Б. И. Голубов, Интеграл Фурье и непрерывность функций ограниченной p-вариации, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, номер 11, 83–92

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 11 (78)

УДК 517.512

Б. И. Голубов

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ P-ВАРИАЦИИ

§ 1. Введение

В 1924 г. Н. Винер [1] (см. также [2], с. 205) доказал критерий непрерывности периодической функции ограниченной вариации. Позднее С. М. Лозинский [3], [4] получил другие критерии непрерывности периодической функции ограниченной вариации. Критерии Н. Винера и С. М. Лозинского были выражены в терминах коэффициентов Фурье данных функций. Недавно нами [5] было установлено, что эти критерии остаются в силе для функций ограниченной p-вариации в смысле Н. Винера [1] при $1 \leqslant p < 2$, но теряют силу при $p \geqslant 2$. В случае $p \geqslant 2$ условия Н. Винера и С. М. Лозинского, оставаясь достаточными, перестают быть необходимыми для непрерывности периодической функции ограниченной p-вариации.

С. М. Лозинский [4] показал, что полученные им и Винером результаты можно распространить на функции, имеющие ограниченную вариацию на всей числовой оси. Сформулируем результат С. М. Лозинского.

Пусть LV – класс функций, абсолютно интегрируемых и имеющих ограниченную вариацию на всей числовой оси. Предположим, кроме того, что функции класса LV удовлетворяют условию

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)], \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.1}$$

Положим

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iux} dx, \tag{1.2}$$

т. е. $F(u)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ (так как $f \in L(-\infty, +\infty)$, то $F(u)$ существует всюду и даже непрерывна).

Теорема Лозинского [4]. *Пусть $f \in LV$. Тогда следующие факты равносильны:*

1) $f(x)$ *непрерывна*; (1.3)

2) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} u\,|F(u)|\,du = 0; \tag{1.4}$$

3) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\log \lambda} \int\limits_0^{\lambda} |F(u)|\,du = 0; \tag{1.5}$$

$$4)\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt\right|^2 dx=0. \qquad (1.6)$$

Эта теорема допускает обобщение. Обозначим через $V_p\,(1\leqslant p<\infty)$ класс функций, имеющих ограниченную p-вариацию $V_p(f)$ на всей оси, т. е. $f\in V_p$, если

$$V_p(f)\equiv\sup_{-\infty<a<b<+\infty}\ \sup_T\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|^p\right\}^{1/p}<\infty, \qquad (1.7)$$

где $T=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,\ b]$.

Из результатов Н. Винера [1] следует, что если $f\in V_p$ $(1\leqslant p<\infty)$, то в каждой точке x существуют пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$. Условимся считать, что функции класса V_p удовлетворяют условию (1.1). Далее, через L_2V_p $(1\leqslant p<\infty)$ обозначим пересечение классов $L_2\,(-\infty,\ +\infty)$ и V_p. Равенство (1.2) для $f\in L_2(-\infty,\ +\infty)$ следует понимать как обычно, в смысле сходимости в среднем.

Теорема 1. *Пусть* $f\in L_2V_p$ $(1\leqslant p<\infty)$. а) *Если* $1\leqslant p<2$, *то условия* (1.3) — (1.6) *равносильны*. б) *Если же* $p\geqslant 2$, *то каждое из условий* (1.4) — (1.6) *влечет за собой непрерывность функции* $f(x)$.

В этой теореме, как частный случай $(p=1)$, содержится теорема С. М. Лозинского, поскольку имеет место очевидное включение

$$L_{q_1}V_p\subset L_{q_2}V_p\ \ (1\leqslant q_1<q_2<\infty,\ 1\leqslant p<\infty). \qquad (1.8)$$

Теорема 1 допускает следующее частичное обобщение. Обозначим через W класс функций, не имеющих разрывов второго рода ни на каком конечном отрезке и удовлетворяющих условию (1.1), через L_2W — пересечение классов $L_2\,(-\infty,\ +\infty)$ и W.

Теорема 2. *Если* $f\in L_2W$, *то каждое из условий* (1.4) — (1.6) *достаточно для непрерывности функции* $f(x)$.

Так как справедливо включение

$$V_p\subset W\ \ (1\leqslant p<\infty), \qquad (1.9)$$

то ясно, что теорема 2 является частичным обобщением теоремы 1.

С. М. Никольский [6] получил асимптотическую формулу для приближений периодических функций ограниченной вариации частными суммами их рядов Фурье в метрике L_p $(1<p<\infty)$. В работе [7] был получен следующий аналог этой формулы: если $f\in L_qV$ $(1<q\leqslant 2)$, то при $\lambda\to+\infty$

$$\|f-S_\lambda(f)\|_{L_q}=\frac{1}{\pi}\Big(\sum_k|\sigma_k|^q\Big)^{1/q}\frac{\nu_q}{\lambda^{1/q}}+o\Big(\frac{1}{\lambda^{1/q}}\Big), \qquad (1.10)$$

где

$$S_\lambda(f)\equiv S_\lambda(x,\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt, \qquad (1.11)$$

$$\nu_q=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^{+\infty}\frac{z\cos z+y\sin z}{z^2+y^2}e^{-y}dy\right|^q dz\right\}^{1/q}, \qquad (1.12)$$

а $\sigma_k = f(x_k+0) - f(x_k-0)$ — последовательность всех скачков функции $f(x)$.

Докажем следующее обобщение этого результата.

Теорема 3. *Формула* (1.10) *остается справедливой в случае* $f \in L_q V_p$, *где* $1 \leqslant p < q \leqslant 2$.

Следствие. *Если* $f \in L_q V_p$ $(1 \leqslant p < q \leqslant 2)$, *то для непрерывности функции* f *необходимо и достаточно условие* $\|f - S_\lambda(f)\|_{L_q} = o(\lambda^{-1/q})$ $(\lambda \to +\infty)$.

На основании следствия при $p=1$, $q=2$ имеют место утверждения 1) и 4) теоремы С. М. Лозинского. Следует отметить, однако, что в теореме С. М. Лозинского предполагалось $f \in LV$, а это условие в силу (1.8) более ограничительно, чем $f \in L_2 V$.

С помощью теоремы 3 устанавливается

Теорема 4. *Пусть* $f \in L_q V_p$. а) *Если* $1 \leqslant p < q \leqslant 2$, *то для непрерывности функции* $f(x)$ *необходимо и достаточно условие*[1]

$$\left(\int_\lambda^{+\infty} |F(u)|^{q'} du\right)^{1/q'} = o(\lambda^{-1/q}) \quad \left(\lambda \to +\infty, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right). \tag{1.13}$$

б) *Если* $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, *то условие* (1.13) *достаточно для непрерывности функции* $f(x)$[2].

Для $q=2$ это утверждение вытекает из теоремы 1.

Отметим, что в периодическом случае результат, аналогичный теореме 2, получен нами в работе [5], а аналоги теорем 3 и 4 — в работе [11].

§ 2. Вспомогательные предложения

Ниже приводится доказательство ряда лемм. Сначала оценим интегральный модуль непрерывности (в метрике L_p) функции $f \in V_p$, т. е. величину

$$\omega_p(\delta, f) \equiv \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{2.1}$$

Лемма 1[3]. *Если* $f \in V_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, *то*

$$\omega_p(\delta, f) \leqslant 3^{1/p} V_p(f)\, \delta^{1/p} \quad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $0 < h \leqslant \delta \leqslant 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |f(x+h) - f(x)|^p dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(y+k+h) - f(y+k)|^p dy.$$

[1] О том, как понимать равенство (1.2) при $1 < q \leqslant 2$, см. § 3, доказательство теоремы 4.

[2] $q' = \infty$ при $q=1$, а $\|g\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup} |g(t)|$.

[3] Для $f \in V_p$ на $[0, 1]$ ([8], лемма 2).

Пусть $i_0 \geqslant 0$ — наибольшее целое число такое, что $i_0 h \leqslant 1 - h$. Тогда на основании (1.7) получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = \int_0^h \sum_{i=0}^{i_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(ih+k+h+y) -$$

$$- f(ih+k+y)|^p\, dy + \int_{i_0 h}^{1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k+h+y) - f(k+y)|^p dy \leqslant 3V_p^p(f)\, h.$$

Отсюда легко следует (2.2). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что в лемме 1 необязательно предположение, что $f \in L_p(-\infty, +\infty)$.

Лемма 2. *Пусть функция* $g(x) \geqslant 0$ *и* $g \in L_2(0, +\infty)$. *Тогда условия*:

1) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \int_\lambda^{+\infty} [g(x)]^2 dx = 0;$$

2) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda x^2 [g(x)]^2\, dx = 0;$$

3) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda x g(x)\, dx = 0;$$

4) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\log \lambda} \int_0^\lambda g(x)\, dx = 0$$

— *связаны следующим образом*: 1) ⟹ 2) ⟹ 3) ⟹ 4) [1].

Доказательство. Пусть выполнено 1), т. е.

$$h(\lambda) \equiv \int_\lambda^{+\infty} [g(x)]^2 dx = o(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \to +\infty). \tag{2.3}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda x h(x)\, dx - \frac{1}{2\lambda} x^2 h(x) \Big|_0^\lambda = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda x^2 g^2(x)\, dx.$$

Из (2.3) следует, что левая часть этого равенства стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$, а это равносильно 2). Итак, 1) ⟹ 2). Далее, из неравенства Коши — Буняковского

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda x g(x)\, dx \leqslant \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda x^2 [g(x)]^2\, dx \right)^{1/2}$$

следует, что 2) ⟹ 3). Наконец, пусть выполнено 3). Тогда

$$u(\lambda) \equiv \int_1^\lambda x g(x)\, dx = o(\lambda) \quad (\lambda \to +\infty). \tag{2.4}$$

[1] Запись a) ⟹ b) означает, что условие a) влечет за собой условие b).

Интегрируя по частям, получим

$$\int_1^\lambda \frac{u(x)}{x^2}\,dx + \frac{u(x)}{x}\Big|_1^\lambda = \int_1^\lambda g(x)\,dx.$$

На основании (2.4) левая часть этого равенства при $\lambda \to +\infty$ имеет порядок $o(\log\lambda)$. Прибавляя к обеим частям равенства конечную величину $\int_0^1 g(x)\,dx$, получим

$$\int_0^\lambda g(x)\,dx = o(\log\lambda) \quad (\lambda \to +\infty),$$

т. е. условие 4). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $0 \leqslant g(x) \in L\ (0, +\infty)$.

Тогда из условия

$$\int_0^{+\infty} g(x)\sin^2 tx\,dx = o(t) \quad (t \to 0) \tag{2.5}$$

следует

$$\int_\lambda^{+\infty} g(x)\,dx = o(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \to +\infty). \tag{2.6}$$

Доказательство. Из условия (2.5) имеем

$$\int_0^{\lambda^{-1}} \left\{\int_0^{+\infty} g(x)\sin^2 tx\,dx\right\} dt = o(\lambda^{-2}) \quad (\lambda \to +\infty),$$

откуда следует, что

$$\int_{2\pi\lambda}^{+\infty} \frac{g(x)}{x}\left\{\int_0^{x/\lambda} \sin^2 z\,dz\right\} dx = o(\lambda^{-2}) \quad (\lambda \to +\infty). \tag{2.7}$$

Но так как $\sin^2(z+\pi) = \sin^2 z$, то

$$\int_0^{x/\lambda} \sin^2 z\,dz \geqslant C\frac{x}{\lambda} \quad (x/\lambda \geqslant 2\pi), \tag{2.8}$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная. Требуемое условие (2.6) вытекает теперь из (2.7) и (2.8). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{2}{\ln\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\lambda t}{t}\,dt = 1, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\ln\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(t)\,\frac{\sin^2\lambda t}{t}\,dt = 0,$$

где $\alpha(t) \in L\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha(t) \to 0$ $(t \to +0)$.

Эти равенства фактически известны ([9], с. 207, равенства (202) и (203)).

Лемма 5. *Если* $f \in L_2\ (-\infty, +\infty)$ *и в точке* x_0 *существуют пределы* $f(x_0 - 0)$ *и* $f(x_0 + 0)$, *то*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{J(\lambda, x_0)}{\ln\lambda} = \frac{1}{\pi}\{f(x_0+0) - f(x_0-0)\}, \tag{2.9}$$

где
$$J(\lambda, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \{f(x_0+t) - f(x_0-t)\} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\, dt.$$

Эта лемма является аналогом известной теоремы Лукача для тригонометрических рядов ([2], с. 127)[1].

Доказательство. Представим интеграл $J(\lambda, x_0)$ в виде

$$J(\lambda, x_0) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\right)\{f(x_0+t) - f(x_0-t)\} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\, dt =$$
$$= J_1(\lambda, x_0) + J_2(\lambda, x_0). \tag{2.10}$$

Для второго интеграла имеем оценку

$$|J_2(\lambda, x_0)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|f(x_0+t)| + |f(x_0-t)|}{t}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{\pi} \|f\|_{L_2(-\infty,\, +\infty)} \left\|\frac{1}{t}\right\|_{L_2\left(\frac{\pi}{2},\, +\infty\right)}, \tag{2.11}$$

т. е. интеграл $J_2(\lambda, x_0)$ равномерно ограничен относительно λ. Для интеграла $J_1(\lambda, x_0)$ согласно лемме 4 имеем

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{J_1(\lambda, x_0)}{\ln\lambda} = \frac{1}{\pi}\{f(x_0+0) - f(x_0-0)\}. \tag{2.12}$$

Требуемое равенство (2.9) вытекает теперь из (2.10)—(2.12). Лемма 5 доказана.

Доказанные леммы необходимы для доказательства теорем 1 и 2. Приведем группу лемм, необходимых для доказательства теоремы 3.

Лемма 6. *Если $f \in L_q V_p$ $(1 \leqslant p < q \leqslant 2)$, то*

$$\|f - S_\lambda(f)\|_{L_q} \leqslant C_q \omega_q\left(\frac{1}{\lambda},\, f\right), \tag{2.13}$$

где $S_\lambda(f)$ и $\omega_q\left(\frac{1}{\lambda}, f\right)$ определяются соответственно из формул (1.11) *и* (2.1).

В случае $1=p<q\leqslant 2$ эта лемма доказана в работе [7] (лемма 5). В общем случае, т. е. при $1 \leqslant p < q \leqslant 2$, доказательство совершенно аналогично, и мы его не приводим.

Лемма 7. *Если $f \in L_q V_p$ $(1 \leqslant p < q \leqslant 2)$, то*

$$\|f - S_\lambda(f)\|_{L_q} \leqslant C_q' [V_p(f)]^{p/q} \frac{\left[\omega\left(\frac{1}{\lambda},\, f\right)\right]^{1-p/q}}{\lambda^{1/q}} \quad (\lambda \geqslant 1), \tag{2.14}$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f, т. е.

$$\omega(\delta, f) = \sup_x \sup_{|h|\leqslant\delta} |f(x+h) - f(x)|.$$

[1] Лемма 5 вытекает из теоремы Лукача и той части теоремы (1.3) из [12] (с. 362), которая сформулирована без доказательства. Мы приводим краткое прямое доказательство леммы 5.

Доказательство. На основании леммы 6 справедливо неравенство (2.13). Оценим правую часть этого неравенства, пользуясь леммой 1:

$$\|f-S_\lambda(f)\|_{L_q} \leqslant C_q\omega_q\left(\frac{1}{\lambda}, f\right) = C_q \sup_{|h|\leqslant\frac{1}{\lambda}} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^q dx\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_q\left[\omega\left(\frac{1}{\lambda}, f\right)\right]^{1-p/q} \sup_{|h|\leqslant\frac{1}{\lambda}} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_q\left[\omega\left(\frac{1}{\lambda}, f\right)\right]^{1-p/q}\left[\omega_p\left(\frac{1}{\lambda}, f\right)\right]^{p/q} \leqslant$$

$$\leqslant 3^{1/q} C_q [V_p(f)]^{p/q} \frac{\left[\omega\left(\frac{1}{\lambda}, f\right)\right]^{1-p/q}}{\lambda^{1/q}} \quad (\lambda \geqslant 1).$$

Это и есть требуемое неравенство (2.14). Лемма 7 доказана. В периодическом случае при $1=p<q<\infty$ подобная лемма доказана С. Б. Стечкиным ([6], теорема 1), а при $1\leqslant p<q<\infty$ — нами ([11], лемма 3). В случае $1=p<q\leqslant 2$ эта лемма доказана в работе [7] (теорема 1).

Лемма 8. ([7], лемма 3). *Пусть*

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi(x+1-x_k),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x\in[0, 1], \\ 0, & x\overline{\in}[0, 1]. \end{cases}$$

Тогда, если $1<q\leqslant 2$, *то*

$$\|\psi - S_\lambda(\psi)\|_{L_q} = \frac{\left\{\sum\limits_{k=1}^{m} |\sigma_k|^q\right\}^{1/q}\nu_q}{\pi\lambda^{1/q}} + o(\lambda^{-1/q}) \quad (\lambda\to+\infty),$$

где ν_q *определяется формулой* (1.12).

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 2 условия (1.4) — (1.6) связаны следующим образом: (1.6) ==> (1.4) ==> (1.5). Достаточно установить, что условие (1.5) обеспечивает непрерывность функции $f(x)$. В самом деле, пусть $f\in L_2W$ и выполнено (1.5). Из условия (1.5), очевидно, имеем для произвольной точки x_0:

$$|J(\lambda, x_0)| = \left|\int_0^\lambda \left\{a(z)\sin x_0 z - b(z)\cos x_0 z\right\} dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\lambda (|a(z)|+|b(z)|)\,dz \leqslant \sqrt{2}\int_0^\lambda \{[a(z)]^2+[b(z)]^2\}^{1/2} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\lambda |F(z)|\,dz = o(\log\lambda) \quad (\lambda\to+\infty),$$

где $a(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt$, $b(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt$. На основании леммы 5 отсюда следует, что $f(x_0+0)-(f(x_0-0)=0$, а это вместе с условием (1.1) обеспечивает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. Но так как точка x_0 произвольна, то теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Так как справедливо включение (1.9), то из теоремы 2 следует, что каждое из условий (1.4) — (1.6) достаточно для непрерывности функции $f\in L_2V_p$ $(1\leqslant p<\infty)$.

Пусть теперь функция f непрерывна и $f\in L_2V_p$ $(1\leqslant p<2)$. На основании леммы 2 остается показать, что выполнено (1.6), так как из него следуют условия (1.4) и (1.5).

Сначала заметим, что если $f\in V_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ и непрерывна, то она равномерно непрерывна на $(-\infty,+\infty)$, т. е. $\omega(\delta,f)\to 0$ при $\delta\to+0$, где $\omega(\delta,f)$ — модуль непрерывности функции f. Поэтому на основании равенства Парсеваля и леммы 1 имеем

$$8\int\limits_{0}^{+\infty}|F(x)|^2\sin^2\frac{hx}{2}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|(f(x)-f(x+h)|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\omega^{2-p}(|h|,f)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-f(x+h)|^p dx\leqslant$$

$$\leqslant 3V_p^p(f)\,\omega^{2-p}(|h|,f)\,|h|=o(h)\quad(h\to 0),$$

если $f\in L_2V_p$ $(1\leqslant p<2)$ и непрерывна. На основании леммы 3 отсюда следует условие (1.6). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Оно аналогично случаю $1=p<q\leqslant 2$, рассмотренному в [7], и опирается на леммы 7 и 8. Итак, пусть $f\in L_qV_p$ $(1\leqslant p<q\leqslant 2)$. Возьмем $\varepsilon>0$ и выберем m так, чтобы

$$\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty}|\sigma_k|^q\Big)^{1/q}<\varepsilon. \tag{3.1}$$

После этого представим $f(x)$ в виде $f(x)=\psi(x)+h(x)$, где $\psi(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_k\varphi(x+1-x_k)$. Тогда колебание функции $h(x)$ в любой точке x, $-\infty<x<+\infty$, не превышает ε. Поэтому согласно лемме 7

$$\|h-S_\lambda(h)\|_{L_q}\leqslant C'_q[V_p(h)]^{p/q}\frac{(2\varepsilon)^{1-p/q}}{\lambda^{1/q}} \tag{3.2}$$

при $\lambda>\frac{1}{\delta}$, где $\delta=\delta(\varepsilon)$. Теперь на основании леммы 8 и неравенств (3.1) и (3.2) получаем формулу (1.10). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Уточним сначала, в каком смысле понимается формула (1.2). Если $f\in L_q$ $(1<q\leqslant 2)$, то, как показал Титчмарш ([10], с. 128), существует $F(x)\in L_{q'}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$,

для которой $\|F(x)-F(x,a)\|_{L_{q'}}\to 0$ при $a\to\infty$, где $F(x,a)= = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-ixt}dt$ [1].

Функция $F(x)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x)$ и записывается в виде формулы (1.2).

Приступим к доказательству теоремы 4. Пусть $f\in L_qV_p$ $(1\leqslant p<q\leqslant 2)$ и непрерывна. Пользуясь аналогом неравенства Хаусдорфа — Юнга для интегралов Фурье, установленным Титчмаршем ([10], с. 128), и опираясь на теорему 3, получим

$$\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{-\lambda}+\int\limits_{\lambda}^{+\infty}\right)|F(x)|^{q'}dx\right\}^{1/q'}\leqslant(2\pi)^{1/q'-1/2}\|f-S_\lambda(f)\|_{L_q}=o(\lambda^{-1/q})\ (\lambda\to+\infty).$$

Итак, условие (1.13) необходимо для непрерывности функции $f\in L_qV_p$ $(1\leqslant p<q\leqslant 2)$.

Пусть теперь $f\in L_qV_p$ $(1\leqslant p<\infty,\ 1\leqslant q\leqslant 2)$ и выполнено (1.13). Докажем непрерывность функции $f(x)$. Рассмотрим сначала случай $1<q\leqslant 2$, $1\leqslant p<\infty$. Условие (1.13) можно записать в виде

$$g(\lambda)\equiv\int\limits_{\lambda}^{+\infty}|F(x)|^{q'}dx=o(\lambda^{-q'/q})\ (\lambda\to+\infty).$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера и интегрируя по частям, имеем при $\lambda\to+\infty$

$$\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}x|F(x)|dx\right)^{q'}\leqslant\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}x^{q'}|F(x)|^{q'}dx=-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}x^{q'}dg(x)=$$

$$=-\frac{1}{\lambda}x^{q'}g(x)\Big|_0^{\lambda}+\frac{q'}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}x^{q'-1}g(x)\,dx=$$

$$=o\left(\frac{1}{\lambda}\lambda^{q'(1-1/q)}\right)+\frac{q'}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}o(x^{q'-1}x^{-q'/q})\,dx=$$

$$=o(1)+\frac{q'}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}o(1)\,dx=o(1).$$

Применяя теорему 1, заключаем, что $f(x)$ непрерывна.

Нам осталось рассмотреть случай $f\in L_qV_p$ $(q=1,\ 1\leqslant p<\infty)$. Но тогда условие (1.13) принимает вид $\operatorname*{ess\,sup}_{x\geqslant\lambda}|F(x)|=o(\lambda^{-1})$ $(\lambda\to+\infty)$, откуда снова следует

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}x|F(x)|dx=o(1)\ (\lambda\to+\infty),$$

и непрерывность функции $f(x)$ устанавливается ссылкой на условие (1.8) и теорему 1. Теорема 4 доказана.

г. Москва

Поступило
5 VI 1967

---

[1] Для $q=2$ — это известная теорема Планшереля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. Massachusetts J. Math., v. 3, 1924, p. 72—94.

2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.

3. Лозинский С. М. Об одной теореме N. Wiener'a. ДАН СССР, т. 49, № 8, 1945, с. 562—565.

4. Лозинский С. М. Об одной теореме N. Wiener'a, II. ДАН СССР, т. 53, № 8, 1946, с. 691—694.

5. Голубов Б. И. О непрерывных функциях ограниченной p-вариации. Матем. заметки, т. 1, № 3, 1967, с. 305—312.

6. Никольский С. М. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации. ИАН СССР. Сер. матем., т. 13, № 6, 1949, с. 513—532.

7. Гукевич В. О. Интеграл Фурье функций ограниченной вариации на всей оси. В сб.: Исслед. по соврем. пробл. конструктивн. теории функций. М., Физматгиз, 1961.

8. Голубов Б. И. О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара. ИАН СССР. Сер. матем., т. 28, № 6, 1964, с. 1271—1296.

9. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.

10. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье М., Гостехиздат, 1948.

11. Голубов Б И. О функциях ограниченной p-вариации. ИАН СССР. Сер. матем., т, 32, № 4, 1968, с. 837—858.

12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М., „Мир", 1965.

И. Ю. РЫЖАКОВ. О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматривается задача о нахождении в множестве вещественных тригонометрических полиномов порядка n с фиксированными коэффициентами a_n, b_n, a_{n-1} и b_{n-1} полинома, наименее уклоняющегося от нуля на $[0, 2\pi]$. Получена система уравнений первого порядка, позволяющая построить множество всех экстремальных полиномов этой задачи. Способ, которым выведены дифференциальные уравнения, представляет собою распространение метода Е. В. Вороновской на экстремальные задачи для тригонометрических полиномов. (Работа поступила в журнал „Математика" 5.III.1968.)

И. Ш. СЛАВУТСКИЙ. L-ФУНКЦИИ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВЕННОЕ КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛЕ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Вносится поправка в построение локальной L-функции Кубота-Леопольдта (J. reine und angew. Math., 1964, Bd. 214/215, S. 328—339). Для исправленной локальной L-функции доказывается p аналог формулы Дирихле для числа классов дивизоров вещественного квадратичного поля и необращение в нуль L-функции в точке $s=1$ с помощью сравнений, связывающих число классов дивизоров вещественного квадратичного поля и обобщенные числа Бернулли и полученных ранее А. А. Киселевым и автором данной статьи. (Тр 4-го Всесоюзн. математич. съезда, т. 2, 1964, с. 105—112). (Работа поступила в журнал „Математика" 6.II.1968.)

Е. Л. СТОЛОВ. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

(аннотация статьи, принятой к печати)

С помощью известной в спектральной теории операторов формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (-U(t) f, g)\, dt = ((\lambda E - A)^{-1} f, g),$$

где $U(t)$ — однопараметрическая группа унитарных операторов, а A — ее инфинитезимальный оператор, изучаются матричные элементы неприводимых представлений группы $SL(2, C)$. Получены преобразования Фурье и Лапласа от матричного элемента, а также старший член в асимптотике матричного элемента. (Работа поступила в журнал „Математика" 18. I. 1968.)