*Алгебра и логика, 52, № 3 (2013), 386—391*

УДК 512.5

# О НЕПРИВОДИМОСТИ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НАД ГРУППОЙ*)

**Н. С. РОМАНОВСКИЙ**

## Введение

В работах [1, 2] были изложены основы алгебраической геометрии над группой. Напомним некоторые определения. Пусть $G$ — группа, $F = G * \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ — свободное произведение группы $G$ и свободной группы с базой $\{x_1, \ldots, x_n\}$. *Уравнением над* $G$ называется выражение вида $v(x_1, \ldots, x_n) = 1$, где $v \in F$. Переменные $x_i$ принимают значения в $G$. Множество решений некоторой системы уравнений $\{v_i(x_1, \ldots, x_n) = 1 \mid i \in I\}$ образует подмножество в аффинном пространстве $G^n$, такое подмножество называется *алгебраическим*. На $G^n$ определяется *топология Зарисского*: в качестве предбазы системы замкнутых множеств берутся все алгебраические множества. Известно, что топология Зарисского на $G^n$ при любом $n$ является нётеровой тогда и только тогда, когда группа $G$ *нётерова по уравнениям*. Последнее означает, что любая система уравнений над $G$ от ограниченного числа переменных эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме.

Вообще говоря, нельзя утверждать, что для бесконечной группы $G$ всё аффинное пространство $G^n$ будет неприводимым. Например, если рассмотреть произвольную неабелеву, но почти абелеву группу, то простран-

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00084.

ство $G^1$ приводимо. Действительно, в $G$ существует нецентральный элемент, централизатор которого $H$ (он задаётся одним уравнением) имеет конечный индекс, и тогда вся группа $G$ распадается в объединение правых смежных классов по $H$, каждый из которых является алгебраическим множеством.

В работе доказывается

**ТЕОРЕМА.** *Пусть нётерова по уравнениям группа $G$ локально аппроксимируется конечными $p$-группами для каждого простого $p$. Тогда для любого $n$ аффинное пространство $G^n$ неприводимо.*

В качестве следствия получается неприводимость пространства $G^n$ для свободной группы $G$ (доказано в [3]), произвольной нётеровой по уравнениям нильпотентной группы без кручения, свободной разрешимой и, более общо, жёсткой группы (доказано для метабелева случая в [4], для произвольного случая в [5]).

В § 2 будет внесено исправление в лемму о нормированиях на телах частных некоторых групповых колец, которая использовалась в работах [6–8].

## § 1. Доказательство теоремы

Для данной группы $G$ назовём *$G$-группой* любую группу, содержащую $G$ в качестве фиксированной подгруппы. В классе $G$-групп возникают естественные понятия $G$-подгруппы, $G$-гомоморфизма, $G$-изоморфизма, $G$-порождающего множества и т. п.

Пусть сначала группа $G$ является произвольной. Напомним, что координатная группа аффинного пространства $G^{n+1}$, обозначим её через $\Gamma(G^{n+1})$, является фактор-группой группы

$$G * \langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle = G * \langle x_1, \ldots, x_n\rangle * \langle y\rangle$$

по нормальной подгруппе, состоящей из всех $G$-тождеств от $x_1, \ldots, x_n, y$. Пусть $H = \Gamma(G^n)$, она соответственно является фактор-группой группы $G * \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

**ЛЕММА 1.** *Имеется естественный $G$-изоморфизм* $\Gamma(G^{n+1}) \cong \cong \Gamma(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x_1, \ldots, x_n, y) \in G * \langle x_1, \ldots, x_n\rangle * \langle y\rangle$ представляет единицу в $\Gamma(H)$. Это значит, что для любого $h(x_1, \ldots, x_n) \in \in H$ слово $v(x_1, \ldots, x_n, h)$ представляет единицу в $H$. Тогда

$$\forall g_1, \ldots, g_n \in H \ v(g_1, \ldots, g_n, h(g_1, \ldots, g_n)) = 1.$$

В качестве $h$ можно взять константу $h = g_{n+1}$. Получаем, что $v(x_1, \ldots, x_n, y)$ является $G$-тождеством, т. е. представляет единицу в $\Gamma(G^{n+1})$.

Наоборот, любое $G$-тождество $v(x_1, \ldots, x_n, y)$ даёт $H$-тождество от $y$, так как если вместо $y$ подставить любой элемент из $G * \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, то получается $G$-тождество от $x_1, \ldots, x_n$. Лемма доказана.

**ЛЕММА 2.** *Пусть группа $G$ нётерова по уравнениям и аффинное пространство $G^1$ приводимо. Тогда его неприводимые компоненты представляют из себя смежные классы по некоторой собственной характеристической подгруппе конечного индекса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = E_1 \cup \ldots \cup E_r$ — разложение на неприводимые компоненты и $r \geq 2$. Группа $G$, действуя правыми сдвигами, переставляет эти компоненты. Пусть $N$ — ядро соответствующего гомоморфизма $G$ в группу подстановок компонент, это нормальная подгруппа конечного индекса. Можно утверждать, что каждое $E_i$ является объединением нескольких смежных классов по $N$. Тогда таким является и любое пересечение вида $E = E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_s}$, если оно не пусто. Выберем $E$ с минимальным числом смежных классов. Можно также предполагать, что $1 \in E$. Для любого $x \in E$ пересечение $E \cap Ex$ непусто, а потому $E = Ex$. Следовательно, $E$ — подгруппа, а неприводимые компоненты будут в точности смежными классами по $E$. Очевидно, что $E$ — характеристическая подгруппа. Лемма доказана.

**ЛЕММА 3.** *Пусть группа $G$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда не существует уравнения от одной переменной с коэффициентами из $G$, множество решений которого в $G$ содержало бы (нормальную) подгруппу конечного индекса и не совпадало с $G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, такое уравнение $v(x) = 1$ найдется. Очевидно, что задача сводится к случаю конечно порождённой группы. Пусть $G \triangleright E$, $|G/E| = n$, $v(E) = 1$ и $v(g) \neq 1$. Для данного простого числа $p$ выберем гомоморфизм $\varphi : G \to P$ на конечную $p$-группу, такой что $v(g)\varphi \neq 1$. Тогда $E\varphi$ — собственная подгруппа в $P$, и значит $p$ делит $n$. Но простое число $p$ произвольно; противоречие. Лемма доказана.

**ЛЕММА 4** [1]**.** *Пусть группа $G$ нётерова по уравнениям. Конечно порождённая $G$-группа является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества над $G$ в том и только том случае, если она $G$-дискриминируется группой $G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. При $n = 1$ требуемое вытекает из лемм 2 и 3.

Пусть по индукции пространство $G^n$ неприводимо, докажем неприводимость $G^{n+1}$. Положим $H = \Gamma(G^n)$. По лемме 4 группа $H$ $G$-дискриминируется группой $G$, а значит вкладывается в декартову степень $G$. Из этого следует, что $H$ локально аппроксимируется конечными $p$-группами по всем простым $p$. Из лемм 2–4 вытекает, что пространство $H$ неприводимо и группа $\Gamma(H)$ $H$-дискриминируется группой $H$. Отсюда следует, что группа $\Gamma(G^{n+1})$, которая $G$-изоморфна $\Gamma(H)$ $G$-дискриминируется группой $G$, поэтому пространство $G^{n+1}$ неприводимо. Теорема доказана.

## § 2. Исправление леммы о нормированиях

В работе [6] содержится лемма о нормированиях на некоторых групповых кольцах и их телах частных, формулировка которой нуждается в исправлении. Эта лемма использовалась также в [7, 8]. Приведём правильную формулировку этой леммы, соответствующие определения см. в [6, 7].

**ЛЕММА** (о нормированиях)**.** *Пусть группа $C$ разлагается в полупрямое произведение $AB$, где $A$ — правоупорядочиваемая группа, $B$ — нормальная подгруппа, аппроксимируемая нильпотентными группами без* *кручения. Пусть*

$$B = B_1 \geqslant B_2 \geqslant \ldots -$$

*центральный сепарирующий ряд в* $B$ *с факторами без кручения, причём* $B_i \lhd C$. *Предположим, что групповое кольцо* $\mathbb{Z}C$ *является областью Оре. Тогда для фиксированного набора натуральных чисел* $\{\omega_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ *со свойством* $\omega_{i+1} > 2\omega_i$ *на кольце* $\mathbb{Z}C$ *существует нормирование* $\omega$ *со значениями в множестве* $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, *такое что*

$$\omega(u) \geq 1 \Leftrightarrow u \in (B-1)\mathbb{Z}C,$$

*и если* $b \in B_i \setminus B_{i+1}$, *то* $\omega(b-1) = \omega_i$. *Нормирование* $\omega$ *продолжается на (правое) тело частных* $Q(C)$ *по правилу* $\omega(uv^{-1}) = \omega(u) - \omega(v)$, *где* $u, v \in \mathbb{Z}C$. *При этом значения* $\omega$ *будут принадлежать* $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

*Пусть* $Q_m = \{f \in Q(C) \mid \omega(f) \geq m\}$ $(m \in \mathbb{Z})$. *Тогда* $Q_m \cdot Q_n \subseteq$ $\subseteq Q_{m+n}$, $Q_0$ *является кольцом, а* $Q_1$ *— его идеалом, причём канонический эпиморфизм* $\mathbb{Z}C \to \mathbb{Z}A$ *с ядром* $(B-1)\mathbb{Z}C$ *продолжается до эпиморфизма* $Q_0' \to Q(A)$ *с ядром* $Q_1$, *где* $Q_0' = Q(A) + Q_1 \leqslant Q_0$.

Эта формулировка отличается от старой двумя моментами.

1) В старой формулировке было указано условие $\omega_i + \omega_j < \omega_{i+j}$. Оно годится, если ряд имеет свойство $[B_i, B_j] \leqslant B_{i+j}$, таким будет, напр., нижний центральный изолированный ряд в $B$. В общем случае удобнее взять условие $\omega_{i+1} > 2\omega_i$. В применениях конкретный вид значений $\omega_i$ нами не используется.

2) В предыдущей версии леммы говорилось, что канонический эпиморфизм $\mathbb{Z}C \to \mathbb{Z}A$ с ядром $(B-1)\mathbb{Z}C$ продолжается до эпиморфизма $Q_0 \to Q(A)$ с ядром $Q_1$. Действительно, существует канонический эпиморфизм $Q_0$ на тело $Q_0/Q_1$, куда $Q(A)$ вкладывается, он продолжает $\mathbb{Z}C \to \mathbb{Z}A$. Однако неправильно утверждать, что образ эпиморфизма равен $Q(A)$, обоснование этого утверждения, приведённое при доказательстве леммы, было некорректным. Поэтому следует рассмотреть прообраз $Q(A)$, который равен $Q_0' = Q(A) + Q_1 \leqslant Q_0$, и в дальнейшем в упомянутых работах можно без проблем вместо $Q_0$, где потребуется, использовать $Q_0'$. Например, в работе [7] это касается доказательств лемм 11 и 13. Так

как рассматриваемое там кольцо $R$ содержится в $Q_0'$, то в доказательстве леммы 11 можно $Q_0$ заменить на $Q_0'$. То же самое можно сделать и в доказательстве леммы 13, т. к. элементы $u(X')^{-1}u_i(X')$ принадлежат $Q_0'$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov*, Algebraic geometry over groups. I: Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra, **219**, No. 1 (1999), 16—79.
2. *A. Myasnikov, V. Remeslennikov*, Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations, J. Algebra, **234**, No. 1 (2000), 225—276.
3. *G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov*, Discriminating completions of hyperbolic groups, Geom. Dedicata, **92** (2002), 115—143.
4. *В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский*, Неприводимые алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, **44**, № 5 (2005), 601—621.
5. *Н. С. Романовский*, Копроизведения жёстких групп, Алгебра и логика, **49**, № 6 (2010), 803—818.
6. *Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский*, Нётеровость по уравнениям некоторых разрешимых групп, Алгебра и логика, **46**, № 1 (2007), 46—59.
7. *Н. С. Романовский*, Нётеровость по уравнениям жёстких разрешимых групп, Алгебра и логика, **48**, № 2 (2009), 258—279.
8. *Н. С. Романовский*, Неприводимые алгебраические множества над делимыми распавшимися жёсткими группами, Алгебра и логика, **48**, № 6 (2009), 793—818.


Поступило 20 мая 2013 г.

Адрес автора:

РОМАНОВСКИЙ Николай Семёнович,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2,

г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ.

e-mail: rmnvski@math.nsc.ru