_1^2 - 4\lambda_2 > 0, \\ \beta_1 \equiv D^{-1/2}[\nu - \varkappa_2\lambda_2^{-1} + (\varkappa_1 - \varkappa_2\lambda_1\lambda_2^{-1})(-\lambda_1 + D^{1/2})(2\lambda_2)^{-1}] > 0, \\ \beta_2 \equiv -D^{-1/2}[\nu - \varkappa_2\lambda_2^{-1} + (\varkappa_1 - \varkappa_2\lambda_1\lambda_2^{-1})(-\lambda_1 - D^{1/2})(2\lambda_2)^{-1}] > 0. \end{gathered} \tag{0.19}$$

Для жидкости Кельвина—Фойгта порядка 1 условия (0.18) сводятся к следующим:

$$\varkappa_1 - \varkappa_2\lambda^{-1} > 0, \quad \lambda - \varkappa_1 + \varkappa_2\lambda^{-1} > 0. \tag{0.20}$$

Переходя к выводу уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей при описанных выше условиях на коэффициенты $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$, предположим, без ограничения общности, что $\sigma(x, t) \equiv 0$ и $D(x, t) \equiv 0$ при $t < 0$, и применим к обеим частям определяющего уравнения (0.10) преобразование Лапласа $L$:

$$L\sigma(x, t) \equiv \hat{\sigma}(x, p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt}\sigma(x, t)\,dt. \tag{0.21}$$

Тогда получим:

$$\hat{\sigma}(x, p) = 2Q^{-1}(p)\left\{\nu + \sum_{l=1}^{M} \varkappa_l p^l\right\}\hat{D}(x, p). \tag{0.22}$$

Применим, далее, к обеим частям равенства (0.22) обратное преобразование Лапласа $L^{-1}$ и воспользуемся теоремой о свертке. Тогда получим:

$$\sigma(x, t) = 2\int_0^t G(t - \tau)\,D(x, \tau)\,d\tau, \tag{0.23}$$

где

$$G(t) \equiv L^{-1}\left\{Q^{-1}(p)\left[\nu + \sum_{l=1}^{M} \varkappa_l p^l\right]\right\}. \tag{0.24}$$

Из (0.24), вычисляя обратное преобразование Лапласа $L^{-1}$ и используя обозначения (0.13)—(0.18), получим:
для жидкости Максвелла порядка $L = 1, 2, \dots$

$$G(t) = L^{-1}\{Q^{-1}(p)\,P_m(p)\} = \sum_{s=1}^{L} \frac{P_m(\alpha_s)}{Q'(\alpha_s)} e^{\alpha_s t} \equiv \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(m)} e^{\alpha_s t}; \tag{0.25}$$

для жидкости Олдройта порядка $L = 1, 2, \dots$

$$G(t) = L^{-1}\{\mu + Q^{-1}(p)\,P_0(p)\} = \mu\delta(t) + \sum_{s=1}^{L} \frac{P_0(\alpha_s)}{Q'(\alpha_s)} e^{\alpha_s t} = \mu\delta(t) + \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(0)} e^{\alpha_s t}, \tag{0.26}$$

где $\delta(t)$ — $\delta$-функция Дирака;
для жидкости Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \dots$

$$G(t) = L^{-1}\{\mu p + \mu_1 + Q^{-1}(p)\,P_k(p)\} = \mu\delta'(t) + \mu_1\delta(t) + \sum_{s=1}^{L} \frac{P_k(\alpha_s)}{Q'(\alpha_s)} e^{\alpha_s t} =$$

$$= \mu\delta'(t) + \mu_1\delta(t) + \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(k)} e^{\alpha_s t}. \tag{0.27}$$

Подставляя (0.25)—(0.27) в (0.23), получим соответственно определяющие уравнения жидкостей Максвелла порядка $L = 1, 2, \dots$, жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \dots$ и жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \dots$, разрешенные относительно $\sigma(x, t)$:

$$\sigma(x, t) = \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(m)} \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} D(x, \tau)\, d\tau, \tag{0.28}$$

$$\sigma(x, t) = \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(0)} \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} D(x, \tau)\, d\tau + \mu D(x, t), \tag{0.29}$$

$$\sigma(x, t) = \mu \frac{\partial D}{\partial t}(x, t) + \mu_1 D(x, t) + \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(k)} \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} D(x, \tau)\, d\tau. \tag{0.30}$$

Подставляя, далее, (0.28)—(0.30) в уравнения (0.1), получим — при описанных выше условиях на коэффициенты $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$ — уравнения движения жидкостей Максвелла порядка $L = 1, 2, \dots$, жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \dots$ и жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \dots$ в форме интегродифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(m)} \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} \Delta v(\tau)\, d\tau + \operatorname{grad} p = f, \qquad \operatorname{div} v = 0, \tag{0.31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu\,\Delta v - \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(0)} \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} \Delta v(\tau)\, d\tau + \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{0.32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \frac{\partial\,\Delta v}{\partial t} - \mu_1\,\Delta v - \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(k)} \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} \Delta v(\tau)\, d\tau + \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{0.33}$$

Полагая в (0.31)—(0.33) $u_s(x, t) = \int_0^t e^{\alpha_s (t-\tau)} v(x, \tau)\, d\tau$, $s = 1, \dots, L$, получим уравнения движения жидкостей Максвелла порядка $L = 1, 2, \dots$, жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ и жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$ в форме систем дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(m)} \Delta u_s + \operatorname{grad} p = f, \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} - v - \alpha_s u_s = 0,$$
$$s = 1, \ldots, L, \qquad \operatorname{div} v = 0, \tag{0.34}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \Delta v - \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(0)} \Delta u_s + \operatorname{grad} p = f, \qquad \operatorname{div} v = 0,$$
$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - v - \alpha_s u_s = 0, \qquad s = 1, \ldots, L, \tag{0.35}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v - \sum_{s=1}^{L} \beta_s^{(k)} \Delta u_s + \operatorname{grad} p = f,$$
$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - v - \alpha_s u_s = 0, \qquad s = 1, \ldots, L, \qquad \operatorname{div} v = 0. \tag{0.36}$$

При $L = 1$ уравнения (0.32) и (0.35) совпадают с уравнениями Осколкова (0.11) и (0.12).

Пусть $\mathscr{P}$ — ортопроектор из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на $\mathring{J}(\Omega)$ [3]; $\tilde{\Delta} \equiv \mathscr{P}\Delta$ — оператор Стокса; $A(v) \equiv \mathscr{P}(v_k v_{x_k})$, $\varphi(x, t) \equiv \{v, u_1, \ldots, u_L\}$; $\mathbf{F} \equiv \{\mathscr{P}f, 0, \ldots, 0\}$. Применяя ортопроектор $\mathscr{P}$ к системам (0.35) и (0.36), получим уравнения движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ и жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$ в форме операторных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda_1^{(0)} \varphi = \mathbf{F}, \tag{0.37}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda_1^{(k)} \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2 \varphi = \mathbf{F}, \tag{0.38}$$

в которых

$$\Lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} -\mu_* \tilde{\Delta} + A(v) & -\beta_1 \tilde{\Delta} & -\beta_2 \tilde{\Delta} & \ldots & -\beta_L \tilde{\Delta} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_L \end{pmatrix}, \tag{0.39}$$

причем $\mu_* = \mu$ для жидкостей Олдройта и $\mu_* = \mu_1$ для жидкостей Кельвина—Фойгта,

$$\Lambda_2 \equiv \begin{pmatrix} -\mu \tilde{\Delta} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{O} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \tag{0.40}$$

Уравнения (0.37), (0.39) и (0.38)—(0.40) и являются основными объектами изучения в настоящей статье. Они были получены впервые в работе [21] (см. также [22]). Мы будем решать эти уравнения в $Q_T \equiv \Omega \times [0, T]$, $\Omega$ — ограниченная область из $E^n$, $n = 2, 3$, $0 < T \leqslant \infty$, при начально-краевых условиях

$$\varphi|_{t=0} = \{v, \{u_s\}\} = \{v_0(x); 0, \ldots, 0\}, \quad x \in \Omega; \quad \varphi|_{\partial Q_T} = 0. \tag{0.41}$$

0.5. В работах [15—20] построена теория разрешимости основной начально-краевой задачи для выведенных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ и жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 0, 1, 2, \ldots$, в том числе и теория разрешимости начально-краевых задач (0.37), (0.39), (0.41) и (0.38)—(0.41), на конечном интервале времени ($\forall\, T < \infty$). При этом оказалось, что теория разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2$ аналогична теории разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений Навье—Стокса (0.4) (см. [3]): обе эти задачи однозначно разрешимы «в целом» в двумерном и осесимметричном случаях и «в малом» в общем трехмерном случае; основная начально-краевая задача для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 0, 1, 2, \ldots$, напротив, однозначно разрешима «в целом» в общем трехмерном случае.

В § 1 нашей работы мы показываем, что начально-краевая задача (0.37), (0.39), (0.41) для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ ($\Omega \subset E^2$) имеет «в целом» единственное классическое решение при $\forall\, T \leqslant \infty$, а в § 2 — что начально-краевая задача (0.38)—(0.41) для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 0, 1, 2, \ldots$ в общем трехмерном случае ($\Omega \subset E^3$) имеет «в целом» единственное классическое решение при $\forall\, T \leqslant \infty$. Эти результаты анонсированы в работах [22—25].

В § 1 для начально-краевой задачи (0.37), (0.39), (0.41), описывающей двумерные течения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$, строятся минимальный глобальный $B$-аттрактор $\mathfrak{M}$ и порождаемая этой задачей динамическая система $\{\mathfrak{M};\ V_t,\ t \in R\}$, а также изучаются свойства динамической системы $\{\mathfrak{M};\ V_t,\ t \in R\}$ — доказывается «конечномерность динамики $V_t$ на $\mathfrak{M}$» и даются оценки трех числовых характеристик аттрактора $\mathfrak{M}$: числа определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$, хаусдорфовой $d_H(\mathfrak{M})$ и фрактальной $d_f(\mathfrak{M})$ размерностей аттрактора $\mathfrak{M}$. Эти результаты анонсированы в работах [25—27].

В § 2 для начально-краевой задачи (0.38)—(0.41), описывающей общие трехмерные течения жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$, показывается, что группа $V_t$, $t \in R$, ограниченных нелинейных непрерывных операторов, однозначно определяющих слабое решение (решение в смысле Э. Хопфа [3]) $\varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0))$ задачи (0.38)—(0.41), действующая в фазовом пространстве $E_1(\Omega) \equiv \sum\limits_{l=0}^{L} H(\Omega)$, при $\forall\, t > 0$ представима в виде суммы линейной экспоненциально сжимающей полугруппы $W_t$ и вполне непрерывного нелинейного оператора $U_t: V_t = W_t + U_t$, $t \in R^+$, т. е. полугруппа $V_t$ при $t > 0$ принадлежит классу 2 асимптотически компактных полугрупп Ладыженской [6—9]. На базе этого результата строится минимальный глобальный $B$-аттрактор задачи (0.38)—(0.41), доказывается «конечномерность динамики $V_t$ на $\mathfrak{M}$» и даются оценки числа определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$, хаусдорфовой $d_H(\mathfrak{M})$ и фрактальной $d_f(\mathfrak{M})$ размерностей аттрактора $\mathfrak{M}$. Эти результаты при $\forall\, L = 1, 2, \ldots$ анонсированы в работе [22]. При $L = 0$ существование аттрактора $\mathfrak{M}$ доказано в работе В. К. Калантарова [28].

Авторы выражают искреннюю признательность О. А. Ладыженской за внимание к их исследованиям по гидродинамике вязкоупругих жидкостей.

## § 1. Динамическая система, порождаемая двумерными уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$

1.1. Во введении показано, что движение жидкости Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ в двумерной ограниченной области $\Omega$ описывается — при условии (0.17) на коэффициенты $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$ — системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu\, \Delta v - \sum_{s=1}^{L} \beta_s\, \Delta u_s + \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0,$$
$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - v - \alpha_s u_s = 0, \quad s = 1, \ldots, L; \quad \mu > 0, \quad \beta_s > 0, \quad \alpha_s < 0, \quad s = 1, \ldots, L. \tag{1.1}$$

Система (1.1) решается в $Q_T = \Omega \times [0, T)$, $0 < T \leqslant \infty$, при начально-краевых условиях

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad u_s|_{t=0} = 0, \quad s = 1, \ldots, L, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial Q_T} = u_s|_{\partial Q_T} = 0, \quad s = 1, \ldots L. \tag{1.2}$$

Первый результат настоящего параграфа — теорема об однозначной классической разрешимости в целом начально-краевой задачи (1.1), (1.2) при $\forall\, T \leqslant \infty$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* $\Omega$ — *ограниченная область из* $E^2$; $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$; $v_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap H(\Omega)$; $f(x,\ t) \in L_\infty(0,\ T;\ C^\alpha(\bar{\Omega}))$, $0 < \alpha < 1$; $f_t \in L_{2,\,1}(Q_T)$; $0 < T \leqslant \infty$. *Тогда начально-краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение*

$$(v,\ \{u_s\}) \in \{L_\infty(0,\ T;\ C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap H(\Omega)) \cap W^1_\infty(0,\ T;\ C^\alpha(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega))\} \times$$
$$\times \prod_{s=1}^{L} \{W^1_\infty(0,\ T;\ C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap H(\Omega)) \cap W^2_\infty(0,\ T;\ C^\alpha(\bar{\Omega}) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega))\},$$

*и для этого решения имеет место оценка*

$$\|v,\ \{u_{sx}\}\|_{L_\infty(0,\ T;\ C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))} + \|v_t,\ \{u_{stt}\}\|_{L_\infty(0,\ T;\ C^\alpha(\bar{\Omega}))} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\left(\|v_0\|^{(2+\alpha)}_{\bar{\Omega}};\ \|f\|_{L_\infty(0,\ T;\ C^\alpha(\bar{\Omega}))};\ \|f_t\|_{2,\,1,\,Q_T};\ \mu^{-1}\right), \tag{1.3}$$

*причем постоянная* $C_1$ *не зависит от* $T \leqslant \infty$.

Теорема 1.1 при любом конечном $T < \infty$ доказана в работах А. П. Осколкова [17—20]; при этом в его доказательствах постоянная $C_1$ в оценке (1.3) зависит от $T$ и $c_1 \to \infty$ при $T \to \infty$. Анализ доказательств в [17—20] показал (см. также доказательство классической разрешимости в целом при $\forall\, T \leqslant \infty$ основной начально-краевой задачи для уравнений Навье—Стокса [3]), что для того чтобы доказать теорему 1.1 и при $T = \infty$, достаточно получить для решения задачи (1.1), (1.2) следующие априорные оценки, в которых постоянные в правых частях не зависят от $T \leqslant \infty$:

$$\frac{1}{2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|v\|^2_{2,\,\Omega} + \sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\,\Omega}\right)^{1/2} + \mu\|v_x\|^2_{2,\,Q_T} + \sum_{s=1}^{L}|\alpha_s|\,\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\,Q_T} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{2,\,\Omega} + \left(\|v_0\|_{2,\,\Omega} + \|f\|_{2,\,1,\,Q_T}\right)\|f\|_{2,\,1,\,Q_T} \equiv A, \tag{1.4}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|v_t\|^2_{2,\,\Omega} + \sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\,\Omega}\right) \leqslant \left(\|v_{0x}\|^2_{2,\,\Omega}\sum_{l=1}^{L}\beta_l + \|v_t(x,\ 0)\|^2_{2,\,\Omega}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{2\left(A\mu^{-1} + \|f_t\|^2_{2,\,1,\,Q_T}\right)\right\} \equiv D, \tag{1.5}$$

$$\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\,Q_T} + 2\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\,\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\,Q_T} \leqslant \|v_t(x,\ 0)\|^2_{2,\,\Omega} +$$
$$+ \|v_{0x}\|^2_{2,\,\Omega}\sum_{l=1}^{L}\beta_l + 2D\left(A\mu^{-2} + \|f_t\|^2_{2,\,1,\,Q_T}\right), \tag{1.6}$$

— ибо оценки сильных норм решений начально-краевой задачи (1.1), (1.2), входящих в оценку (1.3), от $T$ уже не зависят.

Априорные оценки (1.4)—(1.6) в сочетании с методом Галеркина позволяют доказать существование в целом на $[0,\ T)$ при $\forall\, T \leqslant \infty$ единственного обобщенного решения в смысле Ладыженской [3] задачи (1.1), (1.2), т. е. обобщенного решения с конечными нормами $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_t,\ u_{tx}\|_{2,\,\Omega} + \|v_{tx},\ u_{ttx}\|_{2,\,Q_T}$; после этого с помощью теорем вложения Соболева и теорем о классической разрешимости соответствующих линеаризованных задач с постоянными коэффициентами (нелинейные члены $v_k v_{x_k}$ уходят в «свободный член» $F(x,\ t) \equiv f(x,\ t) - v_k v_{x_k}$) теорема 1.1 доказывается в полном объеме (см. [3, 17—20]).

Доказательству априорных оценок (1.4)—(1.6) для решений задачи (1.1), (1.2) и посвящена остальная часть п. 1.1. Именно при доказательстве этих оценок и выявилась впервые наиболее ярко целесообразность записи уравнений движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1,\ 2$ в форме системы дифференциальных уравнений (1.1).

Умножим первое из уравнений системы (1.1) на $v$, проинтегрируем по области $\Omega$ и воспользуемся остальными уравнениями системы (1.1) и граничными условиями (1.2). Тогда при $\forall t \in (0, T]$ получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}|\alpha_s|\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}=(f, v)_{2,\Omega}. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)\leqslant\|f\|_{2,\Omega}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)^{1/2},\ t\in(0, T], \tag{1.8}$$

откуда в свою очередь вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)^{1/2}\leqslant\|f\|_{2,\Omega}. \tag{1.9}$$

Интегрируя неравенство (1.9) по $t\in[0, T]$ и применяя операцию максимизации по $t$, получим оценку

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)\leqslant\|v_0\|^2_{2,\Omega}+\|f\|_{2,1,Q_T}. \tag{1.10}$$

Далее из равенства (1.7) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}|\alpha_s|\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_{2,\Omega}\left(\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{sx}\|^2_{2,\Omega}\right)^{1/2},\quad 0<t\leqslant T, \tag{1.11}$$

а из этого неравенства, используя оценку (1.10), интегрируя по $t\in(0, T]$ и применяя операцию максимизации по $t\in(0, T]$, мы и получим оценку (1.4).

Продифференцируем первое из уравнений системы (1.1) по $t$, умножим полученное уравнение на $v_t$, проинтегрируем по области $\Omega$ и воспользуемся остальными уравнениями системы (1.1) и граничными условиями (1.2). Интегрируя по частям, получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\Omega}\right)+\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}|\alpha_s|\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\Omega}=$$
$$=-\int_{\Omega}v_{kt}v_tv_{x_k}\,dx+(f_t, v_t)_{2,\Omega},\quad 0<t\leqslant T. \tag{1.12}$$

В нижеследующих оценках нам понадобится известное неравенство Ладыженской (см. [3], гл. 1)

$$\|v\|^4_{4,\Omega}\leqslant 2\|v\|^2_{2,\Omega}\|v_x\|^2_{2,\Omega},\quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\quad \Omega\subset E^2. \tag{1.13}$$

Оценим член $J\equiv\int_{\Omega}v_{kt}v_tv_{x_k}\,dt$ в правой части равенства (1.12), используя неравенства Гельдера и Коши и неравенство (1.13):

$$|J|\leqslant\sqrt{2}\|v_x\|_{2,\Omega}\|v_t\|_{2,\Omega}\|v_{xt}\|_{2,\Omega}\leqslant\frac{\mu}{2}\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+\mu^{-1}\|v_x\|^2_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega}. \tag{1.14}$$

Тогда из равенства (1.12) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\Omega}\right)+\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}|\alpha_s|\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant 2\|f_t\|_{2,\Omega}\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\Omega}\right)+$$
$$+2\mu^{-1}\|v_x\|^2_{2,\Omega}\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\sum_{s=1}^{L}\beta_s\|u_{stx}\|^2_{2,\Omega}\right),\quad 0<t\leqslant T, \tag{1.15}$$

из которого, используя лемму Гронуолла и уже доказанную оценку (1.4), пользуясь тем, что $u_{st}|_{t=0} = v|_{t=0} = v_0(x)$, $l = 1, \ldots, L$, и применяя операцию максимизации по $t \in (0, T]$, получим оценку (1.5) (ср. [3, гл. VI]). После этого, интегрируя неравенство (1.15) по $t \in (0, T]$ и используя уже доказанную оценку (1.5), получим и оценку (1.6).

1.2. Во введении показано, что движение жидкости Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ описывается также — при условиях (0.17) на $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$ — эквивалентным системе (1.1) операторным дифференциальным уравнением (см. (0.37), (0.39))

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda\varphi = \mathbf{F}, \tag{1.16}$$

в котором

$$\Lambda \equiv \begin{Bmatrix} -\mu\tilde{\Delta} + A(v) & -\beta_1\tilde{\Delta} & -\beta_2\tilde{\Delta} & \ldots & -\beta_L\tilde{\Delta} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_L \end{Bmatrix}. \tag{1.17}$$

Уравнения (1.16), (1.17) с $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(x)$ решаются в $Q_\infty = \Omega \times [0, \infty)$, $\Omega \subset E^2$, при начально-краевых условиях

$$\varphi|_{t=0} = \{v;\ \{u_s\}\}|_{t=0} = \{v_0(x);\ 0, \ldots, 0\}, \quad x \in \Omega; \quad \varphi|_{\partial Q_\infty} = 0. \tag{1.18}$$

Выберем в качестве фазового пространства задачи (1.16)—(1.18) гильбертово пространство $E_0(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{s=1}^{L} H(\Omega)$ [3] и положим для $\varphi \equiv \{v;\ u_1, \ldots, u_L\}$ и $\psi \equiv \{v';\ u_1', \ldots, u_L'\}$

$$[\varphi, \psi]_{E_0} \equiv (v, v')_{2,\Omega} + \sum_{s=1}^{L} \beta_s (u_{sx}, u_{sx}')_{2,\Omega}, \tag{1.19}$$

так что $\|\varphi\|_{E_0} = \left[\|v\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{s=1}^{L} \beta_s \|u_{sx}\|_{2,\Omega}^2\right]^{1/2}$.

Осколков показал [17—20], что на пространстве $E_0(\Omega)$ определена полугруппа $V_t$, $t \in R^+$, ограниченных непрерывных нелинейных операторов — разрешающих операторов задачи (1.16)—(1.18), однозначно определяющих слабое решение Хопфа $\varphi(\cdot, t) \equiv \varphi(t)$ задачи (1.16)—(1.18) по его значению при $t = 0 : \varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0))$.

Для решений $\varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0))$, $\forall \varphi(0) \in E_0(\Omega)$, стандартным образом [3, 17—20] при почти всех $t \in R^+$ выводится энергетическое соотношение (см. (1.7))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{E_0}^2 + \mu\|v_x\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{s=1}^{L} |\alpha_s|\beta_s\|u_{sx}\|_{2,\Omega}^2 = (f, v)_{2,\Omega}, \tag{1.20}$$

из которого для решения задачи (1.16)—(1.18) следует оценка

$$\begin{gathered} \|\varphi\|_{E_0} \leqslant R_0 \equiv (\mu^*)^{-1}\|f\|_{2,\Omega}, \quad t \in R^+, \\ \mu^* = \min\{\mu\lambda_1;\ |\alpha_s|\}, \end{gathered} \tag{1.21}$$

где $\lambda_1$ — первое собственное число спектральной задачи для оператора Стокса,

$$-\Delta\psi + \nabla q = \lambda\psi, \quad \operatorname{div}\psi = 0, \quad x \in \Omega; \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.22}$$

Оценка (1.21) означает, что шар

$$B_0 \equiv \{\varphi \in E_0(\Omega) : \|\varphi\|_{E_0} \leqslant R_0\} \tag{1.23}$$

является поглощающим множеством для $\forall B \in \mathfrak{B}$, $B \subset E_0(\Omega)$ и $V_t(B_0) \subset B_0$, т. е. все слабые решения Хопфа задачи (1.16)—(1.18) втягиваются в шар $B_0$ за конечные времена. Тем самым шар $B_0$ является ограниченным глобальным $B$-аттрактором задачи (1.16)—(1.18). А тогда множество

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{t \in R^+} V_t(B_0) \tag{1.24}$$

является минимальным глобальным $B$-аттрактором задачи (1.16)—(1.18). В силу непрерывности полугруппы $V_t$, $t \in R^+$, аттрактор $\mathfrak{M}$ является непустым, связным и инвариантным множеством в $E_0(\Omega)$.

Введем гильбертовы пространства $E_s(\Omega) \equiv (W_2^s(\Omega) \cap H(\Omega)) \times \prod_{l=1}^{L}(W_2^{s+1}(\Omega) \cap H(\Omega))$, $s = 1, 2, \ldots$, и положим для $\varphi \equiv \{v; \{u_s\}\}$, $\psi = \{v', \{u'_s\}\}$

$$[\varphi, \psi]_{E_s} \equiv (v, v')_{2,\Omega}^{(s)} + \sum_{l=1}^{L} \beta_l (u_l, u'_l)_{2,\Omega}^{(s+1)}, \tag{1.25}$$

так что $\|\varphi\|_{E_s} \equiv \left[(\|v\|_{2,\Omega}^{(s)})^2 + \sum_{l=1}^{L} \beta_l (\|u_l\|_{2,\Omega}^{(s+1)})^2\right]^{1/2}$, и покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть $\Omega$ — ограниченная область из $E^2$, $\partial\Omega \in C^{s+1}$, $f(x) \in W_2^{s-1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $s = 1, 2, \ldots$ Тогда для слабого решения Хопфа задачи* (1.16)—(1.18) *при $\forall\, t > 0$ справедлива оценка*

$$\|\varphi(\cdot, t)\|_{E_s} \leqslant c_s(\|f\|_{2,\Omega}^{(s-1)}, \mu^{-1}). \tag{1.26}$$

Как и в случае уравнений Навье—Стокса [4, 5], теорему 1.2 достаточно доказать при $s = 1$. В этом случае для решения $\varphi = \{v; \{u_l\}\}$ задачи (1.16)—(1.18) при $t > 0$ справедливо равенство (ср. [3, с. 194])

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{E_1}^2 + \mu\|\tilde{\Delta} v\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|\tilde{\Delta} u_l\|_{2,\Omega}^2 \leqslant (v_k v_{x_k}, \tilde{\Delta} v)_{2,\Omega} - (f, \Delta v)_{2,\Omega}, \tag{1.27}$$

из которого, применяя неравенства Гельдера и Коши, неравенство Ладыженской (1.13) и второе основное неравенство для оператора Стокса $\tilde{\Delta}$ [3, гл. III], получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\varphi\|_{E_1}^2 + \mu\|v_{xx}\|_{2,\Omega}^2 + 2\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|u_{lxx}\|_{2,\Omega}^2 \leqslant c(\mu^{-1})(\|v_x\|_{2,\Omega}^2\|\varphi\|_{E_1}^2 + \|f\|_{2,\Omega}^2). \tag{1.28}$$

Умножим обе части неравенства (1.28) на $\forall\, t > 0$ и результат запишем так:

$$\frac{d}{dt}\|t^{1/2}\varphi\|_{E_1}^2 + \mu\|t^{1/2}v_{xx}\|_{2,\Omega}^2 + 2\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|t^{1/2}u_{lxx}\|_{2,\Omega}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\|v_x\|_{2,\Omega}^2\|t^{1/2}\varphi\|_{E_1}^2 + \|\varphi\|_{E_1}^2 + c\|t^{1/2}f\|_{2,\Omega}^2, \quad \forall t > 0. \tag{1.29}$$

Из неравенства (1.29) с помощью леммы Гронуолла [3] и энергетической оценки (1.21) получим оценку

$$\max_{0<\delta\leqslant t\leqslant 1}\|\varphi(\cdot, t)\|_{E_1}^2 \leqslant \delta^{-1}c_1(R_0), \tag{1.30}$$

а так как задача (1.16)—(1.18) инвариантна относительно сдвига по $t$, — то и оценку (1.26) при $s = 1$.

В силу теоремы 1.2 разрешающий, или эволюционный, оператор $V_t$ задачи (1.16)—(1.18) при $\forall\, t > 0$ переводит шар $B_0$ в множество $V_t(B_0)$, ограниченное в $E_1(\Omega)$ и компактное в $E_0(\Omega)$, и потому эволюционный оператор $V_t$ при $\forall\, t > 0$

является вполне непрерывным в пространстве $E_0(\Omega)$. Отсюда и из описанных выше свойств аттрактора $\mathfrak{M}$, определенного формулой (1.24), следует теорема.

Теорема 1.3. *Основная начально-краевая задача* (1.16)—(1.18) *для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка* $L = 1, 2, \dots$ *имеет в фазовом пространстве* $E_0(\Omega)$ *минимальный глобальный В-аттрактор* $\mathfrak{M}$, *определенный формулой* (1.24), *который является непустым, связным, инвариантным компактом в* $E_0(\Omega)$ *и ограниченным в пространствах* $E_s(\Omega)$, $s = 1, 2, \dots$, *множеством.*

1.3. Докажем теперь основной результат настоящего параграфа — теорему 1.4, описывающую свойства эволюционного оператора $V_t$ задачи (1.16)—(1.18) на аттракторе $\mathfrak{M}$.

Теорема 1.4. *Каждое решение* $V_t(\varphi(0))$, $t \in R^+$, *задачи* (1.16)—(1.18) *с* $\varphi(0) \in \mathfrak{M}$ *однозначно продолжается на* $R = (-\infty, \infty)$ *как решение задачи* (1.16)—(1.18), *лежащее в* $\mathfrak{M}$. *Тем самым полугруппа* $V_t$, $t \in R^+$, *на* $\mathfrak{M}$ *продолжается до группы* $V_t$, $t \in R$, *ограниченных нелинейных непрерывных операторов, причем* $V_t = V_{-t}^{-1}$, *когда* $t < 0$, *и такое продолжение единственно. Аттрактор* $\mathfrak{M}$ *состоит из тех и только тех элементов* $\psi \in B_0$ (см. (1.23)), *для которых задача* (1.16)—(1.18) $\forall t \in R$ *имеет решение* $\varphi(t) = V_t(\psi)$, *равное* $\psi$ *при* $t = 0$.

Пара $\{\mathfrak{M}, V_t;\ t \in R\}$ и является динамической системой, порождаемой начально-краевой задачей (1.16)—(1.18) о двумерных течениях жидкостей Одройта порядка $L = 1, 2, \dots$

Доказательство теоремы 1.4 во многом аналогично доказательству соответствующего утверждения для двумерных уравнений Навье—Стокса (0.4), данному впервые Ладыженской в работе [4], где она также сводит систему уравнений Навье—Стокса (0.4) к операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + B(v) = f(x), \quad B(v) = -\nu\tilde{\Delta}v + A(v). \tag{1.31}$$

Поэтому мы лишь наметим основные этапы доказательства теоремы 1.4, проверив, что все свойства оператора $B(v)$ в (1.31), которые гарантируют справедливость утверждений теоремы 1.4 для уравнений Навье—Стокса, выполняются и для матричного оператора $\Lambda(\varphi)$, определенного в (1.17).

Предположим, что доказано следующее свойство задачи (1.16)—(1.18): при $\forall \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathfrak{M}$ из условия $\varphi \neq \tilde{\varphi}$ вытекает, что $V_t(\varphi) \neq V_t(\tilde{\varphi})$ при $\forall t \in R^+$, т. е. оператор $V_t$, $t \in R^+$, имеет на $\mathfrak{M}$ обратный $V_t^{-1}$. Тогда любую полутраекторию $\gamma^+(\varphi) \equiv \{V_t(\varphi), t \in R^+\}$ $\forall \varphi \in \mathfrak{M}$, которая в силу инвариантности аттрактора $\mathfrak{M}$ целиком лежит в $\mathfrak{M}$, можно, и притом однозначно, продолжить на $R^- = (-\infty, 0]$ следующим образом [4, 7]:

по $\varphi \in \mathfrak{M}$ найдется единственный $\varphi_1 \in \mathfrak{M}$, такой, что $\varphi = V_1(\varphi_1)$;

по $\varphi_1$ найдется единственный $\varphi_2 \in \mathfrak{M}$, такой, что $\varphi_1 = V_1(\varphi_2)$, и т. д.

Совокупность точек $\gamma^-(\varphi) \equiv \{V_t(\varphi_k),\ t \in [0, 1),\ k = 1, 2, \dots\}$ назовем, по определению, отрицательной полутраекторией, продолжающей $\gamma^+(\varphi)$ в сторону отрицательных $t$ от 0 до $-\infty$, а $\gamma(\varphi) \equiv \gamma^+(\varphi) \cup \gamma(\varphi)$ — полной траекторией, выходящей из $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Положим, по определению,

$$V_{t-k}(\varphi) \equiv V_t(\varphi_k), \quad t \in [0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, \ \forall \varphi \in \mathfrak{M}. \tag{1.32}$$

Тогда $\gamma(\varphi) = \{V_t(\varphi), t \in R\}$ есть непрерывная кривая, лежащая в $\mathfrak{M}$, и для нее выполняется групповое свойство

$$V_{\tau+t}(\varphi) = V_\tau(V_t(\varphi)), \quad \forall t \in R, \quad \forall \tau \in R^+, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}. \tag{1.33}$$

Описанная выше конструкция продолжения $\gamma^+(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{M}$ до $\gamma(\varphi)$ дает единственное возможное продолжение, так как $\varphi_k$: $\varphi_k = V_1(\varphi_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, определяются по $\varphi$ однозначно. Легко выяснить, что

$$V_t = V_{-t}^{-1}, \quad t \in R^-, \tag{1.34}$$

и семейство операторов $\{V_t,\ t \in R\}$ образует на $\mathfrak{M}$ непрерывную группу. Тем самым полугруппа $V_t$: $E_0(\Omega) \to E_0(\Omega)$, $t \in R^+$, порождаемая задачей (1.16)—(1.18), продолжается на аттракторе $\mathfrak{M}$ до полной группы $V_t: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$,

$t \in R$, и $\varphi(t) \equiv V_t(\varphi_0)$, $t \in R$, $\forall \varphi_0 \in \mathfrak{M}$ есть решение уравнения (1.16), (1.17).

Итак, все утверждения теоремы 1.4 будут доказаны, если мы докажем указанное выше свойство задачи (1.16)—(1.18): если для двух «достаточно гладких» решений $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ при некотором $t_1 \geqslant 0$ $\varphi(t_1) \neq \tilde{\varphi}(t_1)$, то и $\varphi(t) \neq \tilde{\varphi}(t)$ при $\forall t \in R$. К доказательству этого свойства решений задачи (1.16)—(1.18) — корректности прямой и обратной задач (1.16)—(1.18) при $\forall t \in R$ — мы и переходим.

Пусть $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ — два «достаточно гладких» решения задачи (1.16)—(1.18), например, пусть $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ — два классических решения задачи (1.16)—(1.18), существование которых при $\forall t \in R^+$ гарантируется теоремой 1.1. Их разность $\Phi(t) \equiv \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \equiv \{w, \{\widehat{w}_l\}\} \equiv \{v - \tilde{v}, \ \{u_l - \tilde{u}_l\}\}$ удовлетворяет линейному операторному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + A(t) = \Phi 0, \quad t \in R^+, \tag{1.35}$$

в котором

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} -\mu\tilde{\Delta} + A_2(v, \tilde{v}) & -\beta_1\tilde{\Delta} & -\beta_2\tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L\tilde{\Delta} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -\mu\tilde{\Delta} & -\beta_1\tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L\tilde{\Delta} \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & -\alpha_1 - 1 & \dots & 0 \\ -2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2 & 0 & \dots & -\alpha_L - 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_2(v, \tilde{v}) & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ 0 & \mathbb{O} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \equiv A_1 + A_2 + A_3(t) \equiv A_1 + B(t), \tag{1.36}$$

$$A_2(v, \tilde{v})\, w \equiv \mathscr{P}\left(v_k w_{x_k} + \tilde{v}_{x_k} w_k\right), \quad t \in R^+, \tag{1.37}$$

а $\mathscr{P}$, как и выше, — ортопроектор из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на $\mathring{J}(\Omega)$.

Легко проверяется, что оператор $A_1$ является самосопряженным положительно определенным оператором в $E_0(\Omega)$ и для оператора $A_1 + A_2$ справедлива оценка

$$[(A_1 + A_2)\varphi, \ \varphi]_{E_0} \geqslant \min\{\mu; \ (|\alpha_s|)\}\, \|\{w, \ \hat{w}_1, \ \dots, \ \hat{w}_L\}\|^2_{E_0}. \tag{1.38}$$

Из определения (1.36) оператора $A(t)$ и оценки (1.38) следует также, что существует достаточно большое $\delta \equiv \delta(\mu, \Omega) > 0$, такое, что при $\forall t \in R^+$ справедливо неравенство

$$[(A + \delta I)\varphi, \ \varphi]_{E_0} \geqslant \min\left\{\frac{\mu}{2}; \ (|\alpha_l|)\right\}\|\{w, \ \hat{w}_1, \ \dots, \ \hat{w}_L\}\|^2_{E_0}. \tag{1.39}$$

Далее, как и в случае двумерных уравнений Навье—Стокса [4, § 3], проверяется, во-первых, что оператор $B(t) \equiv A_2 + A_3(t)$ при $\forall t \in R^+$ подчинен оператору $A_1$, т. е. он определен на $D(A_1)$ и $\| B(t) A_1^{-1} \|_{E_0 \to E_0} \leqslant c_2$, и, во-вторых, что при $\forall t \in R^+$ оператор $B(t)$ дифференцируем по $t$ и $\| B_t(t) \times A_1^{-1} \|_{E_0 \to E_0} \leqslant c_3$, причем постоянные $c_2$ и $c_3$ определяются только данными задачи (1.16)—(1.18). После этого, как и в работе [4, § 3], показывается, что для решения $\Phi(t)$ уравнения (1.35) при достаточно больших $\omega$, $c_4$ и $c_4'$, определяемых лишь данными задачи (1.16)—(1.18), справедливо неравенство: для $\forall \{a(t);\ b_1(t),\ \ldots,\ b_L(t)\} \in D(A_1)$

$$[(A+\omega I)\{a;\ \mathbf{b}\},\quad B^*\{a;\ \mathbf{b}\} - B\{a;\ \mathbf{b}\}]_{E_0} - [A_{3t}\{a;\ \mathbf{b}\},\ \{a;\ \mathbf{b}\}]_{E_0} \geqslant$$

$$\geqslant -c_4 \|(A+\omega I)\{a;\ \mathbf{b}\}\|_{E_0} \|\{a;\ \mathbf{b}\}\|_{E_0} - c_4' \|(A+\omega I)\{a,\ \mathbf{b}\}\|^2_{E_0},\quad t \in R^+. \tag{1.40}$$

Пусть теперь $0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 < \infty$, и пусть

$$y(t) = \|\Phi(t)\|^2_{E_0} \exp\{-2\omega^*(t-t_1)\},\quad \omega^* = \max(\delta;\ \omega), \tag{1.41}$$

где $\delta$ и $\omega$ — достаточно большие положительные числа из неравенств (1.39) и (1.40). Положим

$$h(y) \equiv \ln^{-1}\left(\frac{M}{y\theta}\right),\quad M \equiv 3 \max_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} y^\theta(t),\quad y \in \left[0,\ \left(\frac{M}{3}\right)^{1/\theta}\right], \tag{1.42}$$

где $\theta > 1$ — достаточно большое положительное число, которое будет выбрано ниже. Тогда, как и в [4, § 3] для двумерных уравнений Навье—Стокса, доказывается, что из неравенства (1.40) для решения $\Phi(t)$ уравнения (1.35) следует справедливость мультипликативной оценки

$$h(y(t)) \leqslant [h(y(t_1))]^{1-\beta(t)} [h(y(t_2))]^{\beta(t)} \chi(t;\ t_1,\ t_2),\quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{1.43}$$

в которой $\beta(t) \equiv (t-t_1)(t_2-t_1)^{-1}$, $\chi(t,\ t_1,\ t_2) \equiv \exp[c_5(t-t_1)(t_2-t_1)]$, $c_5 \equiv \theta c_4^2/4$, а $c_4$ — постоянная из неравенства (1.40); постоянная $\theta$ должна удовлетворять неравенству $c_4' \ln 3 \leqslant 2\theta - 1$, где $c_4'$ — постоянная из (1.40).

В самом деле, следуя [4, § 2], выберем $t_1 > 0$ и положим $\psi(t) \equiv \Phi(t) e^{-\delta(t-t_1)}$, где число $\delta$ определено в (1.39). Тогда, полагая $\widehat{A}(t) \equiv A(t) + \delta I$, получим для $\psi(t)$ уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} + \widehat{A}(t)\psi = 0,\quad t \in R^+. \tag{1.44}$$

Далее вводим новое независимое переменное $\tau \equiv \dfrac{(e^{k(t-t_1)} - 1)}{k}$, $k \equiv \mathrm{const} \geqslant 0$. Тогда для $\psi$ получим уравнение

$$\frac{d\psi}{d\tau} + e^{-k(t-t_1)} \widehat{A}\psi = 0,\quad \tau \in R^+. \tag{1.45}$$

Умножая (1.45) скалярно в $E_0(\Omega)$ на $\psi$, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|\psi\|^2_{E_0} + e^{-k(t-t_1)} [\widehat{A}(\tau)\psi,\ \psi]_{E_0} = 0,\quad \tau \in R^+, \tag{1.46}$$

из которого, дифференцируя по $\tau$ и используя структуру (1.36) оператора $A$, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \|\psi\|^2_{E_0} + \{-k[\widehat{A}\psi,\ \psi]_{E_0} + [\widehat{A}\psi_t,\ \psi]_{E_0} + [\widehat{A}\psi,\ \psi_t]_{E_0} +$$

$$+ [A_{3t}\psi,\ \psi]_{E_0}\} e^{-2k(t-t_1)} = 0,\quad \tau \in R^+. \tag{1.47}$$

Наконец, уравнение (1.47), используя уравнение (1.44) и самосопряженность в $E_0(\Omega)$ оператора $\widehat{A}_1 \equiv A_1 + \delta I$, преобразуем к виду:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \|\psi\|^2_{E_0} + \{-k[\widehat{A}\psi,\ \psi]_{E_0} - 2\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} + [A_3\psi,\ \psi]_{E_0} -$$

$$- [\widehat{A}\psi,\ B^*\psi - B\psi]_{E_0}\} e^{-2k(t-t_1)} = 0,\quad \tau \in R^+. \tag{1.48}$$

Рассмотрим далее, следуя по-прежнему [4, § 2], функцию $H(\tau) \equiv \ln \mathrm{h}(z(\tau))$, где $z(\tau) \equiv \|\psi(\tau)\|^2_E$, а $h(z)$ — монотонная возрастающая положительная гладкая функция при $z > 0$, $h(0) = 0$. Тогда, вычисляя производные $dH/d\tau$ и $d^2H/d\tau^2$ и используя уравнения (1.46) и (1.48), получим уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2H}{d\tau^2} = \frac{h'}{h}\{k[\widehat{A}\psi, \psi]_{E_0} + 2\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} + [\widehat{A}\psi, B^*\psi - B\psi]_{E_0} -$$

$$- [A_{3t}\psi, \psi]_{E_0}\} e^{-2k(t-t_1)} + 2\left[\frac{h''}{h} - \left(\frac{h'}{h}\right)^2\right][A\psi, \psi]^2_{E_0} e^{-2k(t-t_1)}, \tag{1.49}$$

а из этого уравнения, полагая $k = 0$, $h(z) \equiv \ln^{-1}(M/z^{\theta})$, $M \equiv 3 \max\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} z^{\theta}(t)$, используя неравенство (1.40) и — это, очевидно, возможно — заменяя в $\widehat{A}$ $\delta$ на $\omega^* \equiv \max(\delta, \omega)$, получим неравенство (ср. [4, § 2])

$$\frac{1}{2}\frac{d^2H}{d\tau^2} \geqslant \theta\left(z \ln \frac{M}{z^{\theta}}\right)^{-1}[2\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} - c_4\|\widehat{A}\psi\|_{E_0}\|\psi\|_{E_0} -$$

$$- c_4'\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0}] + 2\theta\left(z\ln\frac{M}{z^{\theta}}\right)^{-1}\left[-1 + \theta\ln^{-1}\frac{M}{z^{\theta}}\right]\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} \geqslant$$

$$\geqslant 2\theta^2 z^{-1}\ln^{-2}\frac{M}{z^{\theta}}\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} - c_4'\theta\left(z\ln\frac{M}{z^{\theta}}\right)^{-1}\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2}\theta\left(z\ln\frac{M}{z^{\theta}}\right)^{-1}\|\widehat{A}\psi\|^2_{E_0} - \frac{1}{2\varepsilon}\theta c_4^2\left(\ln\frac{M}{z^{\theta}}\right)^{-1}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.50}$$

Из этого неравенства, полагая $\varepsilon = 2\ln^{-1}(M/z^{\theta})$ и выбирая $\theta$ так, чтобы выполнялось условие

$$c_4'\theta\left(z\ln\frac{M}{z^{\theta}}\right)^{-1} + \theta z^{-1}\ln^{-2}\frac{M}{z^{\theta}} \leqslant 2\theta^2 z^{-1}\ln^{-2}\frac{M}{z^{\theta}}, \tag{1.51}$$

т. е. чтобы, как уже говорилось выше, $2\theta \geqslant c_4'\ln 3 + 1$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2H}{d\tau^2} \geqslant -\frac{\theta c_4^2}{4}. \tag{1.52}$$

Ввиду этого функция $H(t) + c_4(t - t_1)^2 \equiv \ln[h(z)e^{c_4(t-t_1)^2}] \equiv \mathscr{H}(t)$ будет выпуклой, и потому для $t \in [t_1, t_2]$ справедливо неравенство

$$\mathscr{H}(t) \leqslant \mathscr{H}(t_1)(1 - \beta(t)) + \mathscr{H}(t_2)\beta(t), \quad \beta(t) \equiv (t - t_1)(t_2 - t_1)^{-1}, \tag{1.53}$$

из которого следует

$$h(z(t)) \leqslant [h(z(t_1))]^{1-\beta(t)}[h(z(t_2))]^{\beta(t)}\chi(t, t_1, t_2), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{1.54}$$

а из (1.5.4), вспоминая, что $z(t) \equiv \|\psi(t)\|^2_{E_0} \equiv \|\Phi\|^2_{E_0} e^{-2\omega^*(t-t_1)} \equiv y(t)$ из(1.41), мы и получаем мультипликативную оценку (1.43).

Из оценки (1.43) и инвариантности задачи (1.16)—(1.18) относительно сдвига по $t \in R^+$ следует, что если при каком-либо $t_1 > 0$ или при каком-либо $t_2 < < \infty$ $\Phi(t_1) = 0$ или $\Phi(t_2) = 0$, то $\Phi(t) \equiv 0$ при $\forall\, t \in R^+$. Тем самым нужное нам свойство задачи (1.16)—(1.18) — корректность прямой и обратной задачи (1.16)—(1.18) при $\forall\, t \in R^+$ — доказана.

Из оценки (1.43) следует также непрерывная зависимость при $\forall\, t \in R^+$ решений задачи (1.16)—(1.18) в пространстве $E^0(\Omega)$, а из мультипликативной оценки [3, 4]

$$\|\varphi\|_{E_{s-1}} \leqslant c_s\|\varphi\|^{\alpha(s)}_{E_0}(\|\varphi\|_{E_s})^{1-\alpha(s)}, \quad 0 < \alpha(s) < 1, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{1.55}$$

и отмеченной выше непрерывной зависимости решений задачи (1.16)—(1.18) в $E_0(\Omega)$ — что если при каком-нибудь $s$ ограничена норма $\|\varphi\|_{E_s}$ решения задачи (1.16)—(1.18), то решение этой задачи непрерывно зависит и в норме $\|\cdot\|_{E_{s-1}}$ при $\forall\, t \in R^+$.

Отметим в заключение, что, как следует из теоремы 1.4, решения $\varphi(t)$, $t \in R$ задачи (1.16)—(1.18), принадлежащие аттрактору $\mathfrak{M}$, являются очень гладкими функциями $(x, t) \in \overline{\Omega} \times R$, если только $f(x)$ и $\partial\Omega$ обладают соответствующей гладкостью, в частности, элементы $\varphi(t) \in \mathfrak{M}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями $(x, t)$, если $f(x)$ бесконечно дифференцируема и $\partial\Omega$ бесконечно гладкая. Более того, как и в [4, § 2] для двумерных уравнений Навье—Стокса, для любой траектории $\varphi(t) \in \mathfrak{M}$ справедливы оценки

$$\sup_{t \in R} \|D^m \varphi\|_{E_0} \leqslant c(m), \tag{1.56}$$

в которых $D$ есть дифференцирование по $x$ или $t$ и постоянные $c(m)$ определяются только $m = 1, 2, \ldots$, соответствующими нормами $f(x)$ в $W_2^l(\Omega)$ и границей $\partial\Omega$, т. е. $c(m)$ — общие для всех траекторий $\varphi(t) \in \mathfrak{M}$. Отсюда, в частности, следует, что, как уже упоминалось выше, операторы $V_t^{-1}$, $t \in R^+$ обладают на $\mathfrak{M}$ «квалифицированной непрерывностью» [7], и потому семейство операторов $\{V_t, t \in R\}$, в котором $V_t = V_{-t}^{-1}$, $t \in R^-$ (см. (1.34)), образует на $\mathfrak{M}$ непрерывную группу.

1.4. Изучим свойства динамической системы $\{\mathfrak{M}, V_t, t \in R\}$, порождаемой начально-краевой задачей (1.16)—(1.18) для двумерных уравнений движений жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$, — именно, докажем «конечномерность динамики $V_t$ на $\mathfrak{M}$» и дадим оценки трем числовым характеристикам аттрактора $\mathfrak{M}$: числу определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$ и хаусдорфовой и фрактальной размерностям $d_H(\mathfrak{M})$ и $d_f(\mathfrak{M})$.

Пусть $\mathscr{E}^n$ — $n$-мерное подпространство пространства $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, натянутое на первые $n$ собственных функций спектральной задачи (1.22) для оператора Стокса; $P_n$ — ортопроектор из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ на $\mathscr{E}^n$; $Q_n \equiv I - P_n$ — ортопроектор из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ на $Q_n\overset{\circ}{J}(\Omega)$; $\mathscr{P}_n$ — ортопроектор из $\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{l=1}^{L} H(\Omega)$ на $\prod_{l=1}^{L+1} \mathscr{E}^n$; $\mathbb{Q}_n$ — ортопроектор из $\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{l=1}^{L} H(\Omega)$ на $\left\{\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{l=1}^{L} H(\Omega)\right\} \ominus \mathscr{P}_n \left\{\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{l=1}^{L} H(\Omega)\right\} \equiv \mathbb{Q}_n \left\{\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{l=1}^{L} H(\Omega)\right\}$. Пусть, далее, $\boldsymbol{\Phi}(t) \equiv \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \equiv \{w; \widehat{w}_1, \ldots, \widehat{w}_L\} \equiv \{w; \widehat{\mathbf{w}}\}$ — разность двух произвольных решений $\varphi(t) \equiv \{v; u_1, \ldots, u_L\} \equiv \{v; \mathbf{u}\}$ и $\tilde{\varphi} \equiv \{\tilde{v}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ задачи (1.16)—(1.18) из $\mathfrak{M}$, $\boldsymbol{\Phi}''(t) = \varphi''(t) - \tilde{\varphi}''(t) \equiv \{w'', \widehat{\mathbf{w}}''\} \equiv \{Q_n w; Q_n\widehat{w}_1, \ldots, Q_n\widehat{w}_L\} \equiv \mathbb{Q}_n\{w, \widehat{\mathbf{w}}\}$. Для $\boldsymbol{\Phi}(t)$ и $\boldsymbol{\Phi}''(t)$ справедливы следующие легко проверяемые соотношения:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{E_0}^2 + \mu\|w_x\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|\widehat{w}_{lx}\|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega w_k \tilde{v} w_{x_k}, \quad t \in R, \tag{1.57}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\Phi}''\|_{E_0}^2 + \mu\|w_x''\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|\widehat{w}_{lx}''\|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega(\tilde{v}_k w + w_k v) w_{x_k}''\, dx, \quad t \in R, \tag{1.58}$$

— из которых с помощью оценки (1.26) и выводятся описанные выше свойства динамической системы $\{\mathfrak{M}; V_t, t \in R\}$.

Теорема 1.5. *Существует число* $N \equiv N\left(\mu^{-1}; \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}}\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})}\right) < \infty$, *такое, что полная орбита* $\gamma(\varphi(0)) \equiv \{V_t(\varphi(0)), t \in R\}$ *решений задачи* (1.16)—(1.18) *при* $\forall\, \varphi(0) \in \mathfrak{M}$ *однозначно восстанавливается по ее ортопроекции* $\mathscr{P}_N\gamma(\varphi(0)) \equiv \{\mathscr{P}_N V_t(\varphi(0)), t \in R\}$ *на подпространство* $\prod_{l=1}^{L+1}\mathscr{E}^N$.

Эта теорема доказывает «конечномерность динамики $V_t$, $t \in R$ задачи (1.16)—(1.18) на аттракторе $\mathfrak{M}$». Наименьшее из чисел $N$, существование которых гарантируется теоремой 1.5, называется числом определяющих мод аттрактора $\mathfrak{M}$ [9] и обозначается $N_1(\mathfrak{M})$. Для числа $N_1(\mathfrak{M})$ справедлива оценка

$$N_1(\mathfrak{M}) \leqslant c_1\lambda_1\mu^{-4} + c_2, \tag{1.59}$$

в которой постоянная $c_1$ зависит только от $\| f \|_{2, \Omega}$ и области $\Omega$, а постоянная $c_2$ зависит только от области $\Omega$.

Доказательство теоремы 1.5 в существенном близко доказательству аналогичного утверждения для двумерных уравнений Навье—Стокса, данному впервые Ладыженской [4, 5]. Положим $M = \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}} \| \varphi \|_{C(\overline{\Omega})}$. В силу оценки (1.26) при $s = 2$ и теоремы вложения $W_2^2(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ когда $\Omega \in E^2$, величина $M$ зависит только от $\mu$, $\Omega$ и $\| f \|_{2, \Omega}$. Тогда правую часть в (1.57) можно оценить так:

$$\left| \int_\Omega w_k \tilde{v} w_{x_k} \right| \leqslant M \| w_x \|_{2, \Omega} \| w \|_{2, \Omega} \leqslant \mu \| w_x \|_{2, \Omega}^2 + \frac{M^2}{4\mu} \| w \|_{2, \Omega}^2. \tag{1.60}$$

Отсюда и из (1.57) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \Phi \|_{E_0}^2 \leqslant \frac{M^2}{4\mu} \| w \|_{2, \Omega}^2 \leqslant \frac{M^2}{4\mu} \| \Phi \|_{E_0}^2, \tag{1.61}$$

и потому

$$\| \Phi(t) \|_{E_0} \leqslant \| \Phi(0) \|_{E_0} \exp\left( \frac{M^2}{4\mu} t \right) \equiv \| \Phi(0) \|_{E_0} l(M, \mu, t), \quad t \in R^+. \tag{1.62}$$

Правую часть соотношения (1.58) оценим так:

$$\left| \int_\Omega (v_k w + w_k v) w''_{x_k} dx \right| \leqslant \| w''_x \|_{2, \Omega} \left[ \left( \int_\Omega | \tilde{v} |^2 | w |^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_\Omega | v |^2 | w |^2 dx \right)^{1/2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2M \| w \|_{2, \Omega} \| w''_x \|_{2, \Omega} \leqslant \frac{\mu}{2} \| w''_x \|_{2, \Omega}^2 + \frac{2M^2}{\mu} \| w \|_{2, \Omega}^2. \tag{1.63}$$

Тогда из (1.58) и (1.63) получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \Phi'' \|_{E_0}^2 + \frac{\mu}{2} \| w''_x \|_{2, \Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L} | \alpha_l | \beta_l \| \hat{w}_{lx} \|_{2, \Omega}^2 \leqslant \frac{2M^2}{\mu} \| w \|_{2, \Omega}^2, \quad \forall t \in R. \tag{1.64}$$

Воспользуемся теперь тем, что для $w''(t) \in Q_N(\overset{\circ}{J}(\Omega))$ справедливо неравенство

$$\| w''_x \|_{2, \Omega}^2 \geqslant \lambda_{N+1} \| w'' \|_{2, \Omega}^2, \quad \lambda_{N+1} \simeq N, \quad N \to \infty, \quad \Omega \in E^2. \tag{1.65}$$

Если $\mathcal{P}_N \varphi(t) \equiv \mathcal{P}_N \tilde{\varphi}(t)$, $t \in R$, то $w = w''$, $\hat{w} \equiv \hat{w}''$, $t \in R$, и потому из (1.64) и (1.65) следует:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \Phi'' \|_{E_0}^2 + \left( \frac{\mu}{2} \lambda_{N+1} - \frac{2M^2}{\mu} \right) \| w'' \|_{2, \Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L} | \alpha_l | \beta_l \| \hat{w}_{lx} \|_{2, \Omega}^2 \leqslant 0, \quad t \in R. \tag{1.66}$$

Возьмем $N \equiv N(\mu^{-1}, M)$ начально большим, чтобы

$$\frac{\mu}{2} \lambda_{N+1} - \frac{2M^2}{\mu} \equiv \varepsilon > 0. \tag{1.67}$$

Так как, без ограничения общности, можно считать $\min \{ | \alpha_l | \} \geqslant \varepsilon$, то из (1.66) и (1.67) получим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \Phi'' \|_{E_0}^2 + \varepsilon \| \Phi'' \|_{E_0}^2 \leqslant 0, \quad \forall t \in R, \tag{1.68}$$

а из него интегрируя по $t$ от $t$ до $t_1 \geqslant t$, —

$$\| \Phi''(t_1) \|_{E_0} \equiv \| Q_N \Phi(t_1) \|_{E_0} \leqslant e^{-\varepsilon(t - t_1)} \| Q_N \Phi(t) \|_{E_0}, \quad \forall t_1 \geqslant t. \tag{1.69}$$

Так как нормы $\| Q_N \Phi(t) \|_{E_0}$ равномерно ограничены при $\forall t \in R$, то для $t \to -\infty$ в (1.69) получим $Q_N \Phi(t_1) = 0$ при $\forall t_1 \in R$, т. е. $\varphi(t_1) = \tilde{\varphi}(t_1)$ при $\forall t_1 \in R$.

Докажем теперь оценку (1.59) для числа определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$, следуя в основном рассуждениям Ладыженской из [9, § 2], где она доказывает аналогичную оценку для двумерных уравнений Навье—Стокса при краевом условии $v|_{\partial\Omega} = 0$. Отметим прежде всего, что для любого решения $\varphi(t)$ задачи (1.16)—(1.18), лежащего в $\mathfrak{M}$, при $\forall\, t \in R$ справедлива оценка (1.21) и вытекающая из энергетического равенства (1.20) и оценки (1.21) оценка

$$\mu \int_\tau^t \|v_x(\xi)\|^2_{2,\Omega}\, d\xi + \sum_{l=1}^{L} |\alpha_l|\, \beta_l \int_\tau^t \|u_{lx}\|^2_{2,\Omega}\, d\xi \leqslant \frac{R_0^2}{2} + (\mu\lambda_1)^{-1} \|f\|^2_{2,\Omega} (t-\tau). \tag{1.70}$$

Далее из соотношения (1.57), используя для оценки интеграла справа неравенства Гельдера и Коши и неравенство Ладыженской (1.13), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_0} + \mu\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L} |\alpha_l|\, \beta_l \|\hat{w}_{lx}\|^2_{2,\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu}{2}\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \mu^{-1}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega}\|w\|^2_{2,\Omega}, \tag{1.71}$$

откуда следует:

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_0} + \mu\|w_x\|^2_{2,\Omega} + 2\sum_{l=1}^{L} |\alpha_l|\, \beta_l \|\hat{w}_{lx}\|^2_{2,\Omega} \leqslant 2\mu^{-1}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega}\|w\|^2_{2,\Omega}, \quad t \in R. \tag{1.72}$$

Если $\mathcal{P}_{N_1}(\Phi) = 0$ для $\forall\, t \in R$, то $\Phi(t) = Q_N\Phi(t)$, и потому для $\Phi(t) \equiv \{w;\ \widehat{\mathbf{w}}\}$, как и для любого элемента из $Q_{N_1}\left\{\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \prod_{l=1}^{L} H(\Omega)\right\}$, справедлива оценка (1.65):

$$\|w_x\|^2_{2,\Omega} \geqslant \lambda_{N_1+1}\|w\|^2_{2,\Omega}. \tag{1.73}$$

Из оценок (1.72) и (1.73) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_0} + (\mu\lambda_{N_1+1} - 2\mu^{-1}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega})\|w\|^2_{2,\Omega} +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{L} \|\alpha_l\|\, \beta_l \|w_{lx}\|^2_{2,\Omega} \leqslant 0, \quad \forall\, t \in R, \tag{1.74}$$

а из (1.74) —

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_0} \leqslant -h(t)\|\Phi\|^2_{E_0}, \quad \forall t \in R; \tag{1.75}$$

в (1.75) $h(t) \equiv \min\left\{\mu\lambda_{N_1+1} - 2\mu^{-1}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega};\ \min_l \{2|\alpha_l|\}\right\}$. Очевидно, что если

$$\int_\tau^t h(\xi)\, d\xi \to +\infty, \quad \tau \to -\infty, \tag{1.76}$$

то $\Phi(t) \equiv 0$ для $\forall\, t \in R$. Используя оценку (1.70), легко видеть, что условие (1.76) заведомо выполняется, если

$$\lambda_{N_1+1} > 2\|f\|^2_{2,\Omega}\lambda_1^{-1}\mu^{-4}. \tag{1.77}$$

Известно [3, гл. II], что собственные числа $\{\lambda_k\}$ спектральной задачи (1.22) для оператора Стокса в случае $\Omega \subset E^2$ имеют первый порядок роста по $k$ при $k \to \infty$, поэтому из (1.77) для $N_1(\mathfrak{M})$ следует оценка (1.59).

Укажем теперь оценки хаусдорфовой $d_H(\mathfrak{M})$ и фрактальной $d_f(\mathfrak{M})$ размерностей аттрактора $\mathfrak{M}$ — покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть* $\alpha \equiv \min|\alpha_l|$ — *достаточно большое число*: $\alpha \gg 1$. *Тогда существуют* $\tau \equiv \tau(\alpha, \mu, M) > 0$ *и* $N \equiv N(\alpha, \mu, M) \gg 1$, *такие, что для* $\forall \varphi(0), \tilde{\varphi}(0) \in \mathfrak{M}$ *справедливы неравенства*

$$\|\Phi(\tau)\|_{E_0} \equiv \|V_\tau(\varphi(0)) - V_\tau(\tilde{\varphi}(0))\|_{E_0} \leqslant l\|\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)\|_{E_0}, \quad l \equiv l(\tau, \mu, M), \tag{1.78}$$

$$\|\Phi''(\tau)\|_{E_0} \equiv \|Q_N V_\tau(\varphi(0)) - Q_N V_\tau(\tilde{\varphi}(0))\|_{E_0} \leqslant \delta\|\Phi(0)\|_{E_0}, \tag{1.79}$$

$$0 < \delta(\alpha, \tau, \mu, M) < 1,$$

*из которых следуют конечность хаусдорфовой размерности* $d_H(\mathfrak{M})$ *аттрактора* $\mathfrak{M}$ *и оценка*

$$d_H(\mathfrak{M}) \leqslant N \ln\left(\frac{8\varkappa^2 l^2}{1-\delta^2}\right) \ln^{-1}\frac{2}{1+\delta^2} \equiv d, \tag{1.80}$$

*где* $\varkappa = \sqrt{\pi l}$ — *постоянная Гаусса.*

Если $\delta < 1/2$, то та же константа $d$ мажорирует и фрактальную размерность $d_f(\mathfrak{M})$ аттрактора $\mathfrak{M}$.

Напомним, что для любого компакта $\mathscr{A}$ $\dim_H(\mathscr{A}) \leqslant \dim_f(\mathscr{A})$, причем существуют достаточно простые примеры компактов $\mathscr{A}^*$, для которых $\dim_H(\mathscr{A}^*) = 0$, а $\dim_f(\mathscr{A}^*) > 0$.

Неравенство (1.78), оценивающее «разбегание траекторий $V_\tau(\varphi(0))$ и $V_\tau(\tilde{\varphi}(0))$ на $\mathfrak{M}$ за время $\tau$», есть уже доказанное неравенство (1.62), и оно справедливо при $\forall \tau \in R^+$ и любом $\alpha > 0$.

Для доказательства неравенства (1.79), оценивающего — при $0 < \delta < 1$ — «сближение хвостов траекторий $Q_N V_\tau(\varphi(0))$ и $Q_N V_\tau(\tilde{\varphi}(0))$ на $\mathfrak{M}$ за время $\tau$», вернемся к неравенству (1.64), оценим в нем член $\frac{\mu}{2}\|w''_x\|^2_{2,\Omega}$ в силу неравенства (1.65) и положим $\mu_* \equiv \mu_*(\alpha, \mu, N) \equiv \min\{\alpha; \mu\lambda_{N+1}\}$. Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}\|\Phi''\|^2_{E_0} + \mu_*\|\Phi''\|^2_{E_0} \leqslant 4M^2\mu^{-1}\|\Phi\|^2_{E_0}, \quad \forall t \in R^+. \tag{1.81}$$

Интегрируя неравенство (1.81) по $t$ от 0 до $t \in R^+$, придем к следующему:

$$\|\Phi''(t)\|^2_{E_0} \leqslant \|\Phi''(0)\|^2_{E_0} e^{-\mu_* t} + 4M^2\mu^{-1}e^{-\mu_* t}\int_0^t \|\Phi(\xi)\|^2_{E_0} e^{\mu_*\xi}\, d\xi. \tag{1.82}$$

Из (1.82), используя оценку (1.62) для $\|\Phi(\zeta)\|_{E_0}$ и производя элементарные подсчеты, получим:

$$\|\Phi''(t)\|_{E_0} \leqslant \|\Phi(0)\|_{E_0}\left[e^{-\mu_* t} + \frac{8M^2}{M^2 + 2\mu\mu_*} e^{M^2 t/2\mu}\right]^{1/2} \equiv$$

$$\equiv \|\Phi(0)\|_{E_0}\,\delta(\alpha, \mu, M, N), \quad \forall t \in R^+. \tag{1.83}$$

Очевидно, что при достаточно больших $\alpha$ и $N \equiv N(\alpha, \mu, M)$ можно выбрать такое $\tau \equiv \tau(\alpha, \mu, M, N)$, при котором величина $\delta$ в (1.83) при $t = \tau$ станет меньше единицы. Тогда неравенство (1.83) превращается в неравенство (1.79).

Итак, неравенства (1.78) и (1.79) доказаны. После этого конечность хаусдорфовой размерности $d_H(\mathfrak{M})$ аттрактора $\mathfrak{M}$ и оценка (1.80) для $d_H(\mathfrak{M})$ следуют из теоремы 1.1 работы Ладыженской [5] (см. также [7—9]), а утверждение теоремы 1.6 о конечности (при условии $0 < \delta < 1/2$) фрактальной размерности $d_f(\mathfrak{M})$ и оценка (1.80) для $d_f(\mathfrak{M})$ — из теоремы 1.2 работы Ладыженской [9].

## § 2. Динамическая система, порождаемая уравнениями движения жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$

2.1. Во введении показано, что движение жидкости Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$ в ограниченной области $\Omega \subset E^3$ описывается — при условиях (0.18) на коэффициенты $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$ — системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + v_k\frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \mu_1\Delta v - \sum_{l=1}^{L}\beta_l\Delta u_l + \operatorname{grad} p = f, \ \operatorname{div} v = 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} - v - \alpha_l u_l = 0, \ l = 1, \ldots, L; \ \mu, \mu_1 > 0; \ \beta_l > 0, \ \alpha_l < 0, \ l = 1, \ldots, L.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Система (2.1) решается в $Q_T = \Omega \times [0, T)$, $0 < T \leqslant \infty$, при начально-краевых условиях

$$v\,|_{t=0} = v_0(x),\ u_l\,|_{t=0} = 0,\ l = 1,\dots, L,\ x \in \Omega;\ \ v\,|_{\partial Q_T} = u_l\,|_{\partial Q_T} = 0,\ l = 1,\dots, L. \tag{2.2}$$

Первый основной результат настоящего параграфа — теорема об однозначной классической разрешимости «в целом» при любой ограниченной области $\Omega \subset E^3$ начально-краевой задачи (2.1), (2.2) при $\forall\, T \leqslant \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:* $\Omega$ — *ограниченная область из* $E^3$; $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$; $v_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega)$; $f(x, t) \in L^\infty(0, T; C^\alpha(\overline{\Omega}))$, $0 < \alpha < 1$; $f_t \in L_{2,1}(Q_T)$; $0 < T \leqslant \infty$. *Тогда начально-краевая задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное решение*

$$\{v; \{u_l\}\} \in W^1_\infty(0, T; C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega)) \times \prod_{l=1}^{L} W^2_\infty(0, T; C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega)),$$

*и для этого решения имеет место оценка*

$$\|v, \{u_{lt}\}\|_{W^1_\infty(0,T;\,C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}))} \leqslant c_1(\|v_0\|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}};\ \|f\|_{L_\infty(0,T;\,C^\alpha(\overline{\Omega}))};\ \|f_t\|_{2,1,Q_T};\ \mu^{-1}), \tag{2.3}$$

*причем постоянная $c_1$ не зависит от $T \leqslant \infty$.*

Теорема 2.1 при любом конечном $T < \infty$ доказана в работах Осколкова [17—20]; при этом в его доказательствах постоянная $c_1$ в оценке (2.3) зависит от $T$ и $c_1 \to \infty$ при $T \to \infty$. Анализ доказательств Осколкова показал (ср. § 1), что для того чтобы доказать теорему 2.1 и при $T = \infty$, достаточно получить для решения задачи (2.1), (2.2) следующие априорные оценки, в которых постоянные в правых частях не зависят от $T \leqslant \infty$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|v\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega}\Big) + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega_T} +\\
&\quad + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\,\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,Q_T} \leqslant \frac{1}{2}(\|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_{0x}\|^2_{2,\Omega}) +\\
&\quad + [(\|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_{0x}\|^2_{2,\Omega})^{1/2} + \|f\|_{2,1,Q_T}]\,\|f\|_{2,1,Q_T} \equiv A,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\Omega}\Big) \leqslant (\|v_t(x, 0)\|^2_{2,\Omega} +\\
&\quad + \mu\|v_{tx}(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + \|v_{0x}\|^2_{2,\Omega}\sum_{l=1}^{L}\beta_l)\times\exp\{2\|f_t\|^2_{2,1,Q_T} +\\
&\quad + 2c_{\text{числ}}A^2\mu^{-1}\mu_1^{-4}\} \equiv \mathfrak{D},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_1\|v_{tx}\|^2_{2,Q_T} + 2\sum_{1=l}^{L}|\alpha_l|\,\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,Q_T} \leqslant \|v_t(x, 0)\|^2_{2,\Omega} +\\
&\quad + \mu\|v_{tx}(x,0)\|^2_{2,\Omega} + \|v_{0x}\|^2_{2,\Omega}\sum_{l=1}^{L}\beta_l +\\
&\quad + 2D(\|f_t\|^2_{2,1,Q_T} + c_{\text{числ}}A^2\mu^{-1}\mu_1^{-4}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Доказательству оценок (2.4)—(2.6) и посвящен п. 2.1.

Умножим первое из уравнений системы (2.1) на $v$, проинтегрируем по области $\Omega$ и воспользуемся остальными уравнениями системы (2.1) и граничными условиями (2.2). Тогда при $\forall\, t \in [0, T]$ получим равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|v\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega}\Big) + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega} +\\
&\quad + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\,\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega} = (f, v)_{2,\Omega}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega})\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{2,\Omega}(\|v\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega})^{1/2}, \tag{2.8}$$

откуда в свою очередь вытекает, что при $\forall t\in[0,\ T]$

$$\frac{d}{dt}(\|v\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega})\leqslant\|f\|_{2,\Omega}. \tag{2.9}$$

Интегрируя неравенство (2.9) по $t\in[0,\ T]$ и применяя операцию максимизации по $t$, получим оценку

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}(\|v\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega})^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant(\|v_0\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_{0x}\|^2_{2,\Omega})^{1/2}+\|f\|_{2,1,Q_T}. \tag{2.10}$$

Далее из (2.7) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega})+\mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega}+$$

$$+\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega}\leqslant\|f\|_{2,\Omega}(\|v\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+$$

$$+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega})^{1/2},\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.11}$$

а из (2.11), используя оценку (2.10), интегрируя по $t\in[0,\ T]$ и применяя операцию максимизации по $t$, мы и получим оценку (2.4).

Продифференцируем первое из уравнений системы (2.1) по $t$, умножим полученное уравнение на $v_t$, проинтегрируем по области $\Omega$ и воспользуемся остальными уравнениями системы (2.1) и граничными условиями (2.2). Интегрируя по частям, получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\Omega})+\mu_1\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+$$

$$+\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\Omega}=-\int_{\Omega}v_{kt}v_tv_{x_k}dx+(f_t,v_t)_{2,\Omega},\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.12}$$

В нижеследующих оценках нам понадобится известное неравенство Ладыженской [3, гл. 1]:

$$\|v\|^4_{4,\Omega}\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}\|v\|_{2,\Omega}\|v_x\|^3_{2,\Omega},\quad\forall v\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\quad\Omega\subset E^3. \tag{2.13}$$

Оценим член $J=-\int_{\Omega}v_{kt}v_tv_{x_k}dx$ в правой части равенства (2.12), используя неравенства Гельдера и Юнга, неравенство (2.13) и уже доказанную оценку (2.4), в силу которой $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x\|_{2,\Omega}\leqslant(2A\mu^{-1})^{1/2}\equiv B$:

$$|J|\leqslant\sqrt{3}\|v_x\|_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{4,\Omega}\leqslant\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{3/4}B^{1/2}\|v_t\|^{1/2}_{2,\Omega}\|v_{tx}\|^{3/2}_{2,\Omega}\times$$

$$\times\|v_x\|^{1/2}_{2,\Omega}\leqslant\frac{\mu_1}{2}\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+c_{\text{числ}}B^2\mu_1^{-3}\|v_x\|^2_{2,\Omega}\|v_t\|^2_{2,\Omega},\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.14}$$

Тогда из (2.12) получим неравенство

$$\frac{d}{dt}(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\Omega})+\mu_1\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+$$

$$+2\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\Omega}\leqslant(2\|f_t\|^2_{2,\Omega}+c_{\text{числ}}B^2\mu_1^{-3}\|v_x\|^2_{2,\Omega})\times$$

$$\times(\|v_t\|^2_{2,\Omega}+\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega}+\sum_{l=1}^{L}\beta_l\|u_{ltx}\|^2_{2,\Omega}), \tag{2.15}$$

из которого, используя лемму Гронуолла и уже доказанную оценку (2.4), в силу которой $\| v_x \|^2_{2, Q_T} \leqslant A \mu_1^{-1}$, пользуясь тем, что $u_{lt}|_{t=0} = v|_{t=0} = v_0(x)$, $l = 1, \ldots, L$, и применяя операцию максимизации по $t$, получим оценку (2.5). После этого, интегрируя неравенство (2.15) по $t \in [0, T]$ и используя уже доказанную оценку (2.5), имеем из неравенства (1.15) и оценку (2.6).

Априорные оценки (2.4)—(2.6) в сочетании с методом Галеркина позволяют доказать существование в целом на $[0, T)$ при $\forall T \leqslant \infty$ и в произвольной ограниченной области $\Omega \subset E^3$ единственного обобщенного решения в смысле Ладыженской [3] задачи (2.1), (2.2), т. е. обобщенного решения с конечными нормами $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \| v_{tx}, u_{ttx} \|_{2, \Omega}$ и $\| v_{tx}, u_{ttx} \|_{2, Q_T}$; после этого с помощью теорем вложения Соболева и теорем о классической разрешимости соответствующих линеаризованных задач с постоянными коэффициентами (нелинейные члены $v_k v_{x_k}$ отправляются в «свободный член» $F(x, t) \equiv f(x, t) - v_k v_{x_k}$), нормы решений которых не зависят от $T \leqslant \infty$, теорема 2.1 доказывается в полном объеме (см. [17—20]).

2.2. Во введении показано, что движение жидкости Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$ описывается также — при условиях (0.18) на $\{\lambda_l\}$, $\nu$ и $\{\varkappa_m\}$ — эквивалентным системе (2.1) операторным дифференциальным уравнением (см. (0.38)—(0.40))

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda_1 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2 \varphi = \mathbf{F}(x), \tag{2.16}$$

в котором

$$\Lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} -\mu_1 \tilde{\Delta} + A(v) & -\beta_1 \tilde{\Delta} & -\beta_2 \tilde{\Delta} & \ldots & -\beta_L \tilde{\Delta} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_L \end{pmatrix}, \quad \mu_1 > 0, \tag{2.17}$$

$$\Lambda_2 \equiv \begin{Vmatrix} -\mu \tilde{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & \mathbb{O} & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{Vmatrix}, \quad \mu > 0. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.16)—(2.18) решается в $Q_\infty \equiv \Omega \times [0, \infty)$, $\Omega \subset E^3$, при начально-краевых условиях

$$\varphi|_{t=0} \equiv \{v; \{u_l\}\}|_{t=0} = \{v_0(x); 0, \ldots 0\}, \; x \in \Omega; \; \varphi|_{\partial Q_\infty} = 0. \tag{2.19}$$

Выберем в качестве фазового пространства задачи (2.16)—(2.19) гильбертово пространство $E_1(\Omega) \equiv \prod\limits_{l=0}^{L} H(\Omega)$ [3] и положим для $\varphi \equiv \{v; u_1, \ldots, u_L\}$ и $\psi \equiv \{v'; u_1', \ldots, u_L'\}$

$$[\varphi, \psi]_{E_1} \equiv (v, v')_{2, \Omega} + \mu (v_x, v_x')_{2, \Omega} + \sum_{l=1}^{L} \beta_l (u_{lx}, u_{lx}')_{2, \Omega}, \tag{2.20}$$

так что $\| \varphi \|_{E_1} \equiv \left[ \| v \|^2_{2, \Omega} + \mu \| v_x \|^2_{2, \Omega} + \sum\limits_{l=1}^{L} \beta_l \| u_{lx} \|^2_{2, \Omega} \right]^{1/2}$.

Начально-краевая задача (2.16)—(2.19), или, что то же, начально-краевая задача (2.1), (2.2), для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 0, 1, 2, \ldots$ является гиперболической в том смысле, что, во-первых, гладкость ее решений $\varphi(x, t)$ по пространственным переменным $x \in \Omega \subset E^3$ в любой момент времени $t > 0$ остается такой же, как и в начальный момент $t = 0$, и, во-вторых, она корректно разрешима в любой $\Omega \subset E^3$ в тех же классах функций и при тех же начальных условиях $v_0(x)$, что при $t > 0$, и в сторону отрицательных $t < 0$. В самом деле, для решений задачи (2.16)—(2.19) из энергетического равенства (2.7) при $t > 0$ уже выведена оценка

$$\frac{1}{2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi\|^2_{E_1(\Omega)} + \mu_1\|v_x\|^2_{2,Q_T} + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\,\beta_l\,\|u_{lx}\|^2_{2,Q_T} \leqslant A, \quad \forall T \leqslant \infty.$$

Аналогично из энергетического равенства (2.7) при $t < 0$ для решений задачи (2.16)—(2.19) выводится следующая оценка:

$$\max_{-T\leqslant t\leqslant 0}\|\varphi\|^2_{E_1(\Omega)} \leqslant (\|v_0\|^2_{2,\Omega} + \mu\|v_{0x}\|^2_{2,\Omega})\,e^{\gamma T} + \int_0^T e^{\gamma(T-\tau)}\|f\|^2_{2,\Omega}\,d\tau, \tag{2.4'}$$

$$\forall T < \infty, \quad \gamma \equiv \max\{1; 2\mu_1\mu^{-1}; \max_l|\alpha_l|\}.$$

С помощью оценок (2.4) и (2.4′) Осколков показал [17—18], что на пространстве $E_1(\Omega)$ определена группа $V_t$, $t \in R$, ограниченных нелинейных непрерывных операторов — разрешающих операторов задачи (2.16)—(2.19), однозначно определяющих слабое решение (решение Хопфа) $\varphi(\cdot, t) \equiv \varphi(t)$ этой задачи по его значению при $t = 0$: $\varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0))$.

Для решений $\varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0))$, $\forall\,\varphi(0) \in E_1(\Omega)$, как уже отмечалось выше, при почти всех $t \in R$ справедливо энергетическое равенство (см. (2.7))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|^2_{E_1} + \mu_1\|v_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\,\beta_l\,\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega} = (f, v)_{2,\Omega}, \tag{2.21}$$

из которого для решения задачи (2.16)—(2.19) следует оценка

$$\|\varphi(t)\|_{E_1} \leqslant R_1 \equiv (\mu^*)^{-1}\|f\|_{2,\Omega}, \quad t \in R, \quad \mu^* = \min\left\{\frac{\mu_1\lambda_1}{2};\ \frac{1}{2}\mu_1\mu^{-1};\ \min_l|\alpha_l|\right\}, \tag{2.22}$$

где $\lambda_1$ — первое собственное число спектральной задачи (1.22) для оператора Стокса.

Оценка (2.22) означает, что шар

$$B_1 \equiv \{\varphi \in E_1(\Omega) : \|\varphi\|_{E_1} \leqslant R_1\} \tag{2.23}$$

является поглощающим множеством для $\forall\,B \subset \mathfrak{B}$, $B \subset E_1(\Omega)$ и $V_t(B_1) \subset B_1$, т. е. все слабые решения Хопфа задачи (2.16)—(2.19) втягиваются в шар $B_1$ за конечное время. Тем самым шар $B_1$ является ограниченным глобальным $\mathfrak{B}$-аттрактором задачи (2.16)—(2.19), а тогда множество

$$\mathfrak{M} \equiv \bigcap_{t \in R^+} V_t(B_1) \tag{2.24}$$

является минимальным глобальным $\mathfrak{B}$-аттрактором этой задачи. В силу доказанной Осколковым [17—18] непрерывности группы $V_t$, $t \in R$, аттрактор $\mathfrak{M}$ является непустым, связанным и инвариантным множеством в $E_1(\Omega)$.

2.3. Представим разрешающий оператор $V_t$ задачи (2.16)—(2.19) при $t > 0$ в виде суммы $V_t \equiv W_t + U_t$, где $W_t$ есть разрешающий оператор для линейной задачи

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda_3\mathbf{w} + \frac{\partial}{\partial t}\Lambda_2\mathbf{w} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} \equiv \varphi(0), \quad x \in \Omega; \quad \mathbf{w}|_{\partial Q_\infty} = 0, \tag{2.26}$$

в которой оператор $\Lambda_3$ имеет вид

$$\Lambda_3 \equiv \begin{pmatrix} -\mu_1\tilde{\Delta} & -\beta_1\tilde{\Delta} & -\beta_2\tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L\tilde{\Lambda} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

а $U_t$ — разрешающий оператор нелинейной задачи

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Lambda_3 \psi + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2 \psi = \mathbf{G}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2.28}$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega; \quad \psi|_{\partial Q_\infty} = 0, \tag{2.29}$$

в которой $G(t) \equiv F(x) - \Lambda_4(\varphi)$, $\varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0))$, и

$$\Lambda_4(\varphi) \equiv \Lambda(\mathbf{v}) \equiv \begin{Vmatrix} A(v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \cdot & & \mathbb{O} & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{Vmatrix}. \tag{2.30}$$

Очевидно, что

$$\varphi(t) \equiv V_t(\varphi(0)) \equiv \mathbf{w}(t) + \psi(t) \equiv W_t \varphi + U_t \varphi, \quad t \geqslant 0. \tag{2.31}$$

Для решения $\mathbf{w}(t) \equiv W_t \varphi(t) \equiv (w, \widehat{\mathbf{w}})$ линейной задачи (2.25)—(2.27) при $\forall \varphi(0) \in E_1(\Omega)$ и при почти всех $t \in R^+$ справедливо однородное энергетическое равенство (2.21)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \mathbf{w} \|^2_{E_1} + \mu_1 \| w_x \|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L} |\alpha_l| \beta_l \| \hat{w}_{lx} \|^2_{2,\Omega} = 0, \tag{2.32}$$

из которого легко следует оценка

$$\| W_t \varphi \|_{E_1} \equiv \| \mathbf{w}(t) \|_{E_1} \leqslant \| \varphi(0) \|_{E_1} e^{-\mu^* t}, \quad t \in R^+, \tag{2.33}$$

причем показатель $\mu^*$ определен в (2.22). Оценка (2.33) показывает, что линейная полугруппа $W_t$ при $t \in R^+$ является на $E_1(\Omega)$ экспоненциально сжимающей [7—9]. Очевидно, что $\bigcap\limits_{t \in R^+} W_t(B_1) \equiv \varnothing$.

Покажем теперь, что нелинейная полугруппа $U_t$, $t \in R^+$, порождаемая задачей (2.28)—(2.30), при $t \in R^+$ является вполне непрерывной в пространстве $E_1(\Omega)$. Для этого отметим прежде всего, что если $\varphi(t) \in E_1(\Omega)$ при $t \in R^+$, то в силу неравенства (2.13) в случае $\Omega \in E^3$ $G(t) \in L_{3/2}(\Omega)$, $t \in R^+$. Поэтому нужное нам утверждение будет доказано, если мы покажем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть $\Omega$ — ограниченная область из $E^3$; $\partial\Omega \in C^2$; $G(t) \in L_p(\Omega)$, $p > 1$, $\forall t \in R^+$. Тогда для слабого решения Хопфа линейной задачи* (2.28)—(2.30) *справедлива оценка*

$$\| U_t \varphi(t) \|^{(2)}_{p,\Omega} \equiv \| \psi(t) \|^{(2)}_{p,\Omega} \leqslant c_2 \| G(t) \|_{p,\Omega}, \quad t \in R^+, \tag{2.34}$$

*причем постоянная $C_2$ зависит только от $p$, $\mu$, $\mu_1$ и области $\Omega$.*

Теорему 2.2 достаточно доказать для $p = 3/2$.

Из результатов В. А. Солонникова (см., например, [3, гл. II]) следует, что оператор $\Lambda_3$, переводящий пространство $\prod\limits_{l=1}^{L+1} W^2_{3/2}(\Omega)$ в $L_{3/2}(\Omega)$, имеет ограниченный обратный $\Lambda_3^{-1}$, и для $\forall \mathbf{w}(x) \in L_{3/2}(\Omega)$ справедлива оценка

$$\| \Lambda_3^{-1} \mathbf{w} \|^{(2)}_{3/2,\Omega} \leqslant c_3 \| \mathbf{w} \|_{3/2,\Omega}, \tag{2.35}$$

причем постоянная $C_3$ зависит только от области $\Omega$. Применим оператор $\Lambda_3^{-1}$ к обеим частям (2.28) и результат проинтегрируем по $t$ от 0 до $t \in R^+$. Тогда получим:

$$\Lambda_3^{-1} \psi(t) + \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau + \Lambda_3^{-1} \Lambda_2 \psi(t) = \int_0^t \Lambda_3^{-1} \mathbf{G}(\tau)\, d\tau \equiv \mathbf{H}(t), \quad t \in R^+. \tag{2.36}$$

В уравнении (2.36) оператор $B = \Lambda_3^{-1} + \Lambda_3^{-1}\Lambda_2$ ограничен в пространстве $\prod\limits_{l=1}^{L+1} W^{(2)}_{3/2}(\Omega)$, а $H(.\,, t) \in W^2_{3/2}(\Omega)$, $\forall t \in R^+$. Тогда для нахождения $\psi(.\,, t) \in$

$\in \prod_{l=1}^{L+1} W_{3/2}^2(\Omega)$ мы получаем операторно-интегральное уравнение вольтерровского типа

$$B\psi(t) + \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau = \mathbf{H}(t), \quad t \in R^+ \qquad (2.37)$$

с ограниченным в пространстве $\prod_{l=1}^{L+1} W_{3/2}^2(\Omega)$ оператором $B$. Хорошо известно, что уравнение (2.37) имеет в пространстве $\prod_{l=1}^{L+1} W_{3/2}^2(\Omega)$ единственное решение, и для этого решения верна оценка

$$\| \psi(t) \|_{3/2,\Omega}^{(2)} \leqslant c_4 \| \mathbf{H}(t) \|_{3/2,\Omega}, \quad t \in R^+, \qquad (2.38)$$

из которой в свою очередь и следует оценка (2.34). Наконец, полная непрерывность полугруппы $U_t$, $t \in R^+$, в пространстве $E_1(\Omega)$ следует из компактности вложения пространства $W_{3/2}^2(\Omega)$ в пространство $W_2^{1+\varepsilon}(\Omega)$, $0 < \varepsilon < 1$ (см., например, [3, гл. I]).

Итак, мы показали, что группа $V_t$ разрешающих операторов задачи (2.16)—(2.19), действующая на фазовом пространстве $E_1(\Omega)$, при $\forall\, t \in R^+$ является суммой линейной экспоненциально сжимающей полугруппы $W_t$ и вполне непрерывной нелинейной полугруппы $U_t$, т. е. полугруппа $V_t$ при $t \in R^+$ принадлежит классу 2 асимптотически компактных полугрупп. Поэтому из доказанных Ладыженской [7—9] общих теорем о свойствах полугрупп класса 2 следует теорема.

Теорема 2.3. *Начально-краевая задача* (2.16)—(2.19) *для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта порядка* $L = 1, 2, \ldots$ *в произвольной ограниченной области* $\Omega \subset E^3$ *имеет в фазовом пространстве* $E_1(\Omega)$ *минимальный глобальный* $B$*-аттрактор* $\mathfrak{M}$, *определенный формулой* (2.24) $\mathfrak{M} \equiv \bigcap_{t \in R^+} V_t(B_1) \equiv \bigcap_{t \in R^+} U_t(B_1)$, *который является непустым, инвариантным, связным компактом в* $E_1(\Omega)$ *и ограниченным в* $\prod_{l=1}^{L+1} \{W_{3/2}^2(\Omega) \cap H(\Omega)\}$ *множеством. Аттрактор* $\mathfrak{M}$ *имеет конечные хаусдорфову* $d_H(\mathfrak{M})$ *и фрактальную* $d_f(\mathfrak{M})$ *размерности, которые оцениваются лишь через данные задачи.*

Группа $V_t$ разрешающих операторов задачи (2.16)—(2.19), действующая при $\forall\, t \in R$ на аттракторе $\mathfrak{M}$, и является динамической системой $\{\mathfrak{M};\ V_t,\ t \in R\}$, порождаемой начально-краевой задачей (2.16)—(2.19) о трехмерных движениях жидкостей Кельвина—Фойгта порядка $L = 1, 2, \ldots$

2.4. Докажем теперь «конечномерность динамики $V_t$ на $\mathfrak{M}$», используя обозначения п. 1.4; покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Существует число* $N \equiv N\left(\mu^{-1}, \mu_1^{-1}; \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} \| \varphi \|_{C(\bar{\Omega})}\right) < \infty$, *такое, что полная орбита* $\gamma(\varphi(0)) \equiv \{V_t(\varphi(0)),\ t \in R\}$ *решений задачи* (2.16)—(2.19) *при* $\forall\, \varphi(0) \in \mathfrak{M}$ *однозначно восстанавливается по ее ортопроекции* $\mathscr{P}_N \gamma(\varphi(0)) \equiv \{\mathscr{P}_N V_t(\varphi(0)),\ t \in R\}$ *на подпространство* $\prod_{l=1}^{L+1} \mathscr{E}^N$.

Пусть $\mathbf{\Phi}(t) \equiv \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \equiv \{w;\ \hat{\mathbf{w}}\}$ — разность двух произвольных решений, $\varphi(t) \equiv \{v;\ \mathbf{u}\}$ и $\tilde{\varphi} \equiv \{\tilde{v},\ \tilde{\mathbf{u}}\}$, задачи (2.16)—(2.19) из $\mathfrak{M}$, $\mathbf{\Phi}''(t) \equiv \varphi''(t) - \tilde{\varphi}''(t) \equiv \{w'',\ \hat{\mathbf{w}}''\} \equiv \mathbb{Q}_N\{w,\ \hat{\mathbf{w}}\}$. Для $\Phi(t)$ и $\Phi''(t)$ справедливы следующие равенства (ср. (1.57) и (1.58)):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \tilde{\mathbf{\Phi}} \|_{E_1}^2 + \mu_1 \| w_x \|_{2,\Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L} |\alpha_l|\, \beta_l \| \hat{w}_{lx} \|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega w_k \tilde{v} w_{x_k}\, dx, \quad t \in R, \qquad (2.39)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \mathbf{\Phi}'' \|_{E_1}^2 + \mu_1 \| w_x'' \|_{2,\Omega}^2 + \sum_{l=1}^{L} |\alpha_l|\, \beta_l \| \hat{w}_{lx}'' \|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega (\tilde{v}_k w + w_k v)\, w_{x_k}''\, dx, \quad t \in R. \qquad (2.40)$$

Положим $M \equiv \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}} \|\varphi\|_{C(\Omega)}$. Из определения аттрактора $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \equiv \bigcap\limits_{t \in R^+} U_t(B_1)$, оценки (2.22) для $\|\varphi(t)\|_{E_1}$, определения $G(t)$, теоремы 2.2 и теоремы вложения $W^2_{s+1/2}(\Omega)$ с $s > 1$ в $C(\bar{\Omega})$, когда $\Omega \subset E^3$, следует, что величина $M$ зависит только от $\|f\|_{s+1}$, $\forall s > 1$, $\mu$, $\mu_1$ и $\Omega$. Тогда из соотношения (2.39) получим (ср. (1.61), (1.62)):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|^2_{E_1} \leqslant \frac{4M^2}{\mu_1}\|\Phi\|^2_{E_1},\ t \in R, \tag{2.41}$$

и потому

$$\|\Phi(t)\|_{E_1} \leqslant \|\Phi(0)\|_{E_1} \exp\left(\frac{M^2}{4\mu_1}t\right) \equiv \|\Phi(0)\|_{E_1} l(\mu;\ \mu_1^{-1};\ t),\ t \in R. \tag{2.42}$$

Правую часть соотношения (2.40) оценим так (ср. (1.63)):

$$\left|\int\limits_\Omega (\tilde{v}_k w + w_k v) w''_{x_k}\, dx\right| \leqslant \frac{\mu_1}{2}\|w''_x\|^2_{2,\Omega} + \frac{2M^2}{\mu_1}\|w\|^2_{2,\Omega}. \tag{2.43}$$

Тогда из (2.40) и (2.43) получим неравенство (ср. (1.64))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi''\|^2_{E_1} + \frac{\mu_1}{4}\|w''_x\|^2_{2,\Omega} + \mu\frac{\mu_1}{4\mu}\|w''_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|\hat{w}''_{lx}\|^2_{2,\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M^2}{\mu_1}\|w\|^2_{2,\Omega},\ t \in R. \tag{2.44}$$

Используя далее неравенство (1.65) и пользуясь тем, что если $\mathcal{P}_N\varphi(t) \equiv \equiv \mathcal{P}_N\tilde{\varphi}(t)$, $\forall\, t \in R$, то и $w = w''$, $\hat{w} = \hat{w}''$, $\forall\, t \in R$, из (2.44) и (1.65) получим (ср. (1.66)):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_1} + \frac{\mu_1}{4\mu}\mu\|w''_x\|^2_{2,\Omega} + \left(\frac{\mu_1}{4}\lambda_{N+1} - \frac{2M^2}{\mu_1}\right)\|w''\|^2_{2,\Omega} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l}|\alpha_l|\beta_l\|\hat{w}''_{lx}\|^2_{2,\Omega} \leqslant 0,\ t \in R. \tag{2.45}$$

Возьмем затем $N \equiv N(\mu^{-1};\ M)$ настолько большим, чтобы

$$\frac{\mu_1}{4}\lambda_{N+1} - \frac{2M^2}{\mu_1} \equiv \varepsilon > 0, \tag{2.46}$$

и положим $\varepsilon_1 \equiv \min\left\{\frac{\mu_1}{4\mu};\ \varepsilon;\ \min\limits_l|\alpha_l|\right\}$. Тогда из (2.45) получим неравенство (ср. (1.68))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi''\|^2_{E_1} + \varepsilon_1\|\Phi''\|^2_{E_1} \leqslant 0,\ \forall t \in R, \tag{2.47}$$

откуда и следует (см. п. 1.4), что $\Phi''(t) \equiv 0$ при $\forall\, t \in R$, и потому $\varphi(t) \equiv \tilde{\varphi}(t)$ при $\forall\, t \in R$.

Получим теперь оценку для числа определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$ аттрактора $\mathfrak{M}$. Отметим прежде всего, что для любого решения $\varphi(t)$ задачи (2.16)—(2.19), лежащего в $\mathfrak{M}$, при $\forall\, t \in R$ справедливы оценка (2.22), вытекающая из нее оценка

$$\max_{t \in R}\|v_x\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{R_1^2}{\mu} \tag{2.48}$$

и следующая вытекающая из (2.21) и (2.22) оценка (ср. (1.70)):

$$\mu_1\int\limits_\tau^t\|v_x(\xi)\|^2_{2,\Omega}d\xi + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\int\limits_\tau^t\|u_{lx}\|^2_{2,\Omega}d\xi \leqslant \frac{R_1^2}{2} + (\mu\lambda_1)^{-1}\|f\|^2_{2,\Omega}(t-\tau). \tag{2.49}$$

Из соотношения (2.39), используя для оценки интеграла справа неравенства Гельдера и Юнга, неравенство Ладыженской (2.13) и оценку (2.48), получим (ср. (2.14) и (1.71))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_1} + \mu_1\|w_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|w_{lx}\|^2_{2,\Omega} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4}\|\tilde{v}_x\|_{2,\Omega}\|w\|^{1/2}_{2,\Omega}\times$$

$$\times\|w_x\|^{3/2}_{2,\Omega}\left(\frac{R_1}{\mu}\right)^{1/4} \leqslant \frac{\mu_1}{2}\|w_x\|^2_{2,\Omega} + c_{\text{числ}}\mu_1^{-3}\|\tilde{v}_x\|^4_{2,\Omega}\|w\|^2_{2,\Omega}, \tag{2.50}$$

откуда (ср. (1.72))

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_1}+\mu_1\|w_x\|^2_{2,\Omega}+2\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|\hat{w}_{lx}\|^2_{2,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant 2c_{\text{числ}}\mu_1^{-3}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega}\|w\|^2_{2,\Omega},\quad \forall t\in R. \tag{2.51}$$

Далее, если $\mathscr{P}_N(\Phi)=0$, $\forall\, t\in R$, то $\Phi(t)\equiv Q_{N_1}\Phi(t)$, и потому для $\varphi(t)\equiv\{w;\ \widehat{\mathrm{w}}\}$ справедлива оценка (1.65): $\|w_x\|^2_{2,\Omega}\geqslant\lambda_{N_1+1}\|w\|^2_{2,\Omega}$. Тогда из оценки (2.51) следует неравенство (ср. (1.74))

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_1}+(\mu_1\lambda_{N_1+1}-2c_{\text{числ}}\mu_1^{-3}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega})\|w\|^2_{2,\Omega}+$$
$$+2\sum_{l=1}^{L}|\alpha_l|\beta_l\|\hat{w}_{lx}\|^2_{2,\Omega}\leqslant 0,\quad \forall t\in R, \tag{2.52}$$

откуда вытекает (ср. (1.75)):

$$\frac{d}{dt}\|\Phi\|^2_{E_1}\leqslant -h(t)\|\Phi\|^2_{E_1},\quad \forall t\in R, \tag{2.53}$$

причем $h(t)\equiv\min\{\mu_1\lambda_{N_1+1}-2c_{\text{числ}}\mu_1^{-3}\|\tilde{v}_x\|^2_{2,\Omega};\ \min_l\{2|\alpha_l|\}\}$. Очевидно, что если

$$\int_\tau^t h(\xi)\,d\xi\to+\infty,\quad \tau\to-\infty, \tag{2.54}$$

то $\Phi(t)\equiv 0$ для $\forall\, t\in R$. Используя оценку (2.49), легко видеть, что условие (2.54) заведомо выполняется, если (ср. (1.77))

$$\lambda_{N_1+1}>2c_{\text{числ}}\|f\|^2_{2,\Omega}R_1^2(\mu\mu_1)^{-1}\mu_1^{-2}(\mu\lambda_1)^{-1}. \tag{2.55}$$

Известно [3, гл. II], что собственные числа $\{\lambda_k\}$ спектральной задачи (1.22) для оператора Стокса в случае $\Omega\subset E^3$ имеют порядок роста $k^{2/3}$ при $k\to\infty$. Тогда из (2.55), вспоминая определение $R_1$ (см. (2.22)), получим следующую оценку для числа определяющих мод $N_1(\mathfrak{M})$ аттрактора задачи (2.16)—(2.19):

$$N_1(\mathfrak{M})\leqslant c_1\mu^{-9/4}(\mu_1\mu^*)^{-3/2}+c_2,$$

— в которой, как и в оценке (1.59), постоянная $c_1$ зависит только от $\|f\|_{2,\Omega}$ и области $\Omega$, а постоянная $c_2$ — только от области $\Omega\in E^3$.

Покажем теперь, что если $\alpha\equiv\min\left\{\mu_1\mu^{-1};\ \min_l|\alpha_l|\right\}$ есть достаточно большое число, то из соотношений (2.39) и (2.40) следуют конечность хаусдорфовой $d_H(\mathfrak{M})$ и фрактальной $d_f(\mathfrak{M})$ размерностей аттрактора $\mathfrak{M}$ и оценка для них (1.80).

Теорема 2.5. *Пусть* $\alpha\gg 1$. *Тогда существуют* $\tau\equiv\tau(\alpha,\mu,\mu_1,M)>0$ *и* $N(\alpha,\mu,\mu_1,M)>1$, *такие, что при* $\forall\,\varphi(0),\ \tilde{\varphi}(0)\in\mathfrak{M}$ *для решений* $\varphi(t)\equiv V_t(\varphi(0))$ *и* $\tilde{\varphi}(t)\equiv V_t(\tilde{\varphi}(0))$ *задачи* (2.16)—(2.19) *справедливы неравенства* (1.78) *и* (1.79), *из которых, как в теореме* 1.6, *при* $0<\delta<1$ *следуют конечность хаусдорфовой размерности* $d_H(\mathfrak{M})$ *и оценка для нее* (1.80), *а при* $0<\delta<1/2$ — *конечность фрактальной размерности* $d_f(\mathfrak{M})$ *и оценка для нее* (1.80).

Неравенство (1.78) есть уже доказанное неравенство (2.42), и оно справедливо при $\forall\tau\in R^+$ и $\forall\,\alpha>0$. Для доказательства неравенства (1.79) обратимся к неравенству (2.44), оценим в нем член $\frac{\mu_1}{4}\|w''_x\|^2_{2,\Omega}$ в силу неравенства (1.65) и положим $\mu_*=\min\{\alpha;\ \mu,\ \lambda_{N+1}\}$. Тогда получим (ср. (1.81)):

$$\frac{d}{dt}\|\Phi''\|^2_{E_1}+\mu_*\|\Phi''\|^2_{E_1}\leqslant 4M^2\mu_1^{-1}\|\Phi\|^2_{E_1},\quad \forall t\in R^+. \tag{2.56}$$

Интегрируя (2.56) по $t$ от 0 до $t\in R^+$, имеем (ср. (1.82))

$$\|\Phi\|^2_{H_1}\leqslant\|\Phi''(0)\|^2_{E_1}e^{-\mu_*t}+4M^2\mu_1^{-1}e^{-\mu_*t}\int_0^t\|\varphi(\xi)\|^2_{E_1}e^{\mu_*\xi}\,d\xi, \tag{2.57}$$

а из этого неравенства, используя оценку (2.42) для $\|\Phi\|^2_{E_1}$ и производя элементарные подсчеты, приходим к следующему (ср. (1.83)):

$$\|\Phi''(t)\|_{E_1} \leqslant \|\Phi(0)\|_{E_1} \left[e^{-\mu_* t} + \frac{8M^2}{M^2 + 2\mu_1\mu_*} e^{\frac{M^2 t}{2\mu_1}}\right]^{1/2} \equiv$$

$$\equiv \|\Phi(0)\|_{E_1} \delta(\alpha, \mu_1, M, N), \quad \forall t \in R^+. \tag{2.58}$$

После этого доказательство теоремы 2.5 завершается точно так же, как и доказательство теоремы 1.6.

### Литература


1. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Мир, 1963. 256 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 288 с.
4. Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье—Стокса//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91—114.
5. Ладыженская О. А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье—Стокса и других диссипативных систем//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 137—155.
6. Ладыженская О. А. Об аттракторах нелинейных эволюционных систем с диссипацией// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 72—85.
7. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных $B$-аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными. Л., 1987. 54 с. (Препринт/ЛОМИ; Е-3-87).
8. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье—Стокса и других уравнений с частными производными//УМН. 1987. Т. 42, вып. 6. С. 25—60.
9. Ладыженская О. А. Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 105—129.
10. Олдройт Дж. Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел: Реология: Теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 757—793.
11. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1964. 256 с.
12. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 356 с.
13. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of polynomic liquids. Vol. 1. Fluid mechanics. N. Y., 1977. 357 p.
14. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 279 с.
15. Осколков А. П. О некоторых нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей//Тр. МИАН. 1975. Т. 127. С. 32—57.
16. Осколков А. П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей//Тр. МИАН. 1983. Т. 159. С. 101—130.
17. Осколков А. П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Л., 1983. 65 с. (Препринт/ЛОМИ; Р-2-83).
18. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей: Автореф. ... докт. физ.-мат. наук. Л., 1983. 32 с.
19. Осколков А. П. Корректные постановки начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей//Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1987. Т. 26. С. 100—120.
20. Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта//Тр. МИАН. 1987. Т. 179. С. 126—164.
21. Осколков А. П., Ахматов М. М., Котсиолис А. А. Об уравнениях движения линейных вязкоупругих жидкостей и уравнениях фильтрации жидкостей с запаздыванием//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 132—137.
22. Каразеева Н. А. О разрешимости в целом на [0, ∞) основной начально-краевой задачи для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 156. С. 69—72.
23. Котсиолис А. А., Осколков А. П. О разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений движения жидкостей Олдройта на [0, ∞) и поведении ее решений при $t \to +\infty$//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 150. С. 112—117.
24. Котсиолис А. А., Осколков А. П. О предельных режимах и аттракторе для уравнений движения жидкостей Олдройта//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 97—100.
25. Котсиолис А. А., Осколков А. П. О динамической системе, порожденной уравнениями движения жидкостей Олдройта//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 119—125.
26. Каразеева Н. А., Котсиолис А. А., Осколков А. П. О динамической системе, порожденной уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка $L$//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 164. С. 47—53.
27. Каразеева Н. А., Осколков А. П. О динамических системах, порождаемых уравнениями движения линейных вязкоупругих жидкостей//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 162. С. 91—102.
28. Калантаров В. К. Об аттракторах для некоторых нелинейных задач математической физики//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 67—71.