

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СОБЫТИЙ

В. В. Учайкин^{1,a}, В. А. Литвинов², Е. В. Кожемякина¹

¹Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

²Барнаульский юридический институт МВД России, Барнаул, Россия

^avuchaikin@gmail.com

Рассматривается алгоритм моделирования методом Монте-Карло многочастичных событий на основе одночастичного инклюзивного распределения и дополнительных ограничений. Показано, что предлагаемый алгоритм позволяет получить несмещённое одночастичное распределение при строгом выполнении ограничения на сумму значений случайных величин, получаемых в одном событии. На примере адронных взаимодействий при сверхвысоких энергиях продемонстрирована возможность воссоздания предварительно заданных статистических характеристик ансамбля частиц, рождающихся в одном взаимодействии. Обсуждается также возможность наложения дополнительного ограничения на вид распределения по числу случайных величин, получаемых в одном событии.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, множественное рождение, распределение по множественности, алгоритм, инклюзивный спектр.

1. Введение

Метод Монте-Карло находит своё применение при моделировании различных физических, технологических и экономических процессов. Применение данного метода не вызывает принципиальных затруднений, если исследователи располагают математической моделью случайного процесса, сопоставляемой реальному явлению. В некоторых случаях разработчики алгоритма моделирования естественного процесса не обладают полной (эксклюзивной) информацией об отдельных событиях. В этом случае алгоритм строится на основе некоторых интегральных (инклюзивных) сведений об изучаемом явлении (процессе) [1; 2]. Так, например, обстоит дело при моделировании множественного рождения элементарных частиц в актах ядерного взаимодействия при сверхвысоких энергиях. Прямое аналоговое моделирование такого события требует знания многочастичного распределения со случайным числом переменных.

В настоящее время ни результаты ускорительных экспериментов, ни теория не предоставляют такой информации. Имеются как теоретические предсказания, так и результаты экспериментов на ускорителях по одночастичным (инклюзивным) распределениям, а также распределения по числу рождающихся адронов в неупругом столкновении нуклонов и парные корреляционные функции.

Несмотря на наличие монте-карловских алгоритмов, например, РYТИНА [3], используемых учёными в расчётах, связанных с адронными взаимодействиями при

сверхвысоких энергиях, продолжают исследования в данном направлении, о чём свидетельствуют работы [4; 5].

В то же время информация об этих процессах нужна не только (а часто и не столько) для уточнения самой теории, управляющей этими процессами, но и для решения других задач (например, задач физики космических лучей), процедура решения которых в силу высокого уровня естественных флуктуаций предъявляет менее строгие требования к точности, чем анализ тонких эффектов квантовой хромодинамики [6].

Дополнительную информацию об этих процессах доставляют законы сохранения [7], однако включение их в инклюзивную модель процесса требует определённой осторожности. В то же время в адронных процессах высоких энергий проявляются особые свойства универсальности [8; 9], использование которых позволяет компенсировать недостаточность детальных сведений о процессе подобно тому, как в статистической физике недостаточность знаний о системе компенсируется универсальностью предельных законов, возникающей вследствие большого числа переменных. По этой причине и прибегаем мы в настоящей работе к фрактальной концепции, основанной на самоподобии.

Рассмотрим простейший алгоритм, построенный на использовании одночастичного инклюзивного распределения $W(x)$, удовлетворяющего условиям

$$\int_0^1 xW(x)dx = 1, \quad \int_0^1 W(x)dx = \langle n \rangle \gg 1. \quad (1)$$

При известном только $W(x)$ естественным будет для моделирования значений случайных величин ξ воспользоваться плотностью вероятности $\rho(x) = W(x)/\langle n \rangle$. Случайные значения ξ_k выбираются до тех пор, пока их сумма не превысит единицу. Значение последней случайной величины переопределяется, чтобы удовлетворить ограничению. Казалось бы, при большом среднем числе случайных величин переопределение (искажение распределения) всего одной частицы будет несущественным. Однако из равенств (1) можно сделать вывод, что вероятности появления малых ξ гораздо больше, чем больших ξ . А это, в свою очередь, означает, что доля переопределённых случайных величин при $\xi > 0.5$ будет существенной. Непосредственное моделирование подтверждает это утверждение.

Другим подходом, возможно более естественным, для моделирования акта множественного рождения является использование алгоритма, в котором на каждом шаге учитываются имеющиеся ограничения.

2. Описание алгоритма

Рассматриваемый в данной работе метод моделирования основан на фрактальном представлении процесса множественного рождения. Предположим, что имеется некоторый ресурс, для определённости будем называть его энергией, а численное значение примем равным единице. Далее этот ресурс случайным образом делится на некоторое число частей. Процесс деления продолжается до тех пор, пока доступная для деления энергия не станет меньше заданного порогового значения ε . При этом на каждом шаге деления будем считать систему подобной исходной. Введём следующие обозначения: $P_n(x)$ — вероятность того, что после n актов деления остаточный ресурс (энергия) примет значение x ; $\rho(x, y)$ — вероятность того, что из энергии y в процессе деления выделится энергия x .

Используя введённые обозначения, можно получить выражение для инклюзивного одночастичного распределения. Очевидно, что должно выполняться равенство $P_0(x) = \delta(1 - x)$. Для остальных значений $P_n(x)$ можно записать рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(x) = \int_x^1 P_n(y) \rho(y - x, y) dy. \quad (2)$$

Также можно записать выражение для распределения по энергии частиц n -го поколения:

$$\omega_n(x) = \int_x^1 P_{n-1}(y) \rho(x, y) dy. \quad (3)$$

Суммируя спектры частиц всех поколений, определённых равенством (3), получим выражение для одночастичного инклюзивного распределения:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x). \quad (4)$$

Вычисления по формулам (2)–(4) можно упростить, если сделать некоторые предположения о виде плотности вероятности $\rho(x, y)$. Пусть $\rho(y - x, y) = \phi(x/y)/y$. Выполним интегральное преобразование Меллина для равенства (2):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{s-1} P_{n+1}(x) dx &= \int_0^1 x^{s-1} \int_x^1 P_n(y) \rho(y - x, y) dy dx = \\ &= \int_0^1 y^{s-1} P_n(y) \int_0^y \left(\frac{x}{y}\right)^{s-1} \phi\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dx}{y}, \end{aligned}$$

что приводит к следующему выражению для трансформанты Меллина:

$$\tilde{P}_{n+1}(s) = \tilde{P}_n(s) \tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}^{n+1}(s). \quad (5)$$

Здесь использовано обозначение

$$\tilde{\phi}(s) = \int_0^1 x^{s-1} \rho(1 - x, 1) dx. \quad (6)$$

Используя выражения (5) и (3), получим значение трансформанты Меллина распределения по энергии частиц n -го поколения:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n(s) &= \int_0^1 x^{s-1} \int_x^1 P_{n-1}(y) \rho(x, y) dy dx = \int_0^1 y^{s-1} P_{n-1}(y) \int_0^y \left(\frac{x}{y}\right)^{s-1} \phi\left(1 - \frac{x}{y}\right) \frac{dx}{y} = \\ &= \tilde{P}_{n-1}(s) \tilde{\psi}(s) = \tilde{\phi}^{n-1}(s) \tilde{\psi}(s), \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}(s) = \int_0^1 x^{s-1} \phi(1 - x) dx. \quad (7)$$

С учётом (4) получим выражение для трансформанты Меллина инклюзивного одночастичного распределения:

$$\tilde{W}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\omega}_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}^{n-1} \tilde{\psi}(s) = \frac{\tilde{\psi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)}. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует важный вывод о свойстве инклюзивного распределения (4). Из равенства (6) и нормировки плотности вероятности $\rho(x, y)$ следует, что знаменатель (8) обращается в ноль при $s = 1$, в то время как числитель равен единице. Тогда при выполнении обратного преобразования Меллина получим слагаемое, пропорциональное $1/x$. Т. е. для любой плотности вероятности вида $\rho(y - x, y) = \phi(x/y)/y$ инклюзивное распределение (4) будет содержать слагаемое, обратно пропорциональное x . Коэффициент пропорциональности и, как следствие, поведение $W(x)$ при больших x будет определяться видом выбранной функции $\rho(x, y)$.

Представляется, что полученное асимптотическое поведение $W(x)$ при $x \rightarrow 0$ обусловлено наличием первого ограничения в (1) и подобия системы на каждом шаге деления. Заметим при этом, что у нас осталась возможность произвольно варьирования коэффициента этой асимптотики. Равенства (7) и (8) можно использовать для нахождения $\phi(x)$ по заданному $W(x)$. Рассмотрим предварительно некоторые модельные примеры.

2.1. Модельные примеры

Рассмотрим модельную задачу с $\rho(x, y)$, выбранной в виде бета-распределения:

$$\rho(x, y) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{1-\alpha-\beta} x^{\alpha-1} (y-x)^{\beta-1}. \quad (9)$$

Вычислим трансформанты Меллина для $\phi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s) &= \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-x)^{\alpha-1} x^{s+\beta-2} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(s + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + s - 1)\Gamma(\beta)}, \\ \tilde{\psi}(s) &= \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-x)^{\beta-1} x^{s+\alpha-2} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(s + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + s - 1)\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для трансформант в равенство (8), получим трансформанту Меллина инклюзивного одночастичного распределения:

$$\tilde{W}(s) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(s + \alpha - 1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta + s - 1) - \Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(s + \beta - 1))}. \quad (10)$$

Из определения трансформанты Меллина и первого ограничения в (1) следует, что $\tilde{W}(s = 2) = 1$. Подставляя $s = 2$ в выражение (10), можно убедиться, что данное требование выполняется. Также легко убедиться, что знаменатель выражения (10) при $s = 1$ обращается в ноль.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Предположим, что $\alpha = 1$, а $\beta = k$ — целое положительное число. В этом случае выражение (10) можно упростить:

$$\tilde{W}(s) = \frac{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(s)}{(s-1)\Gamma(s + \beta - 1)} = \frac{k!}{(s-1)} \left(\prod_{m=0}^{k-2} (s+m) \right)^{-1}. \quad (11)$$

Для данного выражения легко получить результат обратного преобразования Меллина методом вычетов. При этом для любых положительных β , включая дробные значения, первое слагаемое при разложении по степеням x будет β/x :

$$W(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} x^{-s} \tilde{W}(s) ds = \frac{k}{x} - \sum_{m=0}^{k-2} \frac{k!}{(m+1)!(k-m-2)!} (-x)^m. \quad (12)$$

Частным случаем полученной формулы будет формула $W(x) = 1/x$, соответствующая $k = 1$ и $\alpha = 1$. Т.е. если на каждом шаге деления энергию частицы выбирать из равномерного распределения, то мы получим инклюзивное распределение в виде $1/x$. Увеличивая значение параметра β , мы получим другой коэффициент асимптотики и, как следствие, другое значение среднего числа частиц, рождающихся в одном акте деления. Влияние слагаемых, стоящих под знаком суммы, на среднее число частиц, рождающихся в акте деления, существенно меньше вклада первого слагаемого.

Предположим, что $\beta = 1$, а $\alpha = k$ — целое положительное число. В этом случае выражение (10) преобразуется в

$$\tilde{W}(s) = \frac{\alpha \Gamma(s + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + s) - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(s)} = k \prod_{m=0}^{k-2} (s + m) \left(\prod_{m=0}^{k-1} (s + m) - k! \right)^{-1}.$$

При $k = 1$ вновь получим $W(x) = 1/x$. При $k = 2$ — $W(x) = 2/(3x) + 4x^2/3$. Более сложное выражение получается для $k = 3$:

$$W(x) = \frac{6}{11x} + \frac{9x^2 \cos(\arctan(\sqrt{2}/3) + \sqrt{2} \ln(x))}{\sqrt{11}}. \quad (13)$$

При этом заметим, что асимптотика при малых значениях x остаётся прежней с постепенно убывающим коэффициентом пропорциональности. Таким образом, варьируя значения параметров α и β в выражении (9), можно изменять в широком интервале коэффициент при слагаемом, пропорциональном $1/x$.

3. Вычисление $\phi(x)$ по $W(x)$

Выражение (8) с учётом (7) может быть использовано для нахождения $\phi(x)$ по заданному $W(x)$. Подставим в (8) выражения для трансформант $\tilde{\phi}(s)$ и $\tilde{\psi}(s)$, записанные через интеграл:

$$\tilde{W}(s) = \int_0^1 (1-x)^{s-1} \phi(x) dx - \tilde{W}(s) \int_0^1 x^{s-1} \phi(x) dx. \quad (14)$$

Данное равенство является уравнением Фредгольма I рода с ядром:

$$K(s, x) = (1-x)^{s-1} + x^{s-1} \tilde{W}(s). \quad (15)$$

Таким образом, и правая часть, и ядро уравнения Фредгольма определяются видом распределения $W(x)$, точнее его трансформантой Меллина. Для решения уравнения (13) необходимо применять методы регуляризации. При этом следует отметить, что мы обладаем дополнительной информацией об искомом решении. А

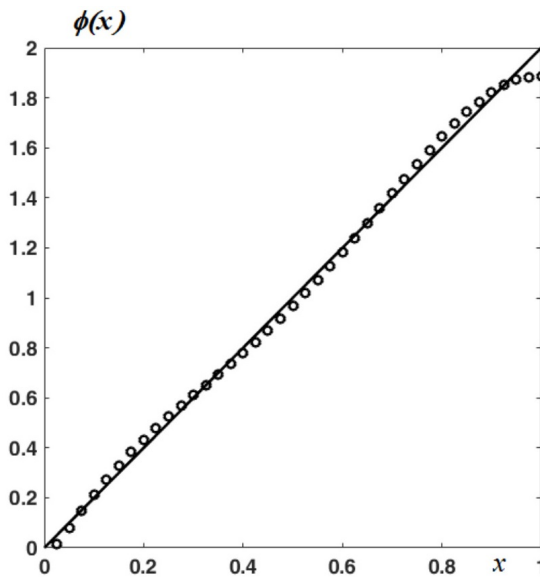


Рис. 1. Решение уравнения (14) для $\phi(x) = 2x$. Линия — точное значение, о — численное решение по методу регуляризации Тихонова

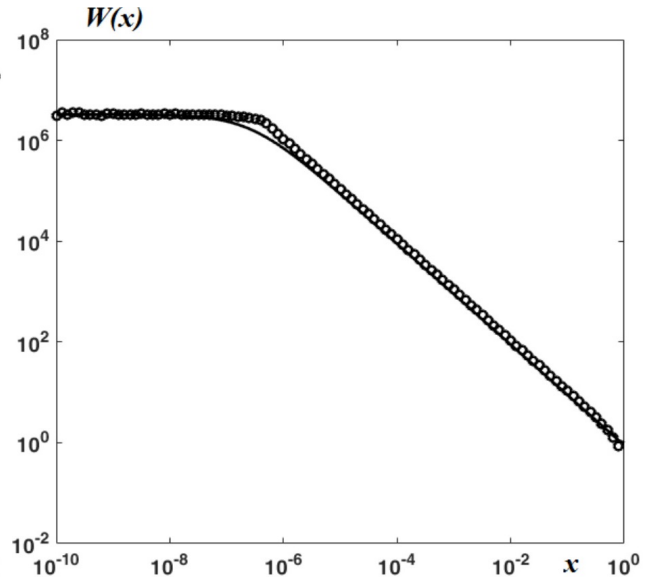


Рис. 2. Инклюзивное распределение. Линия — $W(x) = A/(x + \mu)$, о — метод Монте-Карло

именно, функция $\phi(x)$ всюду не отрицательна и её интеграл на отрезке от 0 до 1 равен единице.

На рис. 1 приведено сравнение численного решения уравнения (14) с применением метода регуляризации Тихонова [10]. Значения переменной s выбирались на отрезке [1.2, 5] с шагом 0.05. Шаг по переменной интегрирования выбирался равным 0.025. Параметр регуляризации определялся путём подбора из условия неотрицательности искомой функции и отсутствия локальных осцилляций. Заметим, что искомая функция $\phi(x)$ играет вспомогательную роль и нас не интересует вопрос единственности решения уравнения (14).

Для проверки влияния погрешностей в определении функции $\phi(x)$ на результаты моделирования инклюзивного распределения $W(x)$ был проведён модельный расчёт для $W(x) = A/(\mu + x)$. Значения параметров A и μ определялись из условий нормировки:

$$\int_0^1 xW(x)dx = 1, \quad \int_0^1 W(x)dx = N = 15.$$

Найденные из уравнения (14) значения функции $\phi(x)$ нормировались так, чтобы её интеграл на отрезке от 0 до 1 был равен единице.

4. Распределение по множественности

Проведём оценку распределения по числу частиц, получающегося при использовании описанного алгоритма. В связи с тем, что деление происходит до тех пор, пока остаток энергии не станет меньше чем ε , то и среднее число частиц, и другие моменты будут определяться этим параметром. Исходя из описанного алгоритма, вероятность того, что в процессе деления образуется n частиц, можно записать через введённые ранее вероятности $P_n(x)$:

$$p_n = \int_{\varepsilon}^1 P_{n-1}(y) \int_{y-\varepsilon}^y \rho(x, y) dx dy = \int_{\varepsilon}^1 P_{n-1}(y) \int_0^{\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dx}{y} dy. \quad (16)$$

Для вычисления интеграла (16) воспользуемся преобразованием Меллина:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varepsilon^{s-1} \int_{\varepsilon}^1 P_{n-1}(y) \int_0^{\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dx}{y} dy d\varepsilon &= \int_0^1 dy P_{n-1}(y) \int_0^y \varepsilon^{s-1} \int_0^{\varepsilon/y} \phi(t) dt d\varepsilon = \\ &= \int_0^1 dy P_{n-1}(y) \int_0^y \varepsilon^{s-1} \int_0^{\varepsilon/y} \phi(t) dt d\varepsilon = (1 - \tilde{\phi}(s+1)) \left(\tilde{\phi}(s+1)\right)^{n-1} / s. \end{aligned} \quad (17)$$

Выполнив обратное преобразование Меллина для выражения (17), получим значения вероятностей p_n того, что деление остановится на n -м шаге. Найдём среднее и дисперсию числа n как функции параметра ε . Умножим выражение (17) на n и просуммируем от 1 до ∞ :

$$\langle n(s) \rangle = \frac{1 - \tilde{\phi}(s+1)}{s} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\tilde{\phi}(s+1)\right)^{n+1} = \frac{1}{s \left(1 - \tilde{\phi}(s+1)\right)}.$$

Из условия нормировки $\phi(x)$ следует, что скобка в знаменателе выражения (17) обращается в ноль при $s = 0$. Если при выполнении обратного преобразования Меллина ограничиться только старшим членом по ε , то получим

$$\langle n(s) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\varepsilon^{-s}}{s \left(1 - \tilde{\phi}(s+1)\right)} ds = \frac{\ln \varepsilon}{\tilde{\phi}'(1)} + \text{const.}$$

Этот результат хорошо согласуется с формулой (12), если учесть, что для рассматриваемого там вида функции $\phi(x)$ значение производной трансформанты при $s = 1$ равно $-k$. Для вычисления дисперсии посчитаем предварительно второй факториальный момент:

$$\langle n(n-1)(s) \rangle = \frac{1 - \tilde{\phi}(s+1)}{s} \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \left(\tilde{\phi}(s+1)\right)^{n-1} = \frac{2\tilde{\phi}(s+1)}{s \left(1 - \tilde{\phi}(s+1)\right)^2}.$$

Если так же, как и в случае вычисления среднего, ограничиться старшим членом по ε , то получим

$$\langle n(n-1)(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\varepsilon^{-s} \tilde{\phi}(s+1)}{s \left(1 - \tilde{\phi}(s+1)\right)^2} ds = \frac{\ln^2 \varepsilon}{\left(\tilde{\phi}'(1)\right)^2} + O(\ln \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\langle n \rangle^2$ и $\langle n^2 \rangle$ будут иметь одинаковые коэффициенты при старшем члене $\ln^2 \varepsilon$. Следовательно, дисперсия числа частиц будет пропорциональна среднему числу частиц. Можно показать, что для $\phi(x) = 1$ дисперсия числа частиц, рождающихся в одном событии, будет равна среднему.

Пуассоновский характер распределения по множественности может быть неприемлем для моделирования некоторых процессов. В частности, для множественного рождения частиц в ядерных взаимодействиях при сверхвысоких энергиях наблюдается более широкое распределение по числу частиц, чем распределение Пуассона, известное как KNO-скейлинг. При этом, согласно гипотезе, хорошо согласующейся с экспериментальными данными, форма распределения не зависит от среднего числа частиц, рождающихся в одном акте взаимодействия.

Рассматриваемый алгоритм может быть модифицирован в рамках модели самоподобия, чтобы удовлетворить дополнительному условию на форму распределения по множественности, что будет показано далее. Пока продолжим изучать другие свойства рассматриваемого алгоритма.

5. Двухчастичное распределение

Найдём двухчастичную корреляционную функцию, соответствующую реализации обсуждаемого алгоритма. Обозначим через $K(x, y)dxdy$ число пар частиц, одна из которых находится в интервале dx , а другая — в интервале dy . Для вычисления данной функции можно воспользоваться распределениями (2) и (3). Вероятность появления пары случайных величин $\xi_k = x$ и $\xi_{k+n} = y$ может быть представлена как

$$\mathfrak{P}_{kn}(x, y) = \int_{x+y}^1 P_{k-1}(z)\rho(x, z)\omega_n(y/(z-x))/(z-x)dz. \quad (18)$$

При записи данного выражения мы учли подобие распределений, получающихся после каждого акта дробления. Искомое двухчастичное распределение можно выразить через вероятность (18):

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{P}_{kn}(x, y) + \mathfrak{P}_{kn}(y, x)).$$

Введём обозначение $K_1(x, y)$ для суммы первого слагаемого $\mathfrak{P}_{kn}(x, y)$, тогда

$$K_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x+y}^1 P_{k-1}(z)\rho(x, z)\omega_n(y/(z-x))/(z-x)dz. \quad (19)$$

Учитывая, что $P_0(z) = \delta(1-z)$ для $\rho(x, z) = 1/z$ выражение (19) примет вид

$$K_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x+y}^1 \frac{(\ln(1/z))^{k-1} (\ln((z-x)/y))^n}{z(k-1)!n!(z-x)} dz + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln((1-x)/y))^n}{n!(1-x)}.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получим окончательное выражение для $K_1(x, y)$:

$$K_1(x, y) = \int_{x+y}^1 \frac{1}{z^2 y} dz + \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \left(\frac{1}{x+y} \right) \Theta(1-x-y),$$

где $\Theta(1-x-y)$ — ступенчатая функция, учитывающая ограничение на суммарное значение аргументов.

Итоговое выражение для двухчастичной функции примет вид

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \left[\frac{1}{y} \left(\frac{1}{x+y} \right) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+y} \right) \right] \Theta(1-x-y) = \\ &= \frac{\Theta(1-x-y)}{xy} = W(x)W(y)\Theta(1-x-y). \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемый алгоритм позволяет получать наборы случайных величин, свободных от корреляций. Представляется, что данный факт совместен с пуассоновским характером распределения по множественности даёт большую свободу для модификации алгоритма, чтобы удовлетворить дополнительным требованиям, налагаемым на статистические характеристики ансамбля моделируемых частиц. Рассмотрим это на примере адронных взаимодействий при сверхвысоких энергиях.

6. Применение алгоритма к адронным взаимодействиям

Ранее было показано, что, изменяя вид вспомогательной функции $\phi(x)$, можно получать различные значения средней множественности. При этом флуктуации множественности будут иметь пуассоновский характер, что существенно меньше, чем показывают эксперименты на ускорителях. Но именно малые флуктуации при фиксированном виде $\phi(x)$ позволяют модифицировать алгоритм, подогнав эти флуктуации к заданному виду.

Предположим, что нам задано некоторое распределение по множественности p_n . При моделировании каждого акта множественного рождения на первом шаге разыгрывается случайное число N из распределения p_n . По полученному значению N и одночастичному инклюзивному распределению $W(x)$ подбирается вспомогательная функция $\phi(x, N)$. Отметим при этом, что, выбирая $\phi(x) \sim x^\alpha$, мы имеем возможность менять среднюю множественность, а варьируя α от акта к акту, получаем возможность управлять и распределением по множественности.

Ниже приведены результаты моделирования актов множественного рождения частиц, имитирующих протон-протонные столкновения при различных энергиях. Для того, чтобы добиться удовлетворительного согласия по средней множественности и распределению по множественности с экспериментальными данными, была выбрана следующая зависимость параметра α от суммарного квадрата энергии соударяющихся частиц в системе центра масс s : $\alpha = \beta\gamma$, где $\beta = (1 + 0.7 \lg(s))$, а γ для каждого взаимодействия разыгрывалось случайным образом по формуле $\gamma = (-\ln \xi)^{\beta/10}$, где ξ — равномерно распределённая на отрезке $[0,1]$ случайная величина.

Представляет интерес также другая модификация алгоритма, в которой допускается «каскадное» деление выделившейся энергии. Предположим, что каждой выделенной порции энергии необходимо «пролететь» некоторый слой толщины t_0 , в котором она может провзаимодействовать с дальнейшим дроблением по тому же закону, что и родительская частица. «Пробег» частицы в этом условном слое зависит от её энергии. Для того, чтобы удовлетворить экспериментальным данным по средней множественности, пробная функция была выбрана в виде $\phi(x) \sim x^{-0.3}$, а «пробег» частиц вычислялся по формуле $t = (-\ln \xi)^c$, $c = 0.4 + 0.04 * \sqrt{\lg s}$. Толщина слоя взаимодействия для данных параметров бралась равной 0.4.

На рис. 3 и 4 приведены результаты моделирования событий множественного рождения по двум описанным выше алгоритмам. Наблюдается хорошее согласие как по среднему числу заряженных частиц, так и по распределениям по множественности.

7. Заключение

Авторы данной работы не ставили цели создать целостный алгоритм моделирования актов адронных взаимодействий при сверхвысоких энергиях. В первую очередь работа посвящена исследованию свойств алгоритма множественного рождения, основанного на построении самоподобных (фрактальных) систем. Показана возможность широкого варьирования параметров алгоритма для того, чтобы воспроизвести предварительно заданные статистические свойства ансамбля частиц, рождающихся в одном акте взаимодействия.

Применительно к примеру адронных взаимодействий осталась ещё одна неиспользованная «степень свободы» — деление энергии на продольную и поперечную

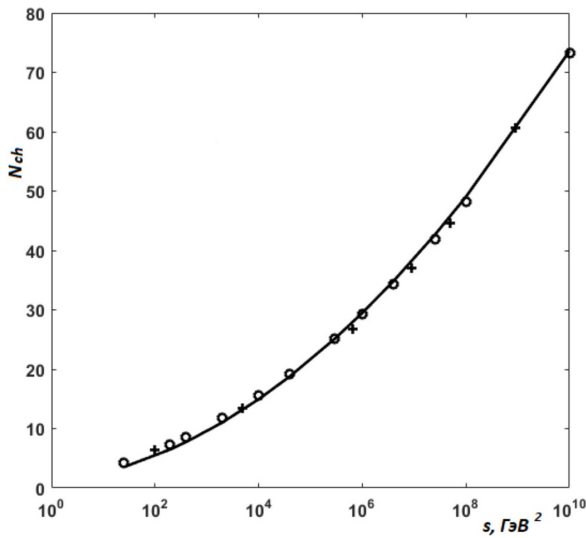


Рис. 3. Средняя множественность заряженных частиц. Линия — аппроксимация экспериментальных данных [11], о — алгоритм 1, + — алгоритм 2

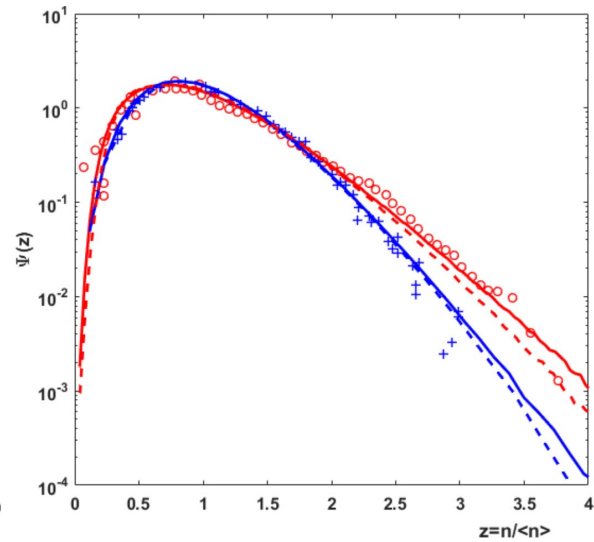


Рис. 4. Распределение по числу частиц в одном событии: о — данные SPS [12], + — данные ISR [12], сплошная линия — алгоритм 1, пунктир — алгоритм 2

составляющие, что, по мнению авторов, позволит привести в модель необходимые корреляции.

Отметим также, что «фрактальный» алгоритм может быть применён и для моделирования распределений, в которых отсутствуют флуктуации числа рождающихся частиц.

Предположим, что требуется получить совокупности наборов значений ξ_1, \dots, ξ_ν , распределение которых $C(x)$ пропорционально $1/\sqrt{x}$. Дополнительное ограничение определяется абсолютным значением функции $C(x)$, которое запишем в виде

$$\int_0^1 C(x) dx = N.$$

Например, для $C(x) = A/\sqrt{x}$ значение N будет равно $2A$. Значение параметра A может быть связано с другим интегральным ограничением (возможно и более строгим). Если, как в рассматриваемых ранее примерах, наложить ограничение на сумму значений ξ_i , то для данного случая получим $A = 1.5$ и $N = 3$. Отметим, что для всех $C(x) \sim 1/x^\alpha$ при $\alpha < 1$ существует конечное значение N , удовлетворяющее приведённому выше условию.

Вернёмся к случаю $\alpha = 0.5$. Получим совокупности значений ξ_i с суммарным значением, равным единице, имеющих распределение с асимптотикой при малых x как $1/\sqrt{x}$, если дробление исходной «энергии» ограничить двумя актами. Пробная функция выбирается в виде $\phi(x) = 0.5/\sqrt{x}$. Итоговый инклюзивный спектр в этом случае можно представить в виде

$$C(x) = 0.5/\sqrt{x} + \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)}} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{(y-x)y}} \right) dy. \quad (20)$$

Конечно, выражение (20) не совпадает с требуемым $1.5/\sqrt{x}$, но, во-первых, отличие это незначительное и отчётливо прослеживается исходная асимптотика. Во-вторых, при необходимости у нас имеется возможность подправить акт последнего деления. Важно, что последний пример демонстрирует влияние ограниченного числа деления исходной энергии на получаемое асимптотическое поведение

инклюзивного спектра. При этом, например, для получения степенного спектра с $C(x) = 4/3x^{-2/3}$ достаточно ограничиться тремя актами деления с пробной функцией $\phi(x) = 1/3x^{-2/3}$.

На рис. 5 и 6 приводится сравнение результатов моделирования распределений с асимптотиками $x^{-1/2}$ и $x^{-2/3}$. Наблюдается хорошее согласие для широкого интервала значений случайных величин.

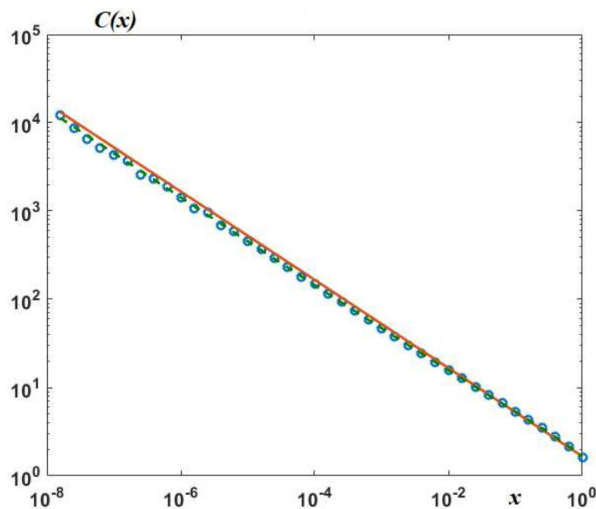


Рис. 5. Инклюзивное распределение. Линия — $C(x) = 1.5/\sqrt{x}$, о — метод Монте-Карло, пунктир — расчёт по формуле (20)

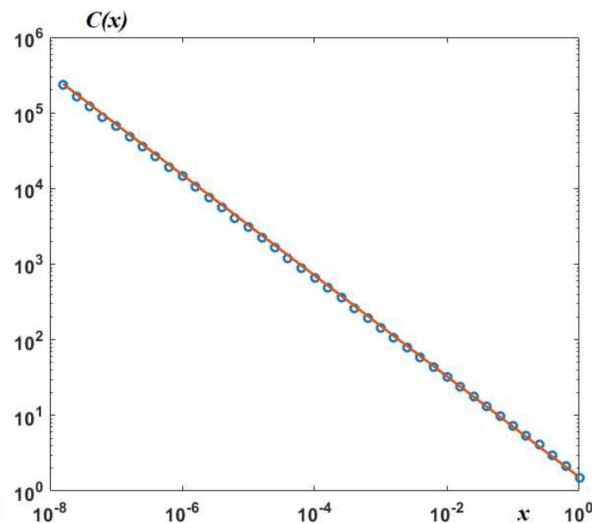


Рис. 6. Инклюзивное распределение для $C(x) = 1.33x^{-2/3}$. Линия — $C(x) = 1.33x^{-2/3}$, о — метод Монте-Карло

Список литературы

1. **Dremin I. M., Cary J. W.** Hadron multiplicities // Physical Reports. 2001. Vol. 349. P. 301–393.
2. **Armesto N.** Review of Monte Carlo methods for particle multiplicity evaluation // Journal of Physics: Conference Series. 2005. Vol. 5. P. 219–229.
3. **Sjostrand T., Mrenna S., Skands P.** PYTHIA 6.4 Physics and Manual // Journal of High Energy Physics. 2006. Vol. 2006, no. JHEP05(2006).
4. **Былинкин А. А.** Двухкомпонентная модель для рождения адронов при столкновении частиц высокой энергии: дис. ... канд. физ.-мат. наук, 01.04.16 — Физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: Ин-т теорет. и эксперимент. физики, 2014.
5. **Дрожжова Т. А.** Исследование флуктуаций числа нуклонов-участников и отбор событий по центральности в экспериментах по столкновениям ультрарелятивистских ядер: дис. ... канд. физ.-мат. наук., 01.04.16 — Физика атомного ядра и элементарных частиц. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2018.
6. **Учайкин В. В., Рыжов В. В.** Стохастическая теория переноса частиц высоких энергий. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1988.
7. **Гольданский В. И., Никитин Ю. П., Розенталь И. Л.** Кинематические методы в физике высоких энергий. Новосибирск: Наука, 1987.
8. **Botet R., Ploszajczak M.** Universal Fluctuations: The Phenomenology of Hadronic Matter. Singapore: World Scientific, 2002.
9. **Vzdak A.** Universality of multiplicity distribution in proton-proton and electron-positron collisions // Physical Review D. 2017. Vol. 96, no. 036007.
10. **Лаврентьев М. М.** Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. Акад. наук СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.

11. **Thome W., et al.** (Aachen-CERN-Heidelberg-Munich Collaboration). Charged Particle Multiplicity Distributions in Collisions at ISR Energies // Nuclear Physics B. 1977. Vol 129. P. 365.
12. **Сарычева Л. И.** Физика фундаментальных взаимодействий: спецкурс. М. : КДУ, 2008.

Поступила в редакцию 23.05.2022.

После переработки 22.08.2022.

Сведения об авторах

Учайкин Владимир Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия; e-mail: vuchaikin@gmail.com

Литвинов Владимир Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и специальной техники, Барнаульский юридический институт МВД России, Барнаул, Россия; e-mail: lva201011@yandex.ru

Кожемякина Елена Владиславовна, старший преподаватель кафедры теоретической физики, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия; e-mail: elvk@mail.ru

ON AN ALGORITHM FOR SIMULATION OF MULTIPARTICLE EVENTS

V.V. Uchaikin^{1,a}, V.A. Litvinov², E.V. Kozhemiakina¹

¹*Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia*

²*Barnaul Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Barnaul, Russia*

^a*vuchaikin@gmail.com*

The paper considers an algorithm for the Monte Carlo simulation of multiparticle events based on a single-particle inclusive distribution and additional restrictions. It is shown that the proposed algorithm allows us to obtain an unbiased single-particle distribution when the restriction on the sum of values of random variables obtained in a single event is strictly fulfilled. Using the example of hadron interactions at ultrahigh energies, the possibility of recreating pre-defined statistical characteristics of an ensemble of particles generated in a single interaction is demonstrated. The possibility of imposing an additional restriction on the type of distribution is also discussed by the number of random variables obtained in a single event.

Keywords: *Monte Carlo method, multiple production, multiplicity distribution, algorithm, inclusive spectrum.*

References

1. **Dremin I.M., Cary J.W.** Hadron multiplicities. *Physical Reports*, 2001, vol. 349, pp. 301–393.
2. **Armesto N.** Review of Monte Carlo methods for particle multiplicity evaluation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2005, vol. 5, pp. 219–229.
3. **Sjostrand T., Mrenna S., Skands P.** PYTHIA 6.4 Physics and Manual. *Journal of High Energy Physics*, 2006, vol. 2006, no. JHEP05(2006).
4. **Bylinkin A.A.** *Dvukhkomponentnaya model' dlya rozhdeniya adronov pri stolknovenii chastits vysokoy energii* [Two-component model for the production of hadrons in the collision of high-energy particles]. PhD. Thesis. Moscow, Institute of Theoretical and Experimental Physics, 2014. (In Russ.).
5. **Drozhzhova T.A.** *Issledovaniye fluktuatsiy chisla nuklonov-uchastnikov i otbor sobytiy po tsentral'nosti v eksperimentakh po stolknoveniyam ul'trarelyativistskikh yader* [Investigation of fluctuations in the number of participating nucleons and selection of events by centrality in experiments on collisions of ultrarelativistic nuclei]. PhD. Thesis. St. Petersburg, St. Petersburg State University, 2018. (In Russ.).
6. **Uchaikin V.V., Ryzhov V.V.** *Stokhasticheskaya teoriya perenosa chastits vysokikh energiy* [Stochastic theory of high-energy particle transport]. Novosibirsk, Nauka Publ., Siberian Branch, 1988.
7. **Gol'danskii V.I., Nikitin Yu.P., Rozenal I.L.** *Kinematicheskiye metody v fizike vysokikh energiy* [Kinematic methods in high energy physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1987. (In Russ.).
8. **Botet R., Ploszajczak M.** *Universal Fluctuations: The Phenomenology of Hadronic Matter*. Singapore, World Scientific, 2002.
9. **Bzdak A.** Universality of multiplicity distribution in proton-proton and electron-positron collisions. *Physical Review D*, 2017, vol. 96, no. 036007.

10. **Lavrentiev M.M.** *Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda* [On integral equations of the first kind]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences, 1959, vol. 127, no. 1., pp. 31–33. (In Russ.)].
11. **Thome W., et al.** (Aachen-CERN-Heidelberg-Munich Collaboration). Charged Particle Multiplicity Distributions in Collisions at ISR Energies. *Nuclear Physics B*, 1977, vol. 129, p. 365.
12. **Sarycheva L. I.** *Fizika fundamental'nykh vzaimodeystviy* [Physics of fundamental interactions]. Moscow, KDU Publ., 2008.

Article received 23.05.2022.

Corrections received 22.08.2022.