Е. Н. Петрова, С. А. Пирогов, Разное сложение разных величин, *Матем. обр.*, 2015, выпуск 1, 53–55

Разное сложение разных величин

Е. Н. Петрова, С. А. Пирогов

Авторы показывают, что привычное еще со школы понятие сложения величин может приводить к разным операциям в разных математических и механических теориях (например, различное сложение скоростей в классической и релятивистской механике), а также выявлять взаимосвязи между, казалось бы, далекими областями математики (пифагровы треугольники, комплексная экспонента, числа Клиффорда и т.п.).

Ещё в древности математики умели складывать однотипные геометрические величины — длины, площади, углы. В некоторых случаях (длины, площади) сложение величин сводится к сложению вещественных чисел. Сложение углов имеет несколько иную природу — это сложение вещественных чисел "с точностью до $2\pi n$", где n — целое число. Или же его можно реализовать как умножение — умножение комплексных чисел, равных 1 по абсолютной величине. Механика также дает примеры сложения величин. При этом вещественные числа можно складывать, $w = u + v$, и можно перемножать, $w = uv$. Эти два действия связаны между собой с помощью операции "логарифмирования": $\log(uv) = \log u + \log v$. (Имеются в виду десятичные логарифмы положительных чисел, или логарифмы по любому другому основанию.) Алгебраисты говорят, что логарифм — это *изоморфизм мультипликативной группы положительных вещественных чисел* и *аддитивной группы всех вещественных чисел* [Lyub].

В механике скорости движения по прямой (которые представляются вещественными числами) тоже можно складывать. Но — двумя способами. Первый способ, $w = u + v$, — по Галилею-Ньютону (классическая механика). Второй способ, $w = (u + v)/(1 + uv/c^2)$, — по Лоренцу-Эйнштейну (релятивистская механика). Второй способ сложения скоростей можно свести к умножению положительных чисел, если ввести функцию $k(v) = (c + v)/(c - v)$. Теперь формула $k(w) = k(u)k(v)$ эквивалентна формуле сложения скоростей по Лоренцу-Эйнштейну. Величина $k(v)$ положительна, поскольку предполагается, что скорость v меньше, чем "c" по абсолютной величине (свет догнать невозможно!). Величина $k(v)$ имеет простой кинематический смысл. Пусть неподвижный источник света ("маяк") каждую секунду излучает импульс света, который отражается от движущегося со скоростью v объекта и возвращается к маяку. Тогда отраженные импульсы возвращаются к маяку через интервалы времени, равные $k(v)$ секунд. (Это так называемый *двойной эффект Доплера.* При решении этой задачи нужно иметь в виду, что и излучённый, и отраженный свет движется с одной и той же скоростью c.) Если взять логарифм от коэффициента $k(v)$, то получим $\log k(w) = \log k(u) + \log k(v)$, в том случае, когда w есть "сумма" u и v по Лоренцу-Эйнштейну. Величина $\log k(v)$ называется (с точностью до коэффициента) "быстротой" движения (таким образом, "быстрота" и "скорость" — разные величины). Формула сложения скоростей по Лоренцу-Эйнштейну имеет интересную аналогию с формулой сложения для тангенса

$$\operatorname{tg}(a + b) = (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)/(1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b).$$

Эта аналогия делается более явной, если положить $k(a) = (1 + i \operatorname{tg} a)/(1 - i \operatorname{tg} a)$ — теперь это комплексное число. Если взять натуральный логарифм Ln комплексной величины $k(a)$ [Lyub], то оказывается, что $\operatorname{Ln} k(a) = 2ia$. Это следует из знаменитой формулы Эйлера $\operatorname{Exp}(ia) = \cos a + i \sin a$. (Здесь через Exp обозначена функция, обратная к Ln [Lyub]. Её основное свойство: $\operatorname{Exp}(a+b) = \operatorname{Exp}(a) \cdot \operatorname{Exp}(b)$. В отличие от Ln, функция $\operatorname{Exp} a$ определена при всех a и однозначна. Из формулы Эйлера, в частности, следуют теоремы сложения для тригонометрических функций cos и sin.) Таким образом, $k(a) = \operatorname{Exp}(2ia)$, а из формулы Эйлера и из определения $k(a)$ видно, что $\cos 2a = (1 - \operatorname{tg}^2 a)/(1 + \operatorname{tg}^2 a)$ и $\sin 2a = 2 \operatorname{tg} a/(1 + \operatorname{tg}^2 a)$ ("формулы двойного угла"). Обратно, $\operatorname{tg} a = \sin 2a/(1 + \cos 2a)$.

С точки зрения алгебры, эти формулы определяют *бирациональное* (т.е. определённое рациональными — прямой и обратной — функциями [Шаф]) соответствие между окружностью с координатами $x = \cos 2a$, $y = \sin 2a$ и числовой прямой с координатой $t = \operatorname{tg} a$. А с точки зрения теории чисел, они содержат в себе формулы для сторон a, b, c *пифагорова* треугольника (прямоугольного треугольника с целочисленными взаимно простыми, т.е. не имеющими общего делителя, сторонами):

$$a = n^2 - m^2, \;\; b = 2nm, \;\; c = n^2 + m^2.$$

Например, если взять $n = 2$, $m = 1$, то получим “египетский треугольник”, с помощью которого при строительстве пирамид отмеряли прямые углы: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

Те же самые формулы для сторон пифагорова треугольника можно получить и из бирационального соответствия между гиперболой $x^2 - y^2 = 1$ и прямой. При этом вместо тригонометрических функций надо использовать *гиперболические*:

косинус гиперболический $\operatorname{Cosh} a := (\operatorname{Exp} a + \operatorname{Exp}(-a))/2,$

синус гиперболический $\operatorname{Sinh} a := (\operatorname{Exp} a - \operatorname{Exp}(-a)/2,$

тангенс гиперболический $\tanh a := \operatorname{Sinh} a/\operatorname{Cosh} a.$

Возвращаясь к сложению скоростей по Лоренцу-Эйнштейну, теперь можно написать $k(v) = (1+\tanh a)/(1-\tanh a)$, где $\tanh a = v/c$, $a = (\ln k(v))/2$ — та самая “быстрота”, которая является аналогом величины угла (радианной меры угла) в тригонометрии.

Как следует из формулы Эйлера, гиперболические функции тесно связаны с тригонометрическими:

$$\operatorname{Cosh}(ia) = \cos a, \;\; \operatorname{Sinh}(ia) = i \sin a, \;\; \tanh(ia) = i \operatorname{tg} a.$$

Это и не удивительно, поскольку гипербола $x^2 - y^2 = 1$ превращается в окружность после замены y на чисто мнимое число iy.

Существует и аналог формулы Эйлера для гиперболических функций. Но, чтобы его получить, надо перейти в область так называемых *двойных чисел Клиффорда*, т.е. “чисел” вида $a + be$, где $e^2 = 1$ ([Яг]). (Двойные числа похожи на комплексные числа, но отличаются от них в одном отношении : для комплексных чисел действие деления всегда выполнимо и однозначно (если делитель — не ноль). Для двойных чисел это не так. Например, число 1 нельзя разделить ни на $(1 + e)$, ни на $(1 - e)$.) Теперь

$$\operatorname{Exp}(ea) = \operatorname{Cosh} a + e \operatorname{Sinh} a$$

в полной аналогии с обычной формулой Эйлера. (Можно считать эту формулу *определением* экспоненты для “чисто мнимого” показателя ea. Свойства такой экспоненты аналогичны свойствам обычной.) Если теперь ввести “двойной” коэффициент двойного эффекта Доплера (а слово “двойной” здесь использовано в двух разных смыслах!) по формуле $k(v) = (c + ev)/(c - ev)$, где e — то самое “число” Клиффорда, для которого $e^2 = 1$, то равенство $k(w) = k(u)k(v)$ снова равносильно релятивистской формуле сложения (коллинеарных) скоростей и $k(v) = \exp(2ea)$, где a — это “быстрота”.

Литература

[Шаф] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. - М.: Наука, 1972.
[Lyub] Любецкий В.А. Основные понятия элементарной математики. - М.: Айрис-пресс, 2004.
[Яг] Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. - М.: Физматгиз, 1963.

Петрова Елена Николаевна,
старший научный сотрудник
Института проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: petrova@iitp.ru

Пирогов Сергей Анатольевич,
главный научный сотрудник
Института проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН,
доктор физ.-мат.наук.

E-mail: s.a.pirogov@bk.ru