

Введем энергетические формы

$$E_{\delta}(u, t) = \int_{R^2} [ |u_t|^2 + A |u_x|^2 + (B + \delta) |u_y|^2 + \gamma_1 u_y \bar{u} + c |u|^2 ] dx dy,$$

$$E_{\delta, p} = \sum_{i+j+k \leq p} E_{\delta} \left( \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial t^i \partial x^j \partial y^k} u, t \right).$$

С использованием результатов [7], [8] получаем, что при достаточно большом  $c$

$$E_{\delta}(u, t) \geq \int_{R^2} [ |u_t|^2 + \varepsilon_1 A |u_x|^2 + (\varepsilon_1 B + \delta) |u_y|^2 + |u|^2 ] dx dy, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

С помощью этого неравенства доказываем, что

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E_{\delta}(u, t) + \operatorname{Re} \int_{R^2} P_{\delta} u \cdot \bar{u}_t dx dy \right| \leq \left( \frac{c_0}{t} + C \right) E_{\delta}(u, t).$$

Отсюда следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\delta, p}(u, t) \leq 2 |P_{\delta} u, t|_p \cdot E_{\delta, p}^{1/2}(u, t) + \left( \frac{c_0}{t} + C \right) E_{\delta, p}(u, t),$$

где

$$|f, t|_p^2 = \sum_{i+j+k \leq p} \int_{R^2} \left| \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial t^i \partial x^j \partial y^k} f \right|^2 dx dy.$$

В силу неравенства Гронуолла получаем, что при  $N \geq c_0$ :

$$t^{-M} E_{\delta, p}^{1/2}(u, t) \leq C \int_0^t \tau^{-M} |P_{\delta} u, \tau|_p d\tau.$$

Отсюда легко заключаем о существовании и единственности решения задачи (1)–(2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., "Наука", 1966.
2. Oleinik O. A. On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. *Commun. pure and appl. math.*, v. 23, № 4, 1970, p. 569–586.
3. Терсенов С. А. О задаче Коши с данными на линии вырождения типа для гиперболического уравнения. *Дифференц. уравнения*, т. II, № 1, 1966, с. 125–130.
4. Нерсесян А. Б. О задаче Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной гиперплоскости. *ДАН СССР*, т. 181, № 4, 1968, с. 798–801.
5. Иврий В. Я. Интеграл энергии для нестрого гиперболических уравнений. *Тр. Московск. матем. о-ва*, т. 34, 1977, с. 150–169.
6. Hörmander L. The Cauchy problem for differential equations with double characteristic. *Preprint, Inst. Mittag-Leffler*, 1976.
7. Грушин В. В. Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии. *Матем. сб.*, т. 84(126):2, 1971, с. 163–195.
8. Melin A. Lower bounds for pseudodifferential operators. *Arkiv. mat.*, bd. 9, № 1, 1971, s. 117–163.

г. Магнитогорск

Поступила  
18 VI 1977

В. С. Мокейчев

УДК 517.95

#### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Как не раз подчеркивал А. Д. Мышкис [1], [2], теория уравнений с отклоняющимися аргументами (УСОА) в частных производных не разработана, хотя попытки в этом направлении предпринимались. Причина этого — в отсутствии эффективного метода исследования УСОА. Ниже предлагается теория, построенная с использованием периодических задач. Говоря о теории разрешимости, мы предполагаем исследование следующих моментов: структура решений, их

гладкость, разрешимость при любой правой части, явный вид всех решений стационарного УСОА. Для простоты изложение будем вести для скалярного УСОА

$$Ry(x) \equiv \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=0}^1 c_{\alpha, j}(x) D^\alpha y(h_{\alpha, j}(x)) = f(x), \quad x \in (0, 2\pi) \subset R^m. \quad (0)$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения. Выписав две серии отклонений, мы подчеркиваем тем самым, что они могут быть произвольной природы.

## § 1. Понятие решения

Всюду  $C^\infty(R^m)$  ( $C_0^\infty(R^m)$ ) — множество всех бесконечное число раз дифференцируемых функций (с компактными носителями);  $C_\Pi^\infty(2\pi) \subset C^\infty(R^m)$  — множество всех функций, имеющих вместе с производными любого порядка период  $2\pi$  по каждой координате;  $D^1(R^m)$  — множество всех распределений [3].

**Определение 1.** Распределение  $u$  называется решением УСОА (0), если существует такая последовательность функций  $\psi_r(x) \in C^\infty(R^m)$ , что  $u = \lim_r \psi_r(x)$  в смысле распределений и  $\|R\psi_r(x) - f(x)\| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Здесь и далее  $\|\cdot\|$  — норма в  $L^2(0, 2\pi)$ . Элементы множества  $[C_\Pi^\infty(2\pi)]^*$  называются периодическими распределениями [4].

**Определение 2.** Периодическое распределение  $v$  называется периодическим решением УСОА (0), если ряд

$$\sum_{|p|=0}^{\infty} v_p R \exp[ip, x]_m, \quad v_p = v(\exp[ip, x]_m), \quad [ip, x]_m = \sum_{j=1}^m ip_j x_j, \quad (1)$$

сходится в  $L^2(0, 2\pi)$  к функции  $f(x)$ .

Используя равенство  $u = (u + v) - v = z - v$ , легко убеждаемся в том, что для построения общей теории УСОА достаточно построить теорию разрешимости периодических задач для УСОА.

## § 2. Стационарные УСОА

Они обладают тем свойством, что числа  $A(\lambda + ip) = \exp[-\lambda - ip, x]_m R \exp[\lambda + ip, x]_m$ ,  $|p| = 0, 1, \dots$ , не зависят от  $x$ . Оказывается, что множество  $\bigcup_{|p|=0}^{\infty} \{\lambda = (\lambda, \dots, \lambda) : A(\lambda + ip) = 0\}$  имеет меру нуль.

**Теорема 2.1.** *Всякое решение УСОА имеет вид*

$$u = z + \exp[\lambda, x]_m \sum_{|p|=0}^{\infty} v_p \exp[ip, x]_m / A(\lambda + ip),$$

где  $v_p = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \{f(x) - Rz\} \exp[-\lambda - ip, x]_m dx$  и  $z$  — распределение, обладающее свойствами

$z = \lim_r \psi_r(x)$  в смысле распределений,  $\psi_r(x) \in C^\infty(R^m)$ , и последовательность  $\{R\psi_r(x), r=1, 2, \dots\}$  сходится к некоторой функции, которую мы обозначим  $Rz$ .

**Теорема 2.2.** *Следующие утверждения равносильны: при любой  $f(x)$  периодическое решение  $v$  УСОА обладает свойством  $D^\alpha v \in L^2(0, 2\pi)$ ; при достаточно больших  $|p|$  выполняются оценки  $|(ip)^\alpha \cdot |A(ip)|^{-1} \leq b < \infty$ .*

Утверждения указывают на то, что присутствие в УСОА членов с отклонениями аргументов оказывает существенное влияние на гладкость решения. Это и является одной из причин того, что УСОА практически невозможно исследовать методом начальных функций, как в случае  $m = 1$ .

### § 3. Свойство (E) и нормальная разрешимость

$D_A$  — множество всех тех распределений  $v$ , для которых ряд (1) сходится в  $L^2(0, 2\pi)$ .  $A$  — оператор с областью определения  $D_A$ , порожденный периодической задачей. Это означает,

$$\text{что } Av = \sum_{|p|=0}^{\infty} v_p R \exp[ip, x]_m.$$

Определение 3. Оператор  $A$  обладает свойством (E), если существуют такие числа  $z_p \neq 0$ , не зависящие от  $v_p$ , что для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{|p|=0}^{\infty} |v_p|^2 |z_p|^2 < \infty.$$

Теорема 3.1. Оператор  $A$ , обладающий свойством (E), нормально разрешим.

Теорема 3.2. Если оператор  $A$  обладает свойством (E), то следующие утверждения равносильны: для периодических решений  $v$  УСОА  $D^\alpha v \in L^2(0, 2\pi)$ ; для некоторого числа  $c_1 > 0$  и достаточно больших  $|p|$   $\|A \exp[ip, x]_m\| \geq c_1 |(ip)^\alpha|$ .

Теорема 3.3. Если оператор  $A$  обладает свойством (E), взаимно однозначен и  $\|A \exp[ip, x]_m\| \geq c_2 > 0$  для достаточно больших  $|p|$ , то оператор  $A^{-1}$  непрерывно действует из  $L^2(0, 2\pi)$  в  $L^2(0, 2\pi)$ .

### § 4. Априорные оценки. Операторы, обладающие свойством (E)

Теорема 4.1. Пусть существуют такие числа  $c_1 > 0$ ,  $N$ ,  $c_1(N)$ ,  $c_2$ , что

$$\begin{aligned} c_2 \sum_{\alpha \in \Phi} \|\varphi^{(\alpha)}(x)\| &\geq \|A\varphi(x)\| \geq c_1 \sum_{\alpha \in \Phi} \|\varphi^{(\alpha)}(x)\| - c_2(N) \|\varphi_N(x)\|, \quad \varphi_N(x) = \\ &= \sum_{|p|=0}^N \varphi_p \exp[ip, x]_m \quad \forall \varphi(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда оператор  $A$  обладает свойством (E).

Определение 4. Дифференциальное выражение  $R_{\Gamma}: R_{\Gamma}u \equiv \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{j=0}^1 c_{\alpha, j}(x) D^\alpha u(h_{\alpha, j}(x))$ ,

$\Gamma \subset \Phi$ , называется старшей частью для  $R$ , если для любого  $\varepsilon > 0$ , некоторой постоянной  $C(\varepsilon)$  и всех  $\varphi(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi)$  имеет место

$$\sum_{\alpha \in \Phi - \Gamma} \sum_{j=0}^1 \|\varphi^{(\alpha)}(h_{\alpha, j}(x))\| \leq \varepsilon \sum_{\alpha \in \Gamma} \|\varphi^{(\alpha)}(x)\| + c(\varepsilon) \|\varphi_{N(\varepsilon)}(x)\|.$$

В дальнейшем через  $A_{\Gamma}$  обозначается оператор, порожденный периодической задачей для УСОА  $R_{\Gamma}u = g(x)$ , который назовем старшей частью оператора  $A$ .

Теорема 4.2. Оценки (2) выполняются тогда и только тогда, когда аналогичные имеют место для старшей части  $A_{\Gamma}$ .

Пусть имеет место неравенство

$$\|\varphi(h_{\alpha, j}(x))\| \leq b_{\alpha, j} \|\varphi(x)\| \quad \forall \varphi(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi). \quad (3)$$

Теорема 4.3. В случае (3) мультииндекс  $\alpha$  младший тогда и только тогда, когда  $(ip)^\alpha \cdot \left( \sum_{\alpha \in \Gamma} |(ip)^\alpha| \right)^{-1} \rightarrow 0, |p| \rightarrow \infty$ .

Следующее утверждение — одно из центральных в статье.

Теорема 4.4. Предположим, что функции  $c_{\alpha, j}(x)$  — непрерывные в  $[0, 2\pi]$  и  $h_{\alpha, j}(x) = x$ ,  $\alpha \in \Gamma$ ; каждый мультииндекс  $\beta$  младший, где  $\beta < \alpha \in \Gamma$ ; для некоторых постоянных  $N$ ,  $c_1 > 0$  и всех  $x \in [0, 2\pi]$

$$|A_{\Gamma} \exp[ip, x]_m| \geq c_1 \sum_{\alpha \in \Gamma} |(ip)^\alpha|, \quad |p| > N.$$

Тогда оператор  $A$  обладает свойством (E) и  $z_p = \sum_{\alpha \in \Gamma} |(ip)^\alpha|$ .

Для доказательства этого утверждения используется такое разбиение единицы [6] (с. 180), при котором  $|c_{\alpha, j}(x) - c_{\alpha, j}(y)| < \delta$  на носителе каждой функции разбиения. Используя это разбиение, а также соотношения

$$\begin{aligned} \|A_{\Gamma} \varphi(x)\| &= \left\{ \sum_{r=1}^{N(\delta)} \|\omega_r(x) A_{\Gamma} \varphi(x)\|^2 \right\}^{1/2} \geq \left\{ \sum_{r=1}^{N(\delta)} \left\| \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{j=0}^1 c_{\alpha, j}(y) [\omega_r(x) \varphi(x)]^{(\alpha)} \right\|^2 \right\}^{1/2} - \\ &- \left\{ \sum_{r=1}^{N(\delta)} \left\| \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{j=0}^1 [c_{\alpha, j}(x) - c_{\alpha, j}(y)] \cdot [\omega_r(x) \varphi(x)]^{(\alpha)} \right\|^2 \right\}^{1/2} - \\ &- \left\{ \sum_{r=1}^{N(\delta)} \|\omega_r(x) A_{\Gamma} \varphi(x) - A_{\Gamma} [\omega_r(x) \varphi(x)]\|^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

установим для оператора  $A_{\Gamma}$  оценки типа (2).

**Теорема 4.5.** Пусть выполняются предположения теоремы 4.4, и пусть для всех  $p$  и  $x \in (0, 2\pi)$  выполняются оценки

$$|A_{\Gamma} \exp[ip, x]_m + \lambda \exp[ip, x]_m| \geq c_1 \sum_{\alpha \in \Gamma} |(ip)^{\alpha}| + c_2(\lambda),$$

причем  $c_1 > 0$  не зависит от  $\lambda, p, x$  и  $c_2(\lambda_v) \rightarrow \infty$  при некоторых  $\lambda_v, v = 1, 2, \dots$  Тогда, начиная с некоторого  $\nu$ ,

$$\|A_{\Gamma} \varphi(x) + \lambda_{\nu} \varphi(x)\| \geq c_3 \sum_{\alpha \in \Gamma} \|\varphi^{(\alpha)}(x)\| \quad \forall \varphi(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi), \quad (4)$$

причем постоянная  $c_3$  не зависит от  $\lambda_{\nu}$ .

Понятно, что свойство (E) устойчиво относительно „малых“ возмущений. Оценки (4) важны в том смысле, что указывают на существование у оператора  $A_{\Gamma}$  несобственных значений.

### § 5. Разрешимость уравнения $A_{\Gamma} v = f(x)$ при любой $f(x)$

Предварительно рассматриваем тот случай, когда  $c_{\alpha, j}(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi), h_{\alpha, j}(x) = x, \alpha \in \Gamma$ . Оператор  $A_{\Gamma}^{\pm}: A_{\Gamma}^{\pm} \omega = \sum_{|p|=0}^{\infty} \omega_p \left\{ \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{j=0}^1 (-1)^{|\alpha|} (\overline{c_{\alpha, j}(x)}) \exp[ip, x]_m^{(\alpha)} \right\}$  формально сопряжен к  $A_{\Gamma}$ .

В предположениях теорем 4.4, 4.5 операторы  $A_{\Gamma}, A_{\Gamma}^{\pm}$  обладают свойством (E), имеют несобственные значения, и их области определения являются подмножествами пространства  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Теорема 5.1.** Пусть при некоторых  $\lambda$  операторы  $A_{\Gamma} + \lambda, A_{\Gamma}^{\pm} + \bar{\lambda}, [A_{\Gamma} + \lambda] [A_{\Gamma}^{\pm} + \bar{\lambda}], [A_{\Gamma}^{\pm} + \bar{\lambda}] [A_{\Gamma} + \lambda]$  взаимно однозначны, обладают свойством (E), и их области определения расположены в  $L^2(0, 2\pi)$ . Тогда  $A_{\Gamma}^{\pm} = A_{\Gamma}^*$ , и области значений всех операторов совпадают с  $L^2(0, 2\pi)$ .

Как обычно,  $A_{\Gamma}^*$  — сопряженный к  $A_{\Gamma}$  оператор. Опираясь на рассмотренный случай, докажем следующее утверждение.

**Теорема 5.2.** Если выполняются предположения теорем 4.4, 4.5 и оператор  $A$  взаимно однозначный, то  $AD_A = L^2(0, 2\pi)$ .

Понятно, что „малые“ возмущения оператора  $A$  не портят последнего равенства.

### § 6. Зависимость гладкости решения от гладкости $f(x)$

Предположим, что  $c_{\alpha, j}(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi), h_{\alpha, j}^{(\gamma)}(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi), |\gamma|=1$ , причем  $h_{s, j}(x) = x + \tau_{s, j}, s \in \Gamma$ ; каждый мультииндекс  $\beta$  младший, где  $\beta < \alpha \in \Gamma$ ; для всех  $\varphi(x) \in C_{\Pi}^{\infty}(2\pi)$  выполняются оценки (4.2), а также

$$\|A\varphi(x)\| \geq c_1 \sum_{\alpha \in \Gamma} \|\varphi^{(\alpha)}(x)\| - c_1(N) \|\varphi_N(x)\|;$$

оператор  $A$  имеет хотя бы одно регулярное значение  $\lambda; f(x) \in D_B$ , где

$$Bv = \sum_{|p|=0}^{\infty} v_p B(ip) \exp[ip, x]_m, \quad B(ip) = \sum_{\alpha \in \Gamma_1} A_{\alpha}(ip)^{\alpha}, \quad |(ip)^{\alpha}| \cdot |B(ip)|^{-1} \leq b < \infty \quad \forall \alpha \leq s \in \Gamma_1.$$

Тогда для решения уравнения  $Av = f(x)$  выполняется оценка

$$\sum_{|p|=0}^{\infty} |v_p|^2 \left( \sum_{\alpha \in \Gamma} |(ip)^{\alpha}| \right)^2 |B(ip)|^2 < \infty.$$

В заключение напомним, что для некоторых УСОА имеются эффективные условия проверки оператора  $A$  на однозначность [7]. Часть из полученных в данной работе результатов для случая  $h_{\alpha, j}(x) \equiv x$  опубликована в [4], [8]—[10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УМН, т. XXII, вып. 2, 1967, с. 21—67.
2. Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УМН, т. XXXII, вып. 2, 1977, с. 173—202.
3. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., „Мир“, 1965.
4. Мокейчев В. С. Периодические решения дифференциальных уравнений с частными производными. Изв. вузов. Матем., 1973, № 3, с. 77—87.
5. Мильман В. Д. Геометрическая теория пространства Банаха. УМН, т. XXV, вып. 3, 1970, с. 113—174.
6. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., „Мир“, 1966.
7. Мокейчев В. С. Собственные значения периодической краевой задачи для некоторых уравнений с частными производными. Дифференц. уравнения, т. XII, № 2, 1976, с. 356—358.
8. Мокейчев В. С. О сопряженных операторах. Изв. вузов. Матем., 1976, № 10, с. 52—55.
9. Мокейчев В. С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Изв. вузов. Матем., 1975, № 4, с. 103—107.
10. Мокейчев В. С. О независимости решения краевых задач от основного базиса. Самосопряженность некоторых задач. Изв. вузов. Матем., 1978, № 12, с. 67—71.

Г. Казань

Поступила  
9 I 1980