

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Ильинский, С. Р. Насыров, О задаче построения контура флютбета по эпюре противодействия,  
*Изв. вузов. Матем.*, 1982, номер 2, 16–23

<https://www.mathnet.ru/ivm6760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

17 мая 2025 г., 20:58:25



Н. Б. Ильинский, С. Р. Насыров

УДК 517.958

О ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ КОНТУРА ФЛЮТБЕТА  
ПО ЭПЮРЕ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ

Рассматривается обратная краевая задача теории фильтрации—задача построения подземного контура (ПК) плотины по эпюре фильтрационного противодействия [1], [2]. Исследуются вопросы существования, единственности и однолиственности решения этой задачи в случае бесконечной глубины водопроницаемого слоя. Выясняются условия однолиственности решения в замкнутой области (отсутствие разрезов в физической плоскости).

1. Постановка задачи

Решается задача плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости под водонепроницаемым ПК плотины в однородном изотропном грунте. Считается, что фильтрация описывается законом Дарси. Тогда, как известно,

$$v = -\kappa \text{grad } h, \quad h = p^*/\gamma + y + c, \tag{1}$$

где  $v$  — поле скоростей в области фильтрации  $G_z (z = x + iy)$ ,  $\kappa$  — коэффициент фильтрации,  $h$  — пьезометрический напор,  $p^*$  — давление,  $\gamma$  — удельная плотность жидкости,  $c$  — константа.

Предполагается, что область  $G_z$  ограничена прямолинейными горизонтальными границами бьефов  $AB$  и  $CA$ , расположенными на одном уровне, и подземным контуром  $BC$ . Фильтрация происходит под действием заданного напора  $H = H_1 - H_2$ , где  $H_1$  и  $H_2$  — соответственно уровни воды в верхнем и нижнем бьефах. Глубина водопроницаемого слоя бесконечна (рис. 1).

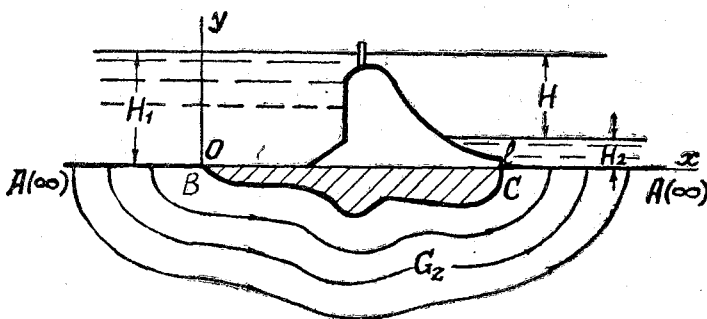


Рис. 1.

Примем за начало отсчета напора  $h$  границу  $CA$  нижнего бьефа, тогда в (1) величина  $c = -H_2$ , и вдоль ПК напор  $h \in [0, H]$ . Введем приведенную функцию давления  $p = p^*/\gamma - H_2$ . Тогда  $p = h - y$ , и

$$p(0) = H, \quad p(l) = 0, \tag{2}$$

где  $l$  — ширина флютбета. Так как давление  $p^*$  есть величина неотрицательная, то  $p \geq -H_2$ .

Теперь можно сформулировать следующую задачу: построить контур флютбета  $BC$  по заданной на нем эпюре (приведенного) противодействия

$$p = p(x) \quad (0 \leq x \leq l), \tag{3}$$

где  $p(x)$  — однозначная непрерывная функция, удовлетворяющая на концах отрезка условиям (2), причем  $p(x) \geq -H_2$ ,  $x \in [0, l]$ . Класс функций  $p(x)$ , удовлетворяющих указанным выше условиям, обозначим через  $S^* [0, l]$ .

В дальнейшем под решением задачи будем понимать конформное отображение  $z(\zeta)$  полуплоскости  $G_\zeta$  на искомую область фильтрации  $G_z$ , которое находится из краевых условий (границы бьефов прямолинейны, эпюра противодавления задана). По функции  $z(\zeta)$  область  $G_z$ , а следовательно, и ПК определяются однозначно.

2. Схема исследования

Проведем исследование поставленной задачи способом, предложенным А. А. Глущенко [1].

Известно, что при сделанных относительно фильтрации предположениях в области  $G_z$  существует комплексный потенциал течения  $w^*(z) = \varphi^*(x, y) + i\psi^*(x, y)$  ( $\varphi^* = -xh$ ,  $\psi^*$  — функция тока), являющийся аналитической в  $G_z$  функцией. Пусть  $w(z) = w^*(z)/x = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  ( $\varphi = -h$ ) — приведенный комплексный потенциал. Введем еще одну аналитическую в  $G_z$  функцию  $\omega(z) = q(x, y) + ir(x, y)$ , называемую функцией Жуковского, соотношением

$$\omega(z) = w(z) - iz \quad (q = \varphi + y, r = \psi - x). \tag{4}$$

Тогда, учитывая граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi &= -H, q = -H \text{ на } AB; \\ \psi &= 0, q = -p(-r) \text{ на } BC; \\ \varphi &= 0, q = 0 \text{ на } CA, \end{aligned} \tag{5}$$

построим области  $G_w$  и  $G_\omega$ , соответствующие искомой области  $G_z$  (рис. 2).

Для удобства дальнейших исследований вместо физической плоскости  $z$  введем плоскость  $\tilde{z} = -iz$ . Тогда в силу (4) будем иметь  $\omega(\tilde{z}) = w(z) + \tilde{z}$ . На рис. 2 в плоскости  $\tilde{z}$  изображена наиболее общая ситуация, когда имеются разрезы вблизи границ бьефов, а искомый ПК располагается частично выше оси абсцисс. (Соответственные точки в разных плоскостях обозначены одинаковыми буквами).

Сделаем замечания относительно разрезов на рис. 2. Если  $p(x) < H$  в окрестности точки  $x=0$  ( $p(x) < 0$  в окрестности точки  $x=l$ ), то в плоскости  $\omega$  возможен разрез  $BE$  (соответственно  $RC$ ), и дальнейшие исследования будут проведены в п. 3. Что же касается разрезов  $BM$  и  $NC$

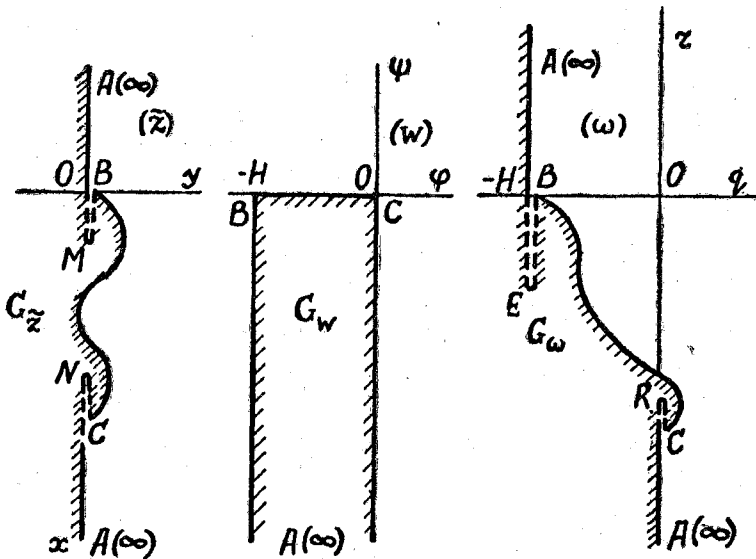


Рис. 2.

в области  $G_z$ , то их появление на первый взгляд кажется неестественным. Однако, во-первых, наличие таких разрезов не противоречит условию прямолинейности границ бьефов. Во-вторых, допуская разрезы  $BM$  и  $NC$ , можно гарантировать разрешимость задачи для любой функции  $p(x) \in C^*[0, l]$ . Кроме того, изменяя длины разрезов  $BM$  и  $NC$ , можно варьировать решение нужным образом.

Сказанное выше позволяет утверждать, что поставленная задача эквивалентна задаче нахождения конформного отображения  $G_\omega$  на  $G_\omega$ .

### 3. О единственности и однолиственности решения

Будем считать сначала, что  $p(x) \geq 0$  в окрестности точки  $x=l$ , т. е. разрез  $RC$  в плоскости  $\omega$  невозможен. Если  $p(x) < H$  на интервале  $(0, l]$ , то длина разреза  $BE$  может быть произвольной. Случай, когда участок  $BA$  в плоскости  $\omega$ , соответствующий границе верхнего бьефа, направлен вниз, исключается из рассмотрения, т. к. при этом область  $G_z$  получается ограниченной.

Если  $p(x) < H$  в окрестности нуля, но  $p(x) = H$  в некоторой точке  $(0, l)$ , то длина разреза  $BE$  ограничена сверху расстоянием от точки  $B$  до точки первого пересечения прямой  $q = -H$  с участком границы  $BC$  в плоскости  $\omega$ . Нетрудно видеть, что если построим в плоскости  $\omega$  область  $G_\omega$ , соответствующую заданной эпюре  $p(x)$ , и зафиксируем длину разреза  $BE$ , то в силу (4) в плоскости  $z$  получим область, граница которой будет состоять из простой кривой  $CB$ , уравнение которой можно задать однозначной функцией  $y = \tilde{f}(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , двух прямолинейных лучей  $BA$  и  $AC$  и, возможно, разрезов  $NC$  и  $BM$ , являющихся продолжениями этих лучей (рис. 2).

Таким образом, если в некоторой окрестности нуля эпюра  $p(x)$  удовлетворяет условию  $p(x) < H$ , то существует бесчисленное множество решений задачи, соответствующих разрезам  $BE$  в области  $G_\omega$  разной длины. Если же в окрестности нуля  $p(x) \geq H$ , то область  $G_\omega$  определяется однозначно (разрез  $BE$  отсутствует), и следовательно, исходная задача разрешима единственным образом.

Пусть  $\omega(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  — функции, конформно отображающие полуплоскость  $G_\zeta (\text{Im } \zeta > 0, \zeta = \xi + i\eta)$  на области  $G_\omega$  и  $G_\omega$  с соответствием точек  $-1 \rightarrow C$ ,  $1 \rightarrow B$ ,  $\infty \rightarrow A$ . Тогда функция  $z(\zeta) = i\tilde{z}(\zeta) = i[\omega(\zeta) - \omega(\zeta)]$  дает решение задачи.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Любое решение  $z(\zeta)$  задачи однолистно.*

Аналогично работе [3] доказательство проведем при помощи принципа аргумента. Применяя дробно-линейное преобразование  $T$  к области  $G_z$ , сведем дело к случаю ограниченной области  $G$ , которая топологически эквивалентна  $G_z$ . Граница  $G$  состоит из жордановой кривой и, возможно, двух разрезов. Из принципа аргумента нетрудно заключить, что каждое значение в области  $G$ , за исключением точек разрезов, принимается в  $G_\zeta$  функцией  $T[\tilde{z}(\zeta)]$  ровно один раз.

Действительно, если  $t$  не является точкой разреза, то при вычислении индекса точки  $t$  относительно границы  $G$  разрезы можно не учитывать. Так как разрезы образуют множество, нигде не плотное в  $G$ , то функция  $T[\tilde{z}(\zeta)]$ , а значит, и  $z(\zeta)$ , однолистны. Теорема доказана.

Пусть в окрестности нуля  $p(x) < H$ . Интересно проследить, как влияет изменение длины разреза  $BE$  в области  $G_\omega$  на решение задачи. Ответ на это дает

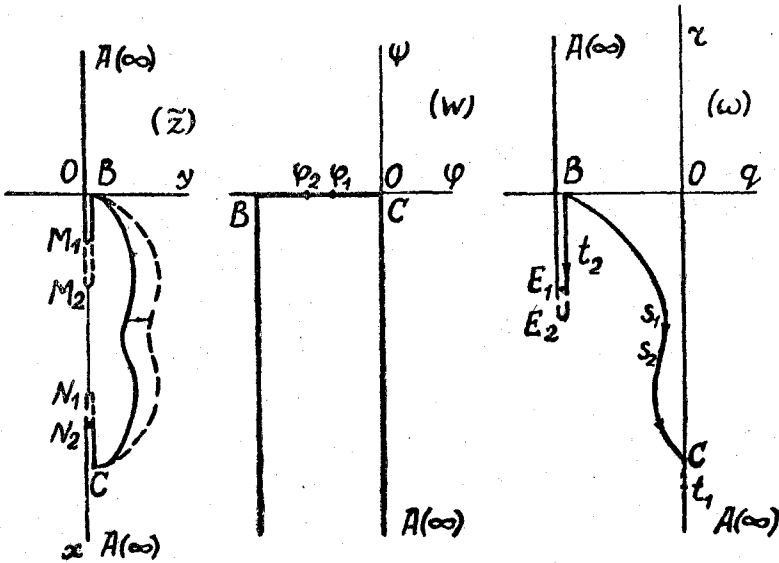


Рис. 3.

Теорема 2. Пусть  $G_\omega^{(1)}$  и  $G_\omega^{(2)}$  — области в плоскости  $\omega$ , соответствующие одной и той же эюбре (2), с разрезами  $BE_1$  и  $BE_2$ , соответственно (рис. 3). Предположим, что длина разреза  $BE_1$  меньше, чем у  $BE_2$ . Тогда:

- 1) контур  $CB$  в плоскости  $\tilde{z}$ , соответствующий области  $G_\omega^{(1)}$ , располагается строго левее контура  $CB$  для  $G_\omega^{(2)}$  за исключением концов (рис. 3);
- 2) длины разрезов  $N_2C$  и  $BM_2$  в плоскости  $\tilde{z}$  для решения, соответствующего  $G_\omega^{(2)}$ , строго больше, чем длины соответствующих разрезов  $N_1C$  и  $BM_1$  для  $G_\omega^{(1)}$  (если последние имеются).

Иными словами, при увеличении длины разреза в плоскости  $\omega$  искомый контур в физической плоскости  $z$  „поднимается“, а разрезы вблизи границ бьефов, если они есть, увеличиваются (рис. 3).

Доказательство. Пусть функция  $\omega_j(w)$  отображает конформно область  $G_\omega$  на  $G_\omega^{(j)}$ ,  $j=1, 2$ , причем точки  $A, B$  и  $C$  переходят в точки на границе  $G_\omega$  с теми же обозначениями. Тогда функция  $\Phi = \omega_2[\omega_1^{-1}(w)]$  осуществляет конформное отображение области  $G_\omega^{(1)}$  на ее подобласть  $G_\omega^{(2)}$ , при котором точки  $A, B$  и  $C$  переходят в себя. Так как, кроме того, области  $G_\omega^{(1)}$  и  $G_\omega^{(2)}$  имеют общий участок границы  $E_1ACBE_1$ , то по известной теореме Положего [4] для отображения  $\Phi$  точка  $C$  является притягивающей, а точки  $A$  и  $B$  — отталкивающими. Так как в соответствующих точках в силу (4) имеем  $\tilde{z} = \omega + (-w)$ , то будем говорить, что точка  $\tilde{z}$  получена из точки  $\omega$  смещением на  $(-w)$ .

1) Пусть точка  $s_1$  лежит на участке  $CB$  границы  $G_\omega^{(1)}$ . По теореме Положего точка  $s_2 = \Phi(s_1)$  лежит ближе к точке  $C$  на дуге  $CB$ , чем точка  $s_1$ . Очевидно,  $\varphi_1 = \omega_1^{-1}(s_1) = \omega_2^{-1}(s_2)$ . Поэтому  $\varphi_2 = \omega_2^{-1}(s_1)$  лежит левее  $\varphi_1$  на оси абсцисс плоскости  $\omega$ . Значит, точка  $s_1$  в случае области  $G_\omega^{(2)}$  получит смещение  $(-\varphi_2)$ , которое больше, чем смещение  $(-\varphi_1)$ , соответствующее области  $G_\omega^{(1)}$ . Поэтому контур  $CB$  в плоскости  $\tilde{z}$  при увеличении длины разреза  $BE$  в плоскости  $\omega$  сдвигается вправо.

2) Пусть область  $G_\omega^{(1)}$ , соответствующая  $G_\omega^{(1)}$ , имеет разрез  $N_1C$ , и  $t_1$  — точка, которая соответствует концу разреза  $N_1$  при каноническом отображении  $G_\omega^{(1)}$  на  $G_\omega^{(1)}$ . Как и в случае 1), с помощью теоремы Положего можно

показать, что точка  $t_1$ , рассматриваемая как точка границы  $G_\omega^{(2)}$ , получит большее смещение вверх, чем в случае, когда рассматривается область  $G_\omega^{(1)}$ . Это значит, что разрез  $N_2C$  области  $G_z^{(2)}$  содержит точки, расположенные выше, чем  $N_1$ , т. е. длина разреза  $N_2C$  больше, чем длина  $N_1C$ .

Наконец, пусть область  $G_z^{(1)}$  имеет разрез  $BM_1$ . Очевидно, что точки левого берега разреза  $BE_1$  в  $G_\omega^{(1)}$  получают большее смещение вверх, чем точки правого берега разреза. Поэтому при конформном отображении  $G_z^{(1)}$  на  $G_\omega^{(1)}$  (точки  $A, B$  и  $C$  переходят в точки с теми же обозначениями) концу разреза  $BM_1$  в  $G_z^{(1)}$  соответствует точка  $t_2$ , лежащая на правом берегу разреза  $BE_1$  в  $G_\omega^{(1)}$ . Так как в случае области  $G_\omega^{(2)}$  по теореме Положего точка  $t_2$  получит меньшее смещение вверх, чем в случае  $G_\omega^{(1)}$ , то разрез  $BM_2$  области  $G_z^{(2)}$  содержит точки, лежащие ниже  $M_1$ . Теорема доказана.

На основании теоремы 2 можно находить различные дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения задачи.

Следствие 1. Существует не более одного подземного контура (решения задачи), проходящего через данную точку  $z$  полосы  $\{0 < \operatorname{Re} z < l\}$ .

Следствие 2. Существует не более одного ПК (решения задачи), максимальная глубина залегания которого равна заданной величине.

Доказательство очевидно.

Заметим, что при непрерывном изменении длины разреза  $BE$  в  $G_\omega$  функции  $y = f(x)$ , задающие уравнения ПК в плоскости  $z$ , изменяются непрерывно как элементы пространства  $C[0, l]$ . Поэтому множество значений  $z$ , для которых решение существует в случае следствия 1, образуют односвязную область с присоединенной „нижней“ границей (контуром, соответствующим области  $G_\omega$  без разреза). Аналогично в случае следствия 2 множество значений глубины залегания ПК, для которых решение существует, образуют некоторый замкнутый снизу интервал.

В заключение рассмотрим случай, когда эпюра (3) удовлетворяет условию  $p(x) < 0$  в окрестности точки  $x = l$ . Тогда область  $G_\omega$  определяется, вообще говоря, с точностью до двух разрезов  $BE$  и  $RC$  (рис. 2).

Теорема 1 остается справедливой и для эпюр такого вида. То же самое можно сказать и о теореме 2, если считать, что длина разреза  $RC$  фиксирована. Наоборот, если считать длину разреза  $BE$  неизменной, то при увеличении длины разреза  $RC$  в физической плоскости  $z$  ПК „опускается“, разрез вблизи границы верхнего бьефа уменьшается, а вблизи границы нижнего — растет.

Следствия 1 и 2 верны, если только в окрестности нуля  $p(x) \geq H$ , т. е. разрез  $BE$  невозможен.

#### 4. Об отсутствии разрезов в физической плоскости

Выясним, каким условиям должна удовлетворять эпюра противодавления (3), чтобы решение задачи было однолистно в замкнутой области.

Теорема 3. 1) Для любой функции  $p(x) \in C^*[0, l]$  существует, по крайней мере, одно решение задачи, при котором разрез  $BM$  в плоскости  $z$  отсутствует.

Если в окрестности точки  $x = l$  эпюра  $p(x) \geq 0$ , и выполняется одно из двух условий: а)  $p(x) \geq H$  в окрестности нуля, б) в некоторой окрестности нуля  $p(x) < H$ , эпюра (3) гладкая и подходит к оси ординат под углом  $\alpha \neq 0$ , то такое решение единственно.

Если  $p(x) < 0$  в окрестности  $x=l$ , то существует бесчисленное множество решений задачи без разрезов  $BM$  в плоскости  $\tilde{z}$ .

2) Если эюра (3) гладкая в окрестности точки  $x=l$  и подходит к оси абсцисс под углом  $\beta$ , то для того, чтобы отсутствовал разрез  $NC$  в области  $G_z$ , необходимо, чтобы  $p(x) \geq 0$  в окрестности точки  $x=l$  и  $\beta = \pi/2$ .

3) Существуют эюры, которым соответствует бесчисленное множество решений задачи без разрезов  $BM$  и  $NC$  вблизи границ бьефов в плоскости  $\tilde{z}$  (см. рис. 2).

Доказательство основано на следующем факте. Пусть функции  $f_1$  и  $f_2$  однолиственны в полуплоскости  $G_c$ , и некоторой граничной точке  $\xi$  в областях  $f_1(G_c)$  и  $f_2(G_c)$  соответствуют угловые точки  $a_1$  и  $a_2$  растворов  $\theta_1\pi$  и  $\theta_2\pi$ ,  $\theta_1 < \theta_2$ . Тогда, если функция  $g = f_1 + f_2$  однолиственна в  $G_c$ , то точке  $\xi$  в области  $g(G_c)$  соответствует угловая точка  $(a_1 + a_2)$  раствора  $\theta_1\pi$ . Более того, с точностью до малых более высокого порядка угол в точке  $a_1 + a_2$  области  $g(G_c)$  получается из угла в точке  $a_1$  области  $f_1(G_c)$  параллельным переносом на вектор  $a_2$ .

Для простоты доказательства предположим, что угловые точки образованы дугами Ляпунова. Тогда, как известно, в окрестности точки  $\xi$  имеем разложение  $f_i(\zeta) = a_i + b_i(\zeta - \xi)^{\theta_i} + o(|\zeta - \xi|^{\theta_i})$ ,  $i = 1, 2$ , где  $b_1$  и  $b_2$  не равны нулю. Так как  $\theta_1 < \theta_2$ , то в окрестности точки  $\xi$   $g(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = a_1 + a_2 + b_1(\zeta - \xi)^{\theta_1} + o(|\zeta - \xi|^{\theta_1})$ , что и требовалось доказать.

1) Очевидно, что область  $G_z$ , которая соответствует области  $G_\omega$  без разреза  $BE$ , не имеет разреза  $BM$ , т. к. точки луча  $BA$  плоскости  $\omega$  получают при сложении с соответствующими точками границы  $G_\omega$  смещения вверх. Если  $p(x) < 0$  в окрестности  $x=l$ , то существует бесчисленное множество областей  $G_\omega$  без разреза  $BE$ , которые получаются при изменении длины разреза  $RC$  в плоскости  $\omega$ .

Пусть теперь  $p(x) \geq 0$  в окрестности  $x=l$ , т. е. разрез  $RC$  в плоскости  $\omega$  невозможен. Если  $p(x) \geq H$  в окрестности нуля, то не допускается также и разрез  $BE$ . Значит, решение единственно, и разрез  $BM$  в  $G_z$  отсутствует.

Если  $p(x) < H$  в окрестности нуля, эюра гладкая, и  $\alpha \neq 0$ , то при наличии разреза  $BE$  в области  $G_\omega$  точка  $B$  становится угловой раствора  $(\pi/2 - \alpha)$ . В области  $G_\omega$  угол в точке  $B$  равен  $\pi/2$ . Таким образом, с точностью до переноса и до малых высшего порядка строение границ  $G_z$  в точке  $B$  и  $G_\omega$  в соответствующей точке совпадает. Это доказывает наличие разреза  $BM$  в плоскости  $\tilde{z}$ . Значит, решение без разреза  $BM$  единственно.

2) Пусть выполнены условия теоремы. Если в плоскости  $\omega$  есть разрез  $RC$  ( $p(x) < 0$  в окрестности  $x=l$ ), то в плоскости  $\tilde{z}$  также будет разрез  $NC$ , т. к. точки  $RC$  при сложении с соответствующими точками границы  $G_\omega$  получат смещения вверх.

Если разрез  $RC$  в  $G_\omega$  отсутствует, то точка  $C$  плоскости  $\omega$  — угловая раствора  $\gamma = \pi + \lim_{x \rightarrow l} \arctg p'(x) \geq \pi/2$ . Пусть  $\gamma > \pi/2$ . Угол в соответствующей

точке  $C$  области  $G_\omega$  равен  $\pi/2$ . Так как  $\tilde{z}(\zeta) = \omega(\zeta) + (-\omega(\zeta))$ , то с точностью до малых более высокого порядка угол в точке  $C$  области  $G_z$  получается из

соответствующего угла в области  $G_\omega$  параллельным переносом и поворотом на  $180^\circ$ . Нетрудно видеть, что в этом случае область  $G_z$  обязана иметь

разрез  $NC$ . Таким образом, необходимым условием отсутствия этого разреза является  $\gamma = \pi/2$ , а это и означает, что  $p(x) > 0$  в окрестности  $x=l$  и  $\beta = \pi/2$ .

3) Рассмотрим обтекание плоского флютбета ( $l = 2, H = \pi$ ). Эпюра приведенного противодавления имеет вид  $p = \arccos(x - 1)$ . Область  $G_z$  не имеет угловых точек, угол в точке  $B$  области  $G_w$  равен  $\pi/2$ . Значит, локально с точностью до переноса строение границ области  $G_w$  в точке  $B$  и области  $G_w$  в соответствующей точке совпадает. Поэтому область  $G_w$  содержит некоторый разрез  $BE$ . При уменьшении этого разреза в плоскости  $z$  возникает семейство контуров с эпюрой  $p = \arccos(x - 1)$ . В силу утверждения 2) теоремы 2 соответствующие области  $G_z$  не имеют разрезов  $BM$  и  $NC$ .

### 5. Случай линейной эпюры

В [2] показано, что исходная задача сводится к задаче нахождения в верхней полуплоскости функции  $z(\zeta) = x(\zeta) + iy(\zeta)$  с простым полюсом на бесконечности, удовлетворяющей граничным условиям

$$p[x(\xi)] + y(\xi) = h(\xi) \quad (|\xi| \leq 1), \quad y(\xi) = 0 \quad (|\xi| \geq 1), \tag{6}$$

где  $h(\xi) = (H/\pi) (\pi/2 + \arcsin \xi)$ .

Если эпюра (3) кусочно-линейна, то (6) по существу становится линейной задачей Гильберта с разрывными коэффициентами. Рассмотрим подробно случай линейной эпюры

$$p(x) = H(1 - x/l) \quad (0 \leq x \leq l). \tag{3'}$$

Пусть  $\pi\gamma = \text{arctg}\{H/l\}$ . В [2] показано, что общее решение задачи (6), (3') имеет вид  $z = z_0(\zeta) = z_0(\zeta) - \beta P(\zeta)$ , где

$$z_0(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{\pi} e^{i\pi\gamma} \cos \pi\gamma \int_{-1}^1 \frac{h(\tau) - H}{P(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}, \tag{7}$$

$$P(\zeta) = (\zeta - 1)^\gamma (\zeta + 1)^{1-\gamma},$$

причем  $\beta > 0$ , и ветвь  $P(\zeta)$  выбрана таким образом, что  $P(\xi) \geq 0$  при  $\xi \geq 1$ .

Решение задачи зависит от постоянной  $\beta$ , с помощью которой можно регулировать длину разреза  $BE$  в области  $G_w$  (рис. 4).

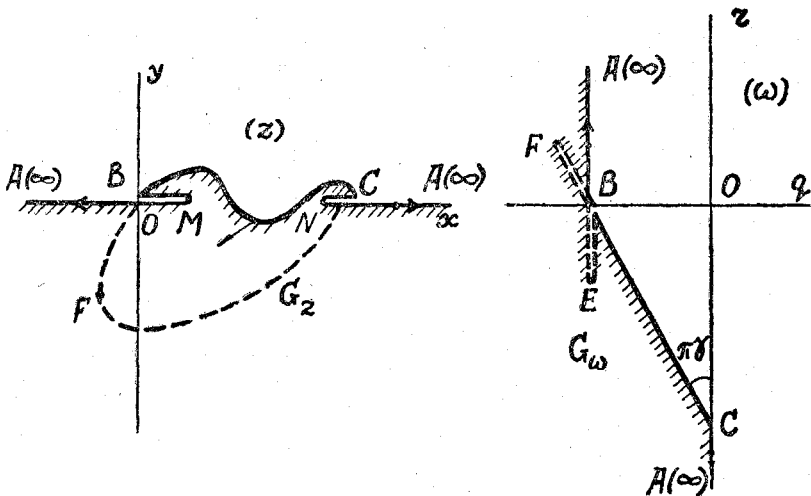


Рис. 4.



Рассмотрим динамику областей  $G_\omega$  и  $G_z$  при возрастании  $\beta$ . Очевидно, что любому решению (7) задачи (6), (3') соответствует область  $G_\omega$ , изображенная на рис. 4, где в точке  $B$  возможны разрезы  $BE$  или  $FB$  (но не оба сразу).

Обратно, любой такой области  $G_\omega$  можно сопоставить некоторое решение задачи (6), (3') вида (7). Поэтому при возрастании  $\beta$  от 0 до  $\infty$  будем получать все возможные области описанного выше типа.

Из (4) и (7) видно, что с ростом  $\beta$  точки границы  $G_\omega$ , соответствующие искомому ПК, получают ненулевые смещения (за исключением концов) в направлении вектора  $\exp\{i(\pi/2 + \pi\gamma)\}$ , а точки, соответствующие границам бьефов  $BA$  и  $AC$  области  $G_z$ , в направлении  $i$  и  $(-i)$  соответственно (на рис. 4 указанные направления смещений обозначены стрелками). Поэтому областям  $G_\omega$  с разрезами  $BE$  соответствуют решения (7) с достаточно малыми  $\beta$ . В этом случае на основании утверждений 1) и 2) теоремы 3 в области  $G_z$  будут присутствовать разрезы  $BM$  и  $NC$ .

При увеличении  $\beta$  разрез  $BE$  в области  $G_\omega$  уменьшается. По теореме 2 искомый контур „опускается“, а длины разрезов  $BM$  и  $NC$  в плоскости  $z$  уменьшаются. В момент исчезновения разреза  $BE$  в области  $G_\omega$  разрез  $BM$  в области  $G_z$  также исчезает. При дальнейшем увеличении  $\beta$  в области  $G_\omega$  появляется и начинает расти разрез  $FB$ , причем участок  $CFB$  границы области  $G_\omega$  соответствует ПК в области  $G_z$ . Поэтому в плоскости  $z$  искомый контур выходит за пределы полосы  $\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq l\}$  и не принадлежит допустимому классу решений.

С помощью формул Сохоцкого и некоторых преобразований можно найти уравнение искомого ПК [2]:

$$x(\xi) = l - \cos \pi\gamma \cdot |P(\xi)| \left( \frac{H}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\tau}{|P(\tau)|(\tau - \xi)} + \beta \right), \quad (8)$$

$u(\xi)$  определяется из (6) ( $|\xi| \leq 1$ ).

Исследовав с помощью (8) поведение  $x(\xi)$  в окрестности точки  $\xi = 1$ , получим, что при  $\beta = H/2\pi\gamma$  разрезы в области  $G_\omega$  отсутствуют. Значит, искомый ПК не выходит за пределы полосы  $\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq l\}$  тогда и только тогда, когда  $0 < \beta \leq H/2\pi\gamma$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Глушенко А. А. Об одном методе решения обратных задач теории фильтрации.— Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 10, с. 103—109.
2. Бородин В. М., Ильинский Н. Б. Построение подземного контура по эпюре фильтрационного противодавления.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1968, вып. 5, с. 12—19.
3. Аксентьев Л. А. Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности, I.— Изв. вузов. Матем., 1968, № 12, с. 3—15.
4. Положий Г. Н. О движении граничных точек отображаемых областей.— УМН, 1952, т. VII, вып. 6, с. 203—205.

г. Казань

Поступила  
12 V 1980

#### Ю. Б. Ермолаев. К вопросу о картановских продолжениях

(аннотация статьи, принятой к печати)

В работе дано подробное изложение результатов, анонсированных автором в „Тезисах сообщений“ четвертого всесоюзного симпозиума по теории колец, алгебр и модулей в г. Казани (1980, с. 37). (Работа поступила в журнал „Математика“ 5 XII 1980.)