



Общероссийский математический портал

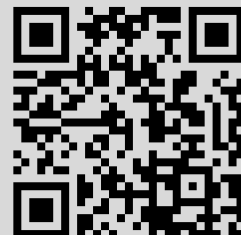
Е. И. Веремей, М. В. Сотникова, Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, 2011, выпуск 1, 116–133

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

15 февраля 2025 г., 10:28:34



УДК 517.977.5+533.9.07

Е. И. Веремей, М. В. Сотникова

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ НА БАЗЕ ПРОГНОЗА С УСТОЙЧИВЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ

1. Введение. Данная статья посвящена проблеме стабилизации плазмы в современных токамаках на основе управления с прогнозирующими моделями (MPC – Model Predictive Control) [1, 2]. Одним из основных преимуществ этого подхода является возможность учета ограничений на управляющие и контролируемые переменные в процессе синтеза управления на каждом такте дискретного времени [3]. Кроме того, применение MPC-подхода позволяет обеспечить высокое качество процессов управления в тех случаях, когда точная математическая модель объекта управления неизвестна. Отмеченные обстоятельства определяют обоснованность выбора управления с прогнозом для решения задач стабилизации плазмы в токамаках.

Классический вариант MPC-подхода может быть эффективно использован для формирования управления в процессе стабилизации плазмы с учетом ограничений на напряжение и силу тока в энергетической системе [4]. Тем не менее данный вариант MPC-подхода обладает также и некоторыми недостатками. Наиболее существенный из них – отсутствие гарантии устойчивости замкнутой системы. С целью устранения этого недостатка разрабатывается новый алгоритм управления, базирующийся на идеях MPC-подхода и модальной параметрической оптимизации. В рамках предлагаемого алгоритма на каждом шаге дискретного времени обеспечивается размещение собственных чисел линейного приближения замкнутой системы внутри желаемых областей комплексной плоскости, которые находятся внутри единичного круга и отражают заданные требования на степень устойчивости и колебательность замкнутой системы.

Показано, что реализация нового алгоритма в режиме реального времени связана с необходимостью решения на каждом такте управления задачи нелинейного программирования с существенно нелинейными ограничениями. Доказано, что такая задача может быть сведена к эквивалентному вопросу безусловной оптимизации.

Эффективность предлагаемого алгоритма продемонстрирована на примере системы вертикальной стабилизации плазмы в токамаке ИТЕР.

Веремей Евгений Игоревич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 110. Научное направление: теория управления и ее приложения в судостроении и энергетике. E-mail: e_veremey@mail.ru.

Сотникова Маргарита Викторовна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 9. Научное направление: оптимизация динамических систем с прогнозирующими моделями. E-mail: s_margosha@mail.ru.

© Е. И. Веремей, М. В. Сотникова, 2011

2. Постановка задачи управления.

2.1. Математическая модель процесса вертикальной стабилизации плазмы в токамаке ITER. В общем виде математическая модель процесса управления плазмой может быть представлена системой дифференциальных уравнений [5]

$$\frac{d\Psi}{dt} + RI = V, \quad (1)$$

где Ψ – вектор полоидальных потоков; R – диагональная матрица сопротивлений; I – вектор активных и пассивных токов; V – вектор напряжений, прикладываемых к обмоткам электромагнитной системы. Причем вектор Ψ определяется нелинейным соотношением

$$\Psi = \Psi(I, I_p), \quad (2)$$

в котором I_p – ток плазмы, а вектор выходных переменных – равенством

$$y = y(I, I_p). \quad (3)$$

Осуществим линеаризацию уравнений (1)–(3) в окрестности некоторого положения равновесия. В результате получим линейную модель в форме пространства состояний. В частности, ниже представлена линейная модель, представляющая процесс вертикальной стабилизации плазмы в токамаке ITER.

Токамак ITER [6] имеет отдельный быстрый контур обратной связи для стабилизации вертикального положения плазмы. В этом контуре величина управляющего напряжения формируется контроллером с обратной связью и подается на VS-конвертер. Измеряемой величиной для формирования управляющего сигнала служит вертикальная скорость токового центра плазмы. Таким образом, линейная модель вертикальной стабилизации плазмы может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} + du, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^{58}$ – вектор состояния; $u \in E^1$ – напряжение VS-конвертера; $y \in E^1$ – вертикальная скорость токового центра плазмы.

Необходимо отметить, что порядок рассматриваемой модели (4) очень высокий. Для упрощения решения задачи синтеза закона управления осуществим редукцию системы (4) с 58-го до 3-го порядка при помощи стандартной функции *schmr* пакета Matlab. В результате получим следующую передаточную функцию редуцированной SISO-модели (от входа u к выходу y):

$$P(s) = \frac{1.732 \cdot 10^{-6}(s - 121.1)(s + 158.2)(s + 9.641)}{(s + 29.21)(s + 8.348)(s - 12.21)}. \quad (5)$$

Отметим, что полюса передаточной функции (5) определяют наиболее значимую динамику по отношению к исходной модели (4). В частности, неустойчивый полюс соответствует неустойчивости вертикального положения плазмы. Два других полюса соответствуют виртуальным токам в катушках магнитной системы. Качество процесса редукции может быть проиллюстрировано сравнением диаграмм Боде для исходной и редуцированной систем. На рис. 1 слева представлены диаграммы Боде для исходной модели (4) и редуцированной модели 3-го порядка (5), а справа – аналогичные диаграммы для исходной и редуцированной до 2-го порядка моделей. Нетрудно видеть,

что кривые для исходной и редуцированной до 3-го порядка моделей практически совпадают, в то время как они существенно различаются для модели 2-го порядка.

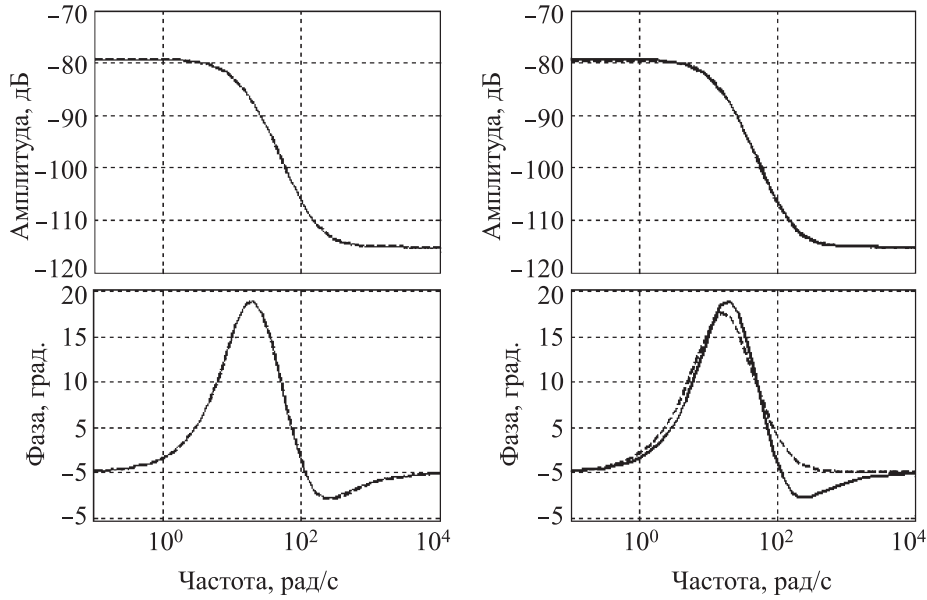


Рис. 1. Диаграммы Боде для исходной (сплошная линия) и редуцированной (пунктирная) моделей

Наряду с математической моделью (5) объекта управления необходимо также учитывать имеющиеся физические ограничения на энергетическую систему:

$$V_{\max}^{VS} = 0.6kV, \quad I_{\max}^{VS} = 20.7kA, \quad (6)$$

где V_{\max}^{VS} – максимальное напряжение; I_{\max}^{VS} – максимальный ток в VS-конвертере.

Итак, линейная модель (5) совместно с ограничениями (6) будет в дальнейшем рассматриваться как базис для синтеза закона управления.

2.2. Постановка задачи оптимального управления. Будем считать, что целью управления является стабилизация вертикальной скорости токового центра плазмы. Один из возможных подходов к синтезу стабилизирующего закона управления – постановка и решение соответствующей задачи оптимизации. В рамках оптимизационного подхода задача вертикальной стабилизации плазмы может быть представлена в следующей форме. Необходимо построить такой алгоритм управления с обратной связью $u = u(t, y)$, который обеспечивает минимум квадратичного функционала качества

$$J = J(u) = \int_0^{\infty} (y^2(t) + \lambda u^2(t)) dt, \quad (7)$$

на движениях модели (5) при наличии ограничений (6) и гарантирует устойчивость замкнутой системы. Здесь λ – весовой множитель, определяющий соотношение между быстродействием и энергозатратами.

В частности, для поиска оптимального регулятора может быть использован LQG-синтез. Недостатком этого подхода является то, что при синтезе управления не учитываются ограничения на управляющие и контролируемые переменные.

В то же время МРС-подход позволяет в явной форме принимать во внимание имеющиеся ограничения. Его базовая схема предполагает решение в режиме реального времени задачи оптимизации функционала (7) на конечном горизонте прогноза по отношению к модели (5) и ограничениям (6).

3. Управление с прогнозирующей моделью в режиме реального времени.

Пусть математическая модель динамики объекта управления представлена системой нелинейных разностных уравнений в рекурсивной форме

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i), \quad i = k + j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k, \\ \tilde{\mathbf{y}}_i &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_i.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{E}^n$ – вектор состояния; $\tilde{\mathbf{u}}_i \in \mathbf{E}^m$ – вектор управления; $\tilde{\mathbf{y}}_i \in \mathbf{E}^r$ – вектор выходных переменных; $\mathbf{x}_k \in \mathbf{E}^n$ – истинное состояние объекта управления на k -м такте дискретного времени или его оценка, полученная на базе измерений.

Рассматриваемая модель предназначена для прогноза динамики объекта управления на определенное количество шагов при заданной конечной последовательности векторов управления $\{\tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{k+P-1}\}$. Подобная модель называется прогнозирующей моделью, а параметр P – горизонтом прогноза.

В результате решения системы (8) получим конечную последовательность векторов управления $\{\tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{k+P-1}\}$ и соответствующую ей конечную последовательность векторов измерений $\{\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+2}, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{k+P}\}$. Будем говорить, что при этом сформирован прогноз движения реального объекта с горизонтом P .

Рассмотрим функционал, характеризующий качество управления прогнозирующей моделью на горизонте прогноза:

$$J_k = J_k(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{u}}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}} &= \left(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \quad \tilde{\mathbf{y}}_{k+2} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{y}}_{k+P} \right)^T \in \mathbf{E}^{rP}, \\ \bar{\mathbf{u}} &= \left(\tilde{\mathbf{u}}_k \quad \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{u}}_{k+P-1} \right)^T \in \mathbf{E}^{mP}\end{aligned}$$

– вспомогательные векторы.

Известная классическая схема реализации управления с прогнозом, включенным в контур обратной связи, заключается в следующем:

- 1) измеряется или оценивается текущее состояние объекта \mathbf{x}_k ;
- 2) выбором управления на горизонте прогноза оптимизируется движение прогнозирующей модели (8) по отношению к функционалу (9);
- 3) найденное оптимальное управление реализуется для объекта управления только на текущем такте (от момента k до момента $k + 1$);
- 4) для следующего такта, начиная от момента времени $k+1$, все операции, указанные в пунктах 1)–3), повторяются заново.

По существу, в рамках приведенной схемы управление осуществляется по принципу обратной связи с дискретным поступлением информации о текущем состоянии объекта в моменты $k = 0, 1, 2, \dots$.

Согласно приведенной схеме, для формирования управления на каждом такте необходимо решать соответствующую оптимизационную задачу. Следовательно, с точки зрения возможности практической реализации в режиме реального времени, необходимо, чтобы вычисления выполнялись достаточно быстро, в пределах одного такта.

Приведенная выше классическая схема допускает определенное развитие в плане использования различных вариантов реализации управления с прогнозом. Выбор

конкретного варианта определяется прежде всего способом задания управления на горизонте прогноза. Кроме того, существенную роль играют выбор оптимизируемого функционала, возможность учета ограничений на управляющие и контролируемые переменные, тип прогнозирующей модели. Соответственно и задача оптимизации на горизонте прогноза для каждого варианта принимает особую форму.

В рамках традиционного подхода управление на горизонте прогноза задается в виде конечной программной последовательности векторов. При этом на каждом шаге необходимо решать задачу нелинейного программирования, размерность которой зависит напрямую от величины горизонта прогноза P .

В данной работе предлагается новый подход к управлению с прогнозом, в рамках которого управление прогнозирующей моделью формируется не программным путем, а в виде регуляторов с заданной структурой и выделенным вектором настраиваемых параметров. При этом решение соответствующей оптимизационной задачи осуществляется с учетом того, что корни характеристического полинома линейного приближения замкнутой системы на каждом шаге должны быть расположены в заданных областях на комплексной плоскости.

4. Управление с прогнозом на базе параметрической оптимизации линейного приближения. Будем считать, что математическая модель объекта управления представляется системой нелинейных разностных уравнений вида

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\varphi}_k), \\ \hat{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k,\end{aligned}\tag{10}$$

где $\hat{\mathbf{y}}_k \in \mathbf{E}^s$ – вектор измеряемых переменных; $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{E}^n$ – вектор состояния; $\hat{\mathbf{u}}_k \in \mathbf{E}^m$ – вектор управления; $\hat{\varphi}_k \in \mathbf{E}^l$ – вектор внешних возмущений.

Сформируем нелинейную прогнозирующую модель на базе уравнений (10) и представим ее следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i), \quad i = k + j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k, \\ \tilde{\mathbf{y}}_i &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_i.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь $\mathbf{x}_k \in \mathbf{E}^n$ – текущее состояние объекта, достигнутое на k -м такте функционирования системы. Пусть заданы последовательности векторов $\{\mathbf{r}_k^x\}$ и $\{\mathbf{r}_k^u\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяющие некоторое желаемое движение объекта. Осуществим линеаризацию уравнений (10) в окрестности рассматриваемого движения. В результате получим систему линейных разностных уравнений, описывающую динамику объекта в отклонениях:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{H}\bar{\varphi}_k, \\ \bar{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_k,\end{aligned}\tag{12}$$

где $\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{E}^n$, $\bar{\mathbf{u}}_k \in \mathbf{E}^m$, $\bar{\mathbf{y}}_k \in \mathbf{E}^s$, $\bar{\varphi}_k \in \mathbf{E}^l$ – векторы состояния, управления, измерений и внешних возмущений соответственно.

Будем формировать управление для прогнозирующей модели в виде обратной связи (регулятора) по измеряемому выходному вектору $\bar{\mathbf{y}}_k$:

$$\bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{W}(q, \mathbf{h})\bar{\mathbf{y}}_k,\tag{13}$$

где q – оператор сдвига на такт вперед; $\mathbf{W}(q, \mathbf{h})$ – передаточная матрица регулятора с фиксированной структурой (заданы степени полиномов в числителях и знаменателях

всех ее компонентов); $\mathbf{h} \in \mathbf{E}^r$ – вектор настраиваемых параметров, подлежащих выбору при синтезе закона управления. Запишем уравнения прогнозирующей модели (11), замкнутой регулятором (13):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i), \quad i = k + j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k, \\ \tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{r}_i^u + \mathbf{W}(q, \mathbf{h})\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}_i - \mathbf{r}_i^x).\end{aligned}\quad (14)$$

Зафиксируем некоторый вектор \mathbf{h} параметров и найдем решение системы (14) для $i = k, k + 1, \dots, k + P - 1$. В результате получим последовательность векторов $\{\tilde{\mathbf{x}}_i\}$ ($i = k + 1, \dots, k + P$), представляющую собой прогноз движения реального объекта с горизонтом P .

Поставим задачу о выборе оптимального управления на основе прогноза. Качество процесса управления прогнозирующей моделью на горизонте прогноза будем определять некоторым функционалом

$$J_k = J_k(\{\tilde{\mathbf{x}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{u}}_i\}) = J_k(\mathbf{W}(q, \mathbf{h})) = J_k(\mathbf{h}) \geq 0, \quad (15)$$

который при прочих одинаковых условиях с очевидностью является функцией вектора настраиваемых параметров \mathbf{h} . Здесь $\{\tilde{\mathbf{x}}_i\}$, $i = k + 1, \dots, k + P$, и $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$, $i = k, \dots, k + P - 1$, – последовательности векторов состояния и управления, удовлетворяющие системе (14). Введем в рассмотрение следующую задачу параметрического синтеза:

$$J_k = J_k(\mathbf{h}) \rightarrow \inf_{\mathbf{h} \in \Omega_H}, \quad (16)$$

где Ω_H – множество настраиваемых параметров, обеспечивающих расположение корней характеристического полинома замкнутой линейной системы (12), (13) внутри заданной области S_Δ в единичном круге.

Следует отметить, что задача (16) является специфическим вариантом задачи нелинейного программирования со сложной целевой функцией, которая достаточно часто в практических задачах не имеет явного аналитического представления и задается алгоритмически. Кроме того, специфика задачи обусловлена наличием не менее сложных ограничений, определяемых указанными требованиями по расположению корней. Заметим, что размерность задачи оптимизации (16) зависит только от размерности вектора \mathbf{h} , но не от величины горизонта прогноза P .

Определение 1. Будем говорить, что структура регулятора (13) является **полной**, если степени полиномов в числителях и знаменателях компонентов передаточной матрицы $\mathbf{W}(q, \mathbf{h})$, а также размерность и состав компонентов вектора \mathbf{h} таковы, что с помощью выбора этого вектора (т. е. назначения конкретных величин настраиваемых параметров) можно обеспечить произвольный спектр корней характеристического полинома $\Delta(z, \mathbf{h})$ замкнутой системы (12), (13).

Это определение можно представить в эквивалентном виде, для чего запишем уравнения замкнутой системы в нормальной форме:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{H}\bar{\varphi}_k, \\ \bar{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_k, \\ \xi_{k+1} &= \mathbf{A}_c(\mathbf{h})\xi_k + \mathbf{B}_c(\mathbf{h})\bar{\mathbf{y}}_k, \\ \bar{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{C}_c(\mathbf{h})\xi_k + \mathbf{D}_c(\mathbf{h})\bar{\mathbf{y}}_k,\end{aligned}\quad (17)$$

где $\xi_k \in \mathbf{E}^r$ – вектор состояния регулятора. Применяя к системе (17) Z -преобразование при нулевых начальных условиях, получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_n z - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\bar{\varphi}, \\(\mathbf{E}_\nu z - \mathbf{A}_c(\mathbf{h}))\xi &= \mathbf{B}_c(\mathbf{h})\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}, \\ \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{C}_c(\mathbf{h})\xi + \mathbf{D}_c(\mathbf{h})\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}, \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_n z - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_c(\mathbf{h})\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_c(\mathbf{h}) \\ -\mathbf{B}_c(\mathbf{h})\mathbf{C} & \mathbf{E}_\nu z - \mathbf{A}_c(\mathbf{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\varphi}.$$

Отсюда следует, что характеристический полином замкнутой системы $\Delta(z, \mathbf{h})$, степень которого будем обозначать n_d , имеет вид

$$\Delta(z, \mathbf{h}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n z - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_c(\mathbf{h})\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_c(\mathbf{h}) \\ -\mathbf{B}_c(\mathbf{h})\mathbf{C} & \mathbf{E}_\nu z - \mathbf{A}_c(\mathbf{h}) \end{pmatrix}.$$

Пусть выбором значений настраиваемых параметров, объединенных в вектор \mathbf{h} , необходимо назначить заданные корни характеристического полинома системы (17), т. е. обеспечить выполнение тождества

$$\Delta(z, \mathbf{h}) \equiv \tilde{\Delta}(z),$$

в котором $\tilde{\Delta}(z)$ – заданный полином степени n_d . Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z и получим систему, состоящую из $(n_d + 1)$ нелинейного уравнения с r неизвестными компонентами вектора \mathbf{h} :

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}) = \gamma. \quad (18)$$

Очевидно, что структура регулятора (13) является полной тогда и только тогда, когда система (18) совместна для любого вектора γ .

Нетрудно убедиться в том, что если в качестве компонентов вектора \mathbf{h} выступают коэффициенты дробно-рациональных функций, являющихся элементами передаточной матрицы $\mathbf{W}(q, \mathbf{h})$ регулятора (13), то система (18) для поиска этого вектора оказывается линейной:

$$\mathbf{L}\mathbf{h} = \gamma, \quad (19)$$

где \mathbf{L} – матрица с постоянными компонентами. Как в случае (18), так и в (19) необходимыми условиями полноты структуры являются полная управляемость пары \mathbf{A}, \mathbf{B} и полная наблюдаемость пары \mathbf{A}, \mathbf{C} .

Уточним теперь постановку задачи оптимизации (16), считая, что заданная структура регулятора (13) полная. Определим допустимое множество Ω_H следующим образом:

$$\Omega_H = \{\mathbf{h} \in \mathbf{E}^r : \delta_i(\mathbf{h}) \in C_\Delta, i = 1, \dots, n_d\}, \quad (20)$$

здесь δ_i – корни характеристического полинома $\Delta(z, \mathbf{h})$, $n_d = \deg \Delta(z, \mathbf{h})$.

Рассмотрим два варианта задания области C_Δ внутри единичного круга, представленные на рис. 2. Дадим формальное определение указанным областям:

$$C_\Delta = C_{\Delta 1} = \{z \in \mathbf{C}^1 : |z| \leq r\}, \text{ где } r \in (0, 1) \text{ – заданное вещественное число;}$$

$C_\Delta = C_{\Delta 2} = \{z \in \mathbf{C}^1 : z = \rho \exp(\pm i\varphi), 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi \leq \psi(\rho)\}$, где $r \in (0, 1)$ – заданное вещественное число; $\psi(\xi)$ вещественная функция переменной $\xi \in (0, r]$, принимающая значения из отрезка $[0, \pi]$, причем $\psi(r) = 0$.

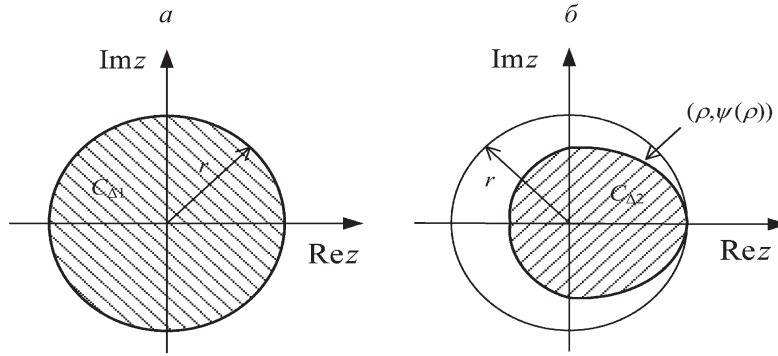


Рис. 2. Области $C_{\Delta 1}$ (а) и $C_{\Delta 2}$ (б) желаемого расположения корней

Смысл введения данных областей состоит в следующем. Первая из них определяет ограничение снизу на степень устойчивости, т. е. на длительность переходных процессов в замкнутой системе. Вторая область, в дополнение к этому, определяет ограничение на меру колебательности, введенное в удобной для дальнейших рассуждений форме.

Для построения алгоритма решения задачи (16) на множествах (20) осуществим параметризацию рассматриваемых областей C_{Δ} с использованием n -мерных вещественных векторов.

Рассмотрим следующее вспомогательное утверждение:

Теорема 1. Для любого вектора $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$ корни полинома $\Delta^*(z, \gamma)$, построенного по приведенным ниже формулам, находятся внутри области $C_{\Delta 1}$ или на ее границе. Обратное, если корни некоторого полинома $\Delta(z)$ принадлежат области $C_{\Delta 1}$ и при этом вещественные корни положительны, то можно указать такой вектор $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$, что справедливо тождество $\Delta(z) \equiv \Delta^*(z, \gamma)$. Здесь

$$\Delta^*(z, \gamma) = \prod_{i=1}^d (z^2 + a_i^1(\gamma, r)z + a_i^0(\gamma, r)), \quad (21)$$

если n_d – четное, $d = n_d/2$;

$$\Delta^*(z, \gamma) = (z - a_{d+1}(\gamma, r)) \prod_{i=1}^d (z^2 + a_i^1(\gamma, r)z + a_i^0(\gamma, r)), \quad (22)$$

если n_d – нечетное, $d = [n_d/2]$;

$$a_i^1(\gamma, r) = -r \left(\exp \left(-\frac{\gamma_{i1}^2}{2} + \sqrt{\frac{\gamma_{i1}^4}{4} - \gamma_{i2}^2} \right) + \exp \left(-\frac{\gamma_{i1}^2}{2} - \sqrt{\frac{\gamma_{i1}^4}{4} - \gamma_{i2}^2} \right) \right), \quad (23)$$

$$a_i^0(\gamma, r) = r^2 \exp(-\gamma_{i1}^2), \quad i = 1, \dots, d, \quad a_{d+1}(\gamma, r) = r \exp(-\gamma_{d0}^2),$$

$$\gamma = \{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{d1}, \gamma_{d2}, \gamma_{d0}\}. \quad (24)$$

Доказательство. Доказательство как прямого, так и обратного утверждений при четном n_d непосредственно следует из элементарных свойств квадратных

трехчленов в формуле (21). Действительно, для любой пары действительных чисел γ_{i1} , γ_{i2} корни i -го трехчлена в (21), с учетом (23) и (24), представляются выражением

$$z_{1,2}^i = r \exp \left(-\frac{\gamma_{i1}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma_{i1}^4}{4} - \gamma_{i2}^2} \right),$$

откуда следует, что $|z_{1,2}^i| \leq r$, т. е. корни трехчлена $z_{1,2}^i$ находятся внутри области C_{Δ_1} или на ее границе, что и доказывает прямое утверждение.

Для доказательства обратного утверждения зададим некоторый квадратный трехчлен $\Delta_i(z) = z^2 + \beta_1 z + \beta_0$. По условию будем считать, что его корни $z_{1,2}$ принадлежат области C_{Δ_1} и, если они вещественные, то положительны. Для того чтобы корни $z_{1,2}$ принадлежали кругу $|z| \leq r$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения [7]

$$1 - \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_0}{r^2} \geq 0, \quad 1 - \frac{\beta_0}{r^2} \geq 0, \quad 1 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_0}{r^2} \geq 0. \quad (25)$$

Кроме того, поскольку произведение корней $z_1 z_2$ положительно как в случае пары комплексно сопряженных корней, так и для двух вещественных положительных корней, то должно выполняться условие

$$\beta_0 > 0. \quad (26)$$

Найдем такие γ_{i1} и γ_{i2} , чтобы выполнилось тождество $\Delta_i^*(z) \equiv \Delta_i(z)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$\begin{aligned} -r \left(\exp \left(-\frac{\gamma_{i1}^2}{2} + \sqrt{\frac{\gamma_{i1}^4}{4} - \gamma_{i2}^2} \right) + \exp \left(-\frac{\gamma_{i1}^2}{2} - \sqrt{\frac{\gamma_{i1}^4}{4} - \gamma_{i2}^2} \right) \right) &= \beta_1, \\ r^2 \exp(-\gamma_{i1}^2) &= \beta_0, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{i1} &= \sqrt{-\ln(\beta_0/r^2)}, \\ \gamma_{i2} &= \sqrt{-\frac{1}{4} \ln \left(w \frac{r^2}{\beta_0} \right) \ln \left(w \frac{\beta_0}{r^2} \right)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $w = \frac{\beta_1^2}{2\beta_0} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2}{2\beta_0} - 1 \right)^2 - 1}$. Убедимся в том, что числа γ_{i1} и γ_{i2} , определяемые по формулам (27), являются вещественными. Действительно, из неравенств (25) и (26) вытекает, что $0 < \beta_0/r^2 \leq 1$, поэтому $-\ln(\beta_0/r^2) \geq 0$ и γ_{i1} – вещественное число.

Покажем, что подкоренное выражение для γ_{i2} неотрицательно. Рассмотрим сначала случай, когда трехчлен $\Delta_i(z)$ имеет два вещественных положительных корня $z_{1,2}$. При этом его коэффициенты должны удовлетворять условию $\beta_1^2 - 4\beta_0 \geq 0$, из которого следует, что $w \geq 1$ – вещественное число. В результате, с учетом (25), находим

$$\ln(w r^2/\beta_0) \geq 0. \quad (28)$$

Заметим, что из (25) вытекает также выполнение неравенства $\beta_1^2 - 2\beta_0 \leq r^2 + \beta_0/r^2$, при учете которого имеем

$$w\beta_0 \leq r^2, \quad -\ln(w\beta_0/r^2) \geq 0. \quad (29)$$

Из неравенств (28) и (29) следует, что подкоренное выражение для γ_{i2} неотрицательно и γ_{i2} – вещественное число.

Рассмотрим теперь случай, когда трехчлен $\Delta_i(z)$ имеет пару комплексно сопряженных корней $z_{1,2}$. При этом должно выполняться неравенство $\beta_1^2 - 4\beta_0 < 0$, из которого имеем, что w – комплексное число, представимое в виде $w = \beta_1^2/2\beta_0 - 1 + i\sqrt{1 - (\beta_1^2/2\beta_0 - 1)^2}$, причем нетрудно показать, что $|w| = 1$. Тогда подкоренное выражение для γ_{i2} имеет вид

$$\gamma_{i2} = \sqrt{-\frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{r^2}{\beta_0} \right) + i \operatorname{arg} w \right) \left(\ln \left(\frac{\beta_0}{r^2} \right) + i \operatorname{arg} w \right)} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\ln^2 \left(\frac{r^2}{\beta_0} \right) + \operatorname{arg}^2 w \right)},$$

откуда вытекает его неотрицательность, т. е. γ_{i2} – вещественное число.

При нечетном n_d , в соответствии с (22), в состав полинома Δ^* дополнительно вводится линейный двучлен, для которого утверждения теоремы очевидны. ■

Теперь обратимся к более сложному второму варианту задания допустимой области C_Δ и докажем аналогичное утверждение, позволяющее осуществить параметризацию этой области.

Теорема 2. Для любого вектора $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$ корни полинома $\Delta^*(z, \gamma)$ (21), (22) принадлежат области C_{Δ_2} и обратно, если корни некоторого полинома $\Delta(z)$ принадлежат области C_{Δ_2} и при этом вещественные корни положительны, то можно указать такой вектор $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$, что справедливо тождество $\Delta(z) \equiv \Delta^*(z, \gamma)$, где

$$\begin{aligned} a_i^1(\gamma, r) &= -r \left(\exp(-\gamma_{i1}^2 + \nu_i) + \exp(-\gamma_{i1}^2 - \nu_i) \right), \\ a_i^0(\gamma, r) &= r^2 \exp(-2\gamma_{i1}^2), \quad i = 1, \dots, d, \quad a_{d+1}(\gamma, r) = r \exp(-\gamma_{d0}^2), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\nu_i = \sqrt{\gamma_{i1}^4 - f(\gamma_{i2}) (\psi^2(r \exp(-\gamma_{i1}^2)) + \gamma_{i1}^4)}$; $\gamma = \{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{d1}, \gamma_{d2}, \gamma_{d0}\}$.

При этом функция $f(\cdot) : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ должна удовлетворять условию существования обратной функции во всей области задания, а $\psi(\xi)$ – вещественная функция переменной $\xi \in (0, r]$, принимающая значения из отрезка $[0, \pi]$, причем $\psi(r) = 0$.

Доказательство. Как и в теореме 1, обратимся к свойствам квадратных трехчленов в (21). Вначале докажем прямое утверждение.

Для любой пары действительных чисел γ_{i1}, γ_{i2} корни i -го трехчлена $\Delta_i^*(z)$ в (21) представляются выражением $z_{1,2}^i = r \exp(-\gamma_{i1}^2 \pm \nu_i)$. Здесь возможны два варианта. Если ν_i – вещественное число, то корни $z_{1,2}^i$ тоже вещественные. При этом, в силу свойств функции f , справедливо неравенство $\gamma_{i1}^4 - f(\gamma_{i2}) (\psi^2(r \exp(-\gamma_{i1}^2)) + \gamma_{i1}^4) \leq \gamma_{i1}^4$, из которого следует, что корни положительны и $|z_{1,2}^i| \leq r$, т. е. $z_{1,2}^i \in C_{\Delta_2}$.

Если же ν_i – комплексное число, то $z_{1,2}^i$ – пара комплексно сопряженных корней, причем $|z_{1,2}^i| = \rho = r \exp(-\gamma_{i1}^2) \leq r$. В силу свойств функции f , выполняется неравенство

$$\varphi = \sqrt{f(\gamma_{i2}) (\psi^2(r \exp(-\gamma_{i1}^2)) + \gamma_{i1}^4) - \gamma_{i1}^4} \leq \sqrt{\psi^2(r \exp(-\gamma_{i1}^2))} = \psi(\rho). \quad (31)$$

Так как $\operatorname{arg} z_{1,2}^i = \pm \varphi$ и, с учетом (31), $0 \leq \varphi \leq \psi(\rho)$, то корни $z_{1,2}^i$ принадлежат области C_{Δ_2} , что и доказывает прямое утверждение.

Докажем теперь обратное утверждение. Для этого рассмотрим некоторый квадратный трехчлен $\Delta_i(z) = z^2 + \beta_1 z + \beta_0$, и будем считать, что его корни $z_{1,2}$ принадлежат области C_{Δ_2} , причем если они вещественные, то положительны. Заметим, что коэффициенты этого трехчлена должны удовлетворять условиям (25) и (26), поскольку $|z_{1,2}| \leq r$ и произведение корней $z_1 z_2$ в любом случае положительно.

Найдем такие γ_{i1} и γ_{i2} , чтобы выполнилось тождество $\Delta_i^*(z) \equiv \Delta_i(z)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$-r (\exp(-\gamma_{i1}^2 + \nu_i) + \exp(-\gamma_{i1}^2 - \nu_i)) = \beta_i, \quad r^2 \exp(-2\gamma_{i1}^2) = \beta_0,$$

отсюда следует, что

$$\gamma_{i1} = \sqrt{-0.5 \ln(\beta_0/r^2)},$$

$$f(\gamma_{i2}) = \frac{1}{4(\psi^2(r \exp(-\gamma_{i1}^2)) + \gamma_{i1}^4)} \left(\ln^2\left(\frac{\beta_0}{r^2}\right) - \ln^2\left(\frac{\beta_1^2}{2\beta_0} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2}{2\beta_0} - 1\right)^2 - 1}\right) \right).$$

Покажем, что γ_{i2} является вещественным числом. Для γ_{i1} рассуждения аналогичны приведенным в теореме 1.

Очевидно, что уравнение относительно γ_{i2} имеет решение, если выражение, стоящее справа от знака равенства, принимает значения из интервала $(0,1)$. Обозначим данное выражение через h . Заметим, что знаменатель в h обращается в нуль только в том случае, когда $z_1 = z_2 = r$, но при этом в качестве γ_{i2} может быть выбрано любое вещественное число. В общем случае, учитывая доказательство теоремы 1, нетрудно видеть, что $h > 0$. Кроме того, справедливо неравенство

$$h < 1 - \ln^2\left(\frac{\beta_1^2}{2\beta_0} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2}{2\beta_0} - 1\right)^2 - 1}\right) / \ln^2(\beta_0/r^2),$$

откуда вытекает, что существует вещественное число γ_{i2} , которое является решением уравнения $f(\gamma_{i2}) = h$.

При нечетном n_d , в соответствии с (22), в состав полинома Δ^* дополнительно вводится линейный двучлен, для которого утверждения теоремы очевидны. ■

Покажем теперь, как связаны введенные области C_{Δ_1} и C_{Δ_2} со стандартными областями комплексной плоскости, которые наиболее часто используются при анализе и синтезе непрерывных систем.

Прежде всего отметим, что при переходе от непрерывной модели к дискретной линейной системе собственные значения преобразуются по следующему правилу [8]: если s – собственное значение матрицы непрерывной системы, то $z = e^{sT}$ – собственное значение матрицы соответствующей ей дискретной системы, где T – шаг дискретизации. С учетом этого обстоятельства рассмотрим примеры отображения стандартных областей на соответствующие области для дискретной системы.

Пример 1. Пусть задана область $C = \{s = x \pm yj \in \mathbf{C}^1 : x \leq -\alpha\}$, представленная на рис. 3. Ясно, что точкам прямой $x = -\alpha$ соответствуют точки окружности $|z| = e^{-\alpha T}$. При этом область C отображается на круг $|z| \leq e^{-\alpha T}$, как показано на рис. 3, что соответствует области C_{Δ_1} , определяющей заданную степень устойчивости дискретной системы.

Пример 2. Рассмотрим область, представленную на рис. 4:

$$C = \{s = x \pm yj \in \mathbf{C}^1 : x \leq -\alpha, 0 \leq y \leq (-x - \alpha)\text{tg}\beta\},$$

где $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\alpha > 0$ – заданные вещественные числа.

Осуществим отображение области C на плоскость z . Очевидно, что вершине угла $(-\alpha, 0)$ соответствует точка на плоскости z с полярными координатами $r = e^{-\alpha T}$, $\varphi = 0$. Отобразим теперь каждый отрезок из семейства:

$$L_\gamma = \{s = x \pm yj \in \mathbf{C}^1 : x = \gamma, \gamma \leq -\alpha, 0 \leq y \leq (-\gamma - \alpha)\text{tg}\beta\}.$$

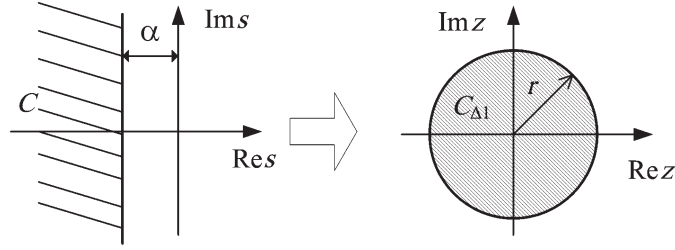


Рис. 3. Соответствие областей для непрерывной и дискретной систем (пример 1)

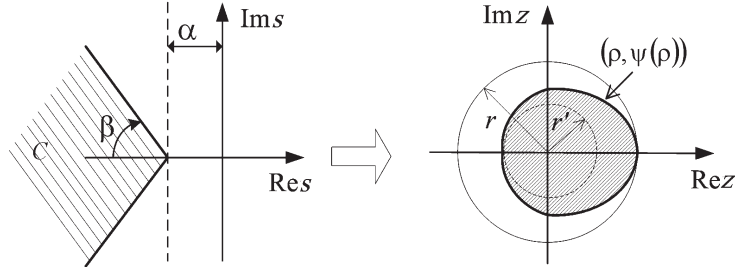


Рис. 4. Соответствие областей для непрерывной и дискретной систем (пример 2)

Каждой точке $s = \gamma \pm jy$ отрезка L_γ соответствует точка $z = e^{sT} = e^{\gamma T \pm jyT}$ на плоскости z . Следовательно, точки отрезка L_γ отображаются на дугу окружности с радиусом $e^{\gamma T}$, если $-\alpha - \pi/(T \operatorname{tg} \beta) < \gamma \leq -\alpha$, и на всю окружность, если $\gamma \leq -\alpha - \pi/(T \operatorname{tg} \beta)$. Таким образом, наибольший радиус окружности, полностью заполняемой точками отрезка, равен $r' = e^{-\alpha T - \pi / \operatorname{tg} \beta}$, соответствующий значению $\gamma_0 = -\alpha - \pi / (T \operatorname{tg} \beta)$.

Заметим, что лучи, образующие угол, отображаются в логарифмические спирали. Причем границу области на плоскости z образуют дуги этих спиралей, соответствующие изменению значения x от $-\alpha$ до γ_0 . Введем обозначение $\rho = e^{xT}$. Определим функцию $\psi(\rho)$, ограничивающую значение аргумента при заданном радиусе окружности ρ :

$$\psi(\rho) = \begin{cases} (-\ln \rho - \alpha T) \operatorname{tg} \beta, & \text{если } \rho \in [r', r], \\ \pi, & \text{если } \rho \in [0, r']. \end{cases}$$

Результат отображения показан на рис. 4. Отметим, что полученная в результате отображения область определяет заданную меру устойчивости и колебательности дискретной системы.

Теперь воспользуемся теоремой 2 для построения вычислительного метода решения задачи параметрического синтеза (16) на допустимом множестве Ω_H (20) при условии, что $C_\Delta = C_{\Delta 2}$, поскольку первый вариант с очевидностью является частным случаем второго.

С этой целью зададим произвольный вектор $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$ и построим вспомогательный полином $\Delta^*(z, \gamma)$ по формулам (21), (22), (30). Потребуем, чтобы настраиваемые параметры регулятора (13), объединенные в вектор $\mathbf{h} \in \mathbf{E}^r$, обеспечивали тождество

$$\Delta(z, \mathbf{h}) \equiv \Delta^*(z, \gamma), \quad (32)$$

где $\Delta(z, \mathbf{h})$ – характеристический полином замкнутой системы степени n_d . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в (32), получим систему нелинейных

уравнений

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}) = \chi(\gamma) \quad (33)$$

относительно неизвестных компонентов вектора \mathbf{h} , которая при любых $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$ является совместной в силу полноты структуры регулятора (13). Будем считать, что в общем случае эта система имеет неединственное решение. Тогда вектор \mathbf{h} может быть представлен как совокупность двух векторов $\mathbf{h} = \{\bar{\mathbf{h}}, \mathbf{h}_c\}$, где $\mathbf{h}_c \in \mathbf{E}^{n_c}$ – свободная составляющая (назначение которой произвольно), $\bar{\mathbf{h}}$ – вектор, однозначно определяемый решением системы (33) при заданном векторе \mathbf{h}_c .

Введем обозначение для общего решения системы (33):

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^* = \{\bar{\mathbf{h}}^*(\mathbf{h}_c, \gamma), \mathbf{h}_c\} = \mathbf{h}^*(\gamma, \mathbf{h}_c) = \mathbf{h}^*(\epsilon),$$

где через $\epsilon = \{\gamma, \mathbf{h}_c\}$ обозначен произвольный вектор независимых параметров размерности λ , причем

$$\lambda = \dim \epsilon = \dim \gamma + \dim \mathbf{h}_c = n_d + n_c.$$

Запишем уравнения прогнозирующей модели, замкнутой регулятором (13) с полученным вектором настраиваемых параметров \mathbf{h}^* :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i), \quad i = k + j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k, \\ \tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{r}_i^u + \mathbf{W}(q, \mathbf{h}^*(\epsilon))\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}}_i - \mathbf{r}_i^x). \end{aligned} \quad (34)$$

При этом функционал J_k (15), вычисляемый на движениях системы (34), становится функцией вектора ϵ :

$$J_k = J_k(\{\tilde{\mathbf{x}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{u}}_i\}) = J_k^*(\mathbf{W}(q, \mathbf{h}^*(\epsilon))) = J_k^*(\epsilon). \quad (35)$$

Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Если в задаче параметрического синтеза (16), где Ω_H – допустимое множество, определяемое соотношением (20) при условии $C_\Delta = C_{\Delta 2}$, экстремум достигается в некоторой точке $\mathbf{h}_{k0} \in \Omega_H$, то в пространстве \mathbf{E}^λ найдется такая точка ϵ_{k0} , что*

$$\mathbf{h}_{k0} = \mathbf{h}^*(\epsilon_{k0}), \quad \epsilon_{k0} = \arg \min_{\epsilon \in \mathbf{E}^\lambda} J_k^*(\epsilon). \quad (36)$$

И обратно: если в пространстве \mathbf{E}^λ существует точка ϵ_{k0} , удовлетворяющая (36), то точка $\mathbf{h}_{k0} = \mathbf{h}^(\epsilon_{k0})$ является решением задачи (16). Или, иными словами, в указанном смысле задача (16) эквивалентна задаче на безусловный экстремум*

$$J_k^* = J_k^*(\epsilon) \rightarrow \inf_{\epsilon \in \mathbf{E}^\lambda}. \quad (37)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что имеет место условие

$$\mathbf{h}_{k0} = \arg \min_{\mathbf{h} \in \Omega_H} J_k(\mathbf{h}), \quad J_{k0} = J_k(\mathbf{h}_{k0}). \quad (38)$$

При этом замкнутая линейная система (17) будет иметь характеристический полином $\Delta(z, \mathbf{h}_{k0})$ с корнями, расположенными в области $C_{\Delta 2}$. Следовательно, по теореме 2, найдется такая точка $\gamma = \gamma_{k0} \in \mathbf{E}^{n_d}$, что $\Delta(z, \mathbf{h}_{k0}) \equiv \Delta^*(z, \gamma_{k0})$, где Δ^* – полином, формируемый по формулам (21), (22). Таким образом, в пространстве \mathbf{E}^λ существует точка $\epsilon_{k0} = \{\gamma_{k0}, \mathbf{h}_{k0c}\}$, где \mathbf{h}_{k0c} – соответствующая составляющая известного вектора \mathbf{h}_{k0} , для которой выполняются условия $\mathbf{h}_{k0} = \mathbf{h}^*(\epsilon_{k0})$, $J_k^*(\epsilon_{k0}) = J_{k0}$.

Осталось показать, что в \mathbf{E}^λ не существует точки ϵ_{01} такой, что $J_k^*(\epsilon_{01}) < J_{k0}$. Действительно, предположим обратное. Но тогда для точки $\mathbf{h}^*(\epsilon_{01})$ имеет место $J_k(\mathbf{h}^*(\epsilon_{01})) = J_k^*(\epsilon_{01}) < J_{k0}$, чего быть не может в силу (38). Аналогично доказывается и обратное утверждение теоремы. ■

Проведенные рассуждения позволяют сформировать последовательность вычислительных операций для решения задачи (16).

Алгоритм решения задачи параметрического синтеза:

1. Задать начальную точку $\gamma \in \mathbf{E}^{n_d}$ и построить полином $\Delta^*(z, \gamma)$ по формулам (21), (22), (30).
2. В соответствии с тождеством $\Delta(z, \mathbf{h}) \equiv \Delta^*(z, \gamma)$ сформировать систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}) = \chi(\gamma), \quad (39)$$

которая всегда совместна, и, если ее решение неединственное, назначить произвольный вектор свободных переменных $\mathbf{h}_c \in \mathbf{E}^{n_c}$.

3. При заданном векторе $\epsilon = \{\gamma, \mathbf{h}_c\} \in \mathbf{E}^\lambda$ решить систему (39), получая при этом точку $\mathbf{h}^*(\epsilon)$.

4. Сформировать уравнения прогнозирующей модели, замкнутой регулятором (13) с вектором параметров $\mathbf{h}^*(\epsilon)$, и вычислить значение минимизируемого функционала $J_k^*(\epsilon)$ (35).

5. С помощью любого допустимого численного метода решения задачи (37) на безусловный экстремум, задать новую точку ϵ и, повторяя пункты 3, 4, минимизировать функцию $J_k^*(\epsilon)$.

6. По нахождении точки $\epsilon_{k0} = \arg \min_{\epsilon \in \mathbf{E}^\lambda} J_k^*(\epsilon)$ определить вектор $\mathbf{h}_{k0} = \mathbf{h}^*(\epsilon_{k0})$, который и принять в качестве решения задачи (16).

Сформируем теперь последовательность вычислительных операций для формирования управления с прогнозом, которая включает в себя решение задачи параметрического синтеза (16) на каждом такте.

Алгоритм управления с прогнозом на базе параметрической оптимизации:

1. Восстановить текущее состояние $\hat{\mathbf{x}}_k$ объекта с помощью асимптотического наблюдателя на основе данных измерений.
2. Решить задачу параметрического синтеза (16) в соответствии с приведенным выше алгоритмом по отношению к прогнозирующей модели (11) с начальными условиями $\tilde{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k$.
3. Регулятор (13) с найденным в результате решения задачи (16) вектором параметров \mathbf{h}_{k0} использовать на текущем такте.
4. Повторить заново все операции, указанные в пунктах 1–3, на $k + 1$ -м такте.

В итоге отметим следующие важные особенности предлагаемой схемы управления с прогнозом. Во-первых, на каждом шаге гарантируется устойчивость замкнутой системы в линейном приближении. Во-вторых, на каждом фактическом такте функционирования системы управление реализуется по принципу обратной связи. В-третьих, размерность задачи безусловной оптимизации фиксирована и не зависит от горизонта прогноза P .

5. Стабилизация вертикального положения плазмы на базе управления с прогнозом. Прежде всего преобразуем модель (5) к форме пространства состояний. В результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d}u, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^3$ – вектор состояния; $y \in \mathbf{E}^1$ – вертикальная скорость; $u \in \mathbf{E}^1$ – напряжение в VS-конвертере. Будем полагать, что модель (40) в точности описывает рассматриваемый процесс управления.

Выполним дискретизацию модели (40), и на базе полученной дискретной модели сформируем линейную прогнозирующую модель вида

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{x}}_i + \mathbf{b}_d \tilde{u}_i, & \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k, \\ \tilde{y}_i &= \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{x}}_i.\end{aligned}\quad (41)$$

Сформируем также дискретную линейную модель, представляющую динамику рассматриваемого процесса в окрестности нулевого положения равновесия. Для этого осуществим дискретизацию модели (40) и в результате находим, что

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{b}_d \bar{u}_k, \\ \bar{y}_k &= \mathbf{C}_d \bar{\mathbf{x}}_k,\end{aligned}\quad (42)$$

здесь $\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{E}^3$, $\bar{u}_k \in \mathbf{E}^1$, $\bar{y}_k \in \mathbf{E}^1$. Будем формировать управление на горизонте прогноза в форме линейного пропорционального регулятора вида

$$\bar{u}_k = \mathbf{K} \bar{x}_k, \quad (43)$$

где $\mathbf{K} \in \mathbf{E}^3$ – вектор параметров регулятора. Следует отметить, что в действительности управление по закону (43) осуществляется на базе оценки вектора состояния, полученной с помощью асимптотического наблюдателя. Заметим также, что регулятор (43) имеет полную структуру, так как ранг матриц управляемости и наблюдаемости для системы (42) полный.

Рассмотрим теперь уравнения прогнозирующей модели (41), замкнутой регулятором (43). В результате получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} &= (\mathbf{A}_d + \mathbf{b}_d \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{x}}_i, & \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_k, \\ \tilde{y}_i &= \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{x}}_i.\end{aligned}\quad (44)$$

Качество процессов управления прогнозирующей моделью (44) на горизонте прогноза P будем оценивать с помощью квадратичного функционала

$$J_k = J_k(\mathbf{K}) = \sum_{j=1}^P (\tilde{y}_{k+j}^2 + \tilde{u}_{k+j-1}^2). \quad (45)$$

Нетрудно видеть, что функционал (45) в действительности является функцией трех переменных – компонент вектора параметров регулятора \mathbf{K} . Важно отметить, что минимизируемый функционал остается существенно нелинейной функцией в данном варианте МРС-подхода даже в том случае, когда прогнозирующая модель линейная. Этот факт – следствие гарантии устойчивости замкнутой линейной системы.

Рассмотрим следующую задачу параметрического синтеза:

$$J_k = J_k(\mathbf{K}) \rightarrow \min_{\mathbf{K} \in \Omega_K}, \quad \Omega_K = \{\mathbf{K} \in \mathbf{E}^3 : \delta_i(\mathbf{K}) \in C_\Delta, i = 1, 2, 3\}. \quad (46)$$

Здесь δ_i – корни характеристического полинома $\Delta(z, \mathbf{K})$ замкнутой системы (42), (43), степень которого $n_d = 3$. В качестве области желаемого расположения корней зададим область $C_\Delta = C_{\Delta 2}$, где $r = 0.97$ и функция $\psi(\rho)$ имеет вид

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) \operatorname{tg} \beta, & \text{если } r e^{-\pi/\operatorname{tg} \beta} \leq \rho \leq r, \\ \pi, & \text{если } 0 < \rho \leq r e^{-\pi/\operatorname{tg} \beta}, \end{cases}$$

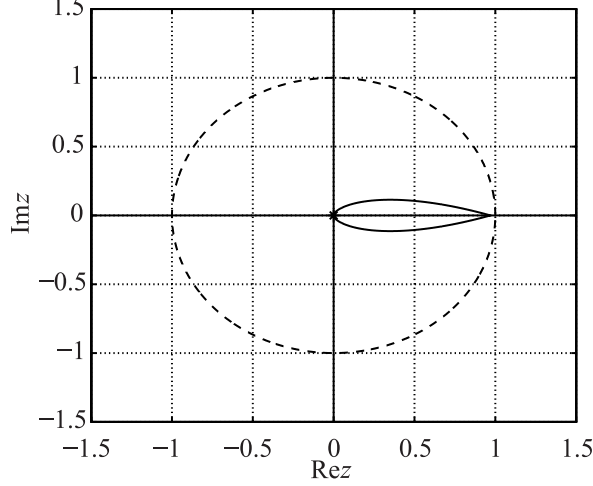


Рис. 5. Область C_Δ желаемого расположения корней
Пунктирной линией показан единичный круг.

где $\beta = \pi/10$. Данная область (ограничена сплошной линией) приведена на рис. 5.

Сформируем систему уравнений в соответствии с тождеством $\Delta(z, \mathbf{K}) \equiv \Delta^*(z, \gamma)$, где $\gamma \in \mathbf{E}^3$ и полином $\Delta^*(z, \gamma)$ находится по формулам (22), (30). В результате получим линейную систему относительно неизвестного вектора параметров \mathbf{K}

$$\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 \mathbf{K} = \chi(\gamma), \quad (47)$$

в которой вектор \mathbf{L}_0 и квадратная матрица \mathbf{L}_1 – постоянные, полностью определяются матрицами системы (42) и не зависят от номера такта k . Кроме того, матрица \mathbf{L}_1 – невырожденная, следовательно, единственное решение системы (47) представимо в виде

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{L}}_0 + \tilde{\mathbf{L}}_1 \chi(\gamma). \quad (48)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{L}}_1 = \mathbf{L}_1^{-1}$ и $\tilde{\mathbf{L}}_0 = -\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_0$. Подставляя (48) в прогнозирующую модель (41), а затем в функционал (45), получим $J_k = J_k(\mathbf{K}) = J_k^*(\gamma)$. То есть функционал J_k сводится к функции трех независимых переменных. Тогда, в соответствии с теоремой 3, задача оптимизации (46) эквивалентна безусловной минимизации

$$J_k^* = J_k^*(\gamma) \rightarrow \min_{\gamma \in \mathbf{E}^3}. \quad (49)$$

Таким образом, в соответствии с алгоритмом реализации МРС-подхода, приведенным в п. 4, для формирования управляющего воздействия необходимо на каждом такте реального времени решать задачу безусловной минимизации (49).

Рассмотрим теперь процессы вертикальной стабилизации плазмы.

Для начала опишем случай без ограничений на управляющие и контролируемые переменные. Напомним, что управление на горизонте прогноза формируется в виде линейного пропорционального регулятора (43). В связи с этим, если корни характеристического полинома системы (42), замкнутой LQR-регулятором, находятся внутри области C_Δ , то вектор параметров \mathbf{K} будет практически совпадать с вектором коэффициентов LQR-регулятора. Корни характеристического полинома замкнутой дискретным LQR-регулятором системы следующие: $z_1 = 0.9591$, $z_2 = 0.8661$, $z_3 = 0.9408$. Они находятся внутри области C_Δ . Переходные процессы в системе, замкнутой МРС-регулятором без учета ограничений, представлены на рис. 6, I.

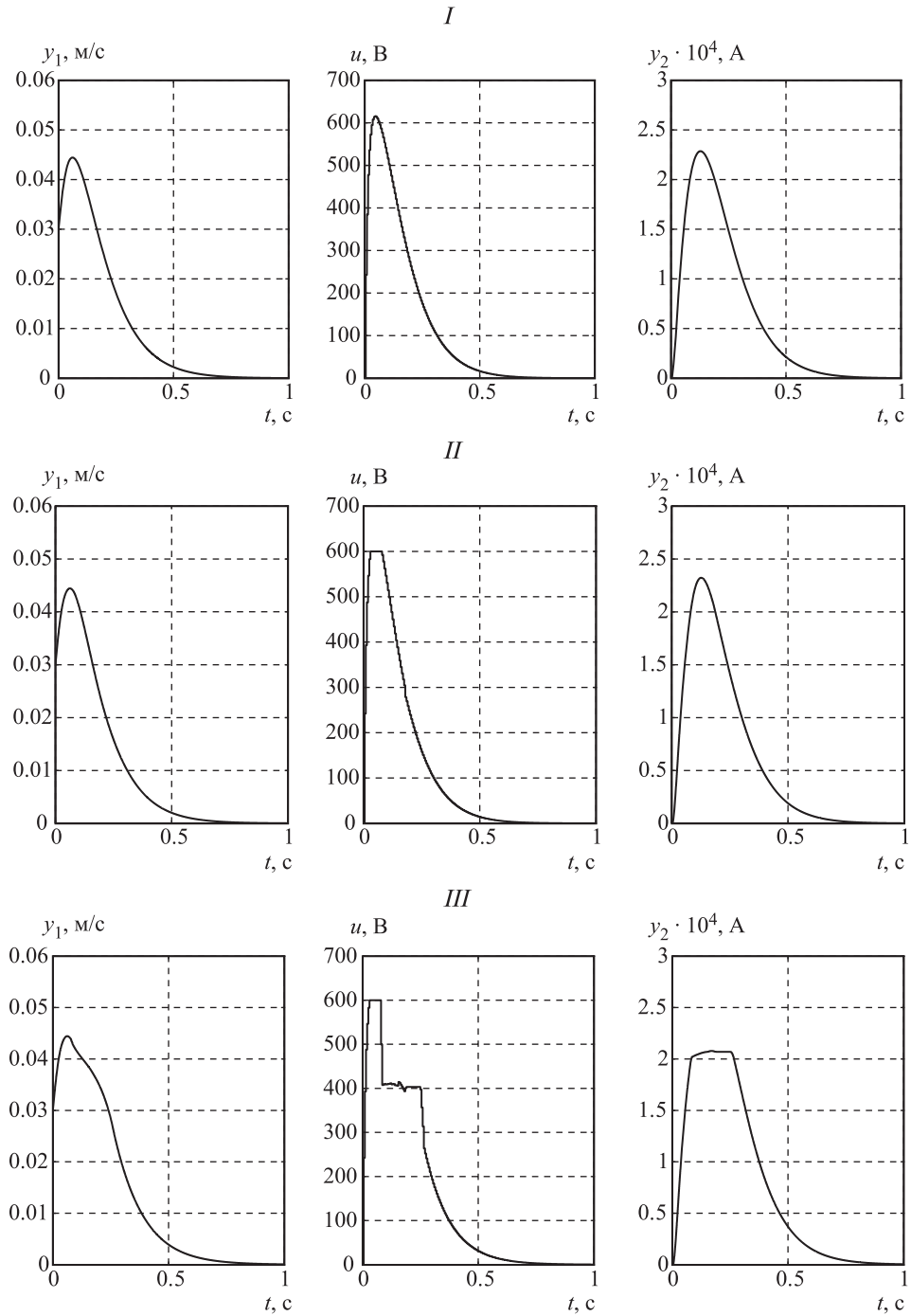


Рис. 6. Переходные процессы для MPC-регулятора без учета ограничений (I), с ограничением напряжения в VS-конвертере (II) и с ограничением тока и напряжения в VS-конвертере (III)

Рассмотрим теперь процессы стабилизации плазмы с учетом ограничений (6). Необходимо отметить, что для учета ограничения по току к системе (40) необходимо добавить дополнительное уравнение. Заметим также, что при наличии ограничений вместо безусловной минимизации (49) необходимо решать задачу нелинейного программирования с целевой функцией $J_k^*(\gamma)$ и ограничениями (6). На рис. 6, II показаны переходные процессы в системе, замкнутой MPC-регулятором, при учете ограничения только на напряжение в VS-конвертере. Из рисунка видно, что ограничение по напряжению выполняется, а ограничение по току нарушается. На рис. 6, III представлены аналогичные процессы для MPC-регулятора при учете ограничений одновременно на ток и на напряжение в VS-конвертере. Нетрудно видеть, что все требуемые ограничения выполняются.

Заключение. Рассмотрена задача вертикальной стабилизации плазмы на базе управления с прогнозирующими моделями. Предложен новый подход к управлению с прогнозом. Он позволяет гарантировать устойчивость линейного приближения замкнутой системы на каждом такте. Реализация этого подхода в режиме реального времени связана с необходимостью решения на каждом такте задачи безусловной оптимизации в случае отсутствия ограничений либо задачи нелинейного программирования при наличии ограничений. Важной особенностью подхода является то, что размерность задачи оптимизации не зависит от величины горизонта прогноза P . Сформулирован алгоритм реализации подхода в режиме реального времени.

Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примере решения задачи вертикальной стабилизации плазмы.

Литература

1. *Camacho E. F., Bordons C.* Model Predictive Control. London: Springer-Verlag, 2004. 405 p.
2. *Allgower F., Zheng A.* (editors) Nonlinear Model Predictive Control. Basel: Birkhauser-Verlag, 2000. 472 p.
3. *Maciejowski J. M.* Predictive Control with Constraints. London: Prentice Hall, 2002. 331 p.
4. *Sotnikova M.* Plasma stabilization based on model predictive control // Intern. J. of Modern Physics A. 2009. Vol. 24, N 5. P. 999–1008.
5. *Misenov B. A., Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D.* et al. Analysis and synthesis of plasma stabilization systems in tokamaks // Proc. 11th IFAC Workshop. Control Applications of Optimization. New York, 2000. Vol. 1. P. 255–260.
6. *Gribov Y., Albanese R., Ambrosino G.* et al. ITER-FEAT scenarios and plasma position/shape control // Proc. 18th IAEA Fusion Energy Conference. Sorrento, Italy, 2000. ITERP/02.
7. *Чернецкий В. И.* Математическое моделирование динамических систем. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводск. гос. ун-та, 1996. 432 с.
8. *Hendricks E., Jannerup O., Sorensen P. H.* Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 556 p.

Статья принята к печати 14 октября 2010 г.