Р. Габасов, С. В. Чуракова, Одна задача оптимального управления в системах с последействием, *Дифференц. уравнения*, 1966, том 2, номер 10, 1289–1299

ОКТЯБРЬ 1966 г., ТОМ II, № 10

УДК 517.949

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Р. ГАБАСОВ, С. В. ЧУРАКОВА

Для системы с последействием рассматривается одна задача оптимального управления [1] с удержанием траектории в начале координат на конечном интервале времени. Такой подход к задаче обеспечивает сохранение заданного режима и в дальнейшем, если в конце интервала управление будет выключено.

Пусть движение объекта описывается дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом [2]:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-h) + C(t)\,u(t). \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный вектор, определенный в пространстве X; $u(t)$ — n-мерная кусочно-непрерывная вектор-функция управления, принадлежащая множеству допустимых управлений U; $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — непрерывные матричные функции, причем C неособенная матрица при всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$; h, $h > 0$, — постоянное число (запаздывание). Заданы начальные условия: вектор-функция $\varphi(t)$ со значениями в X, $x(t) \equiv \varphi(t)$ при $-h \leqslant t < 0$ и вектор $x^0 = x(0)$.

Задача 1. В классе допустимых управлений выбрать такое управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, чтобы траектория системы (1), соответствующая заданным начальным условиям и выбранному управлению $u(t)$, удовлетворяла условию:

$$x(t) \equiv 0, \quad T-h \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В пространстве X рассмотрим множество G векторов

$$e(T-h) = \int\limits_{-h}^{0} F(T-h,\ \tau+h)\,B(\tau+h)\,\varphi(\tau)\,d\tau + F(T-h,\ 0)\,x^0.$$

Здесь $F(t,\ \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (1), при условии

$$F(t,\ \tau) = \begin{cases} E, & \tau = t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

(E — единичная матрица). Множество G_1, $G_1 \subset G$, векторов $e(T-h)$, образованных с помощью таких функций $\varphi(t)$ и векторов x^0, для которых задача 1 имеет решение, назовем областью достижимости. Множество управлений $u(t)$, которые для области достижимости являются решением задачи 1, обозначим через U_1, $U_1 \subset U$. Можно показать, что множество G_1 выпукло (см. приложение). Пусть G_1 замкнуто.

Из уравнения (1) и условия (2) следует, что каждое управление $u(t)$, решающее задачу 1, на интервале $T-h\leqslant t\leqslant T$ имеет вид

$$u(t)=C^{-1}(t)\,B(t)\,x(t-h).$$

Теорема 1. *Для того чтобы для заданных x^0, $\varphi(t)$, T и h задача 1 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max_{\|g\|=1}\left\{\big(g,\ e(T-h)\big)+\min_{u\in U_1}\left(g,\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right)\right\}\leqslant 0, \qquad (3)$$

где g — произвольный вектор единичной нормы.

Доказательство проведем по схеме [3].

Необходимость. Имеется управление $u=u^*(t)$, $u^*\in U$, которое при заданных x^0, $\varphi(t)$, T и h обеспечивает выполнение условия (2).

Доказать: условие (3) выполнено.

По условию теоремы траектория, которая порождается управлением $u^*(t)$, в момент $t=T-h$ приходит в начало координат, т. е. $x(T-h)=0$, или

$$e(T-h)+\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u^*(\tau)\,d\tau=0.$$

Умножим скалярно все члены равенства на произвольный вектор g, $\|g\|=1$:

$$\big(g,\ e(T-h)\big)+\left(g,\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u^*(\tau)\,d\tau\right)=0.$$

Рассмотрим теперь функционал

$$P(u)=\big(g,\ e(T-h)\big)+\left(g,\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right)$$

на множестве функций $u(t)\in U_1$. Так как заданное управление $u^*(t)\in U_1$ и, кроме того, $P(u^*)=0$, то

$$\min P(u)=\big(g,\ e(T-h)\big)+\min_{u\in U_1}\left(g,\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right)\leqslant 0.$$

Но последнее неравенство выполнено для произвольного вектора g, $\|g\|=1$, следовательно,

$$\max_{\|g\|=1}\left\{\big(g,\ e(T-h)\big)+\min_{u\in U_1}\left(g,\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right)\right\}\leqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Дано: для заданных x^0, $\varphi(t)$, T и h выполнено условие (3).

Доказать: существует хотя бы одно управление $u(t)$, $u\in U$, обеспечивающее выполнение условия (2).

Предположим противное: не существует ни одного управления $u(t)$, $u\in U$, такого, чтобы для траектории, порожденной этим управлением, выполнялось условие (2). Это означает, что вектор $e(T-h)$ при заданных x^0 и $\varphi(t)$ не принадлежит области достижимости G_1. Тогда в силу выпуклости замкнутого множества G_1 существует такая гиперплоскость и вектор g^*, $\|g^*\|=1$, нормальный к этой гиперплоскости, что неравенство

$$\big(g^*,\ e(T-h)\big) > (g^*,\ e^*)$$

выполнено для всех $e^* \in G_1$.

Но так как e^* — точка области достижимости, то для нее существует такое управление $u^*(t)$, $u^* \in U_1$, что

$$e^* + \int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\, C(\tau)\, u^*(\tau)\, d\tau = 0.$$

Отсюда

$$e^* = -\int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\, C(\tau)\, u^*(\tau)\, d\tau.$$

Тогда

$$\big(g^*,\ e(T-h)\big) + \left(g^*, \int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\, C(\tau)\, u^*(\tau)\, d\tau\right) > 0.$$

Далее, поскольку e^* — произвольная точка множества G_1, то последнее неравенство выполнено для всех $u \in U_1$, поэтому

$$\big(g^*,\ e(T-h)\big) + \min_{u\in U_1}\left(g^*, \int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\, C(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right) > 0.$$

По условию теоремы для заданных x^0 и $\varphi(t)$ выполнено неравенство (3), что означает, что для любого вектора g, $\|g\|=1$, имеет место неравенство

$$\big(g,\ e(T-h)\big) + \min_{u\in U_1}\left(g, \int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\, C(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right) \leqslant 0.$$

Однако нам удалось построить вектор g^*, $\|g^*\|=1$, для которого выполнено неравенство противоположного смысла. Это противоречие и доказывает теорему.

В дальнейшем будем считать, что множество U допустимых управлений имеет вид

$$U = \left\{u\colon \int_0^{T} (u,\ u)\, dt \leqslant 1\right\}. \tag{4}$$

Условие (3) запишем в другой форме:

$$\max_{\|g\|=1} \left\{\big(g,\ e(T-h)\big) + \mu^0(g)\right\} \leqslant 0,$$

$$\mu^0(g) = \min_u \mu(g,\ u) = \min_u \left(g, \int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\, C(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right)$$

при условии

$$\int_0^{T-h} \big(u(t),\ u(t)\big)\,dt + \int_{T-h}^{T} \big(C^{-1}(t)\,B(t)\,x(t-h),\ C^{-1}(t)\,B(t)\,x(t-h)\big)\,dt \leqslant 1.$$

Преобразуем последнее неравенство, заменив $x(t-h)$ по формуле Коши [4]:

$$\int_0^{T-h} \big(u(t),\ u(t)\big)\,dt + \int_{T-h}^{T} \Big(C^{-1}(t)\,B(t)\Big[e(t-h) + \int_0^{t-h} F(t-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\Big],\ C^{-1}(t)\,B(t)\Big[e(t-h) + \int_0^{t-h} F(t-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\Big]\Big)\,dt \leqslant 1.$$

Раскрыв скобки во втором интеграле и изменив порядок интегрирования, получим

$$\int_0^{T-h} \big(u(\tau),\ u(\tau)\big)\,d\tau + N + 2\int_0^{T-h} \big(f(\tau),\ u(\tau)\big)\,d\tau + \int_0^{T-h} \Big(\int_0^{T-h} \Phi(\tau,\ \theta)\,u(\theta)\,d\theta,\ u(\tau)\Big)\,d\tau \leqslant 1.$$

Здесь

$$N = \int_{T-2h}^{T-h} \big(C^{-1}(t+h)\,B(t+h)\,e(t),\quad C^{-1}(t+h)\,B(t+h)\,e(t)\big)\,dt,$$

$$f(\tau) = \int_{T-2h}^{T-h} \big[C^{-1}(t+h)\,B(t+h)\,F(t,\ \tau)\,C(\tau)\big]^*\,C^{-1}(t+h)\,B(t+h)\,e(t)\,dt,$$

$$\Phi(\tau,\ \theta) = \int_{T-2h}^{T-h} \big[C^{-1}(t+h)\,B(t+h)\,F(t,\ \tau)\,C(\tau)\big]^* \times C^{-1}(t+h)\,B(t+h)\,F(t,\ \theta)\,C(\theta)\,dt.$$

Далее, вводя множитель Лагранжа, перейдем к задаче на безусловный экстремум. Будем искать минимум функционала $A(u)$:

$$\min A(u) = \min_u \Big\{\Big(g, \int_0^{T-h} F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\Big) + \lambda\Big[\int_0^{T-h} \big(u(\tau),\ u(\tau)\big)\,d\tau + N + 2\int_0^{T-h} \big(f(\tau),\ u(\tau)\big)\,d\tau + \int_0^{T-h} \Big(\int_0^{T-h} \Phi(\tau,\ \theta)\,u(\theta)\,d\theta,\ u(\tau)\Big)\,d\tau\Big]\Big\}.$$

Вычислим вариацию функционала

$$\delta A(u) = \frac{\partial A(u^* + \alpha v)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \int_0^{T-h} \Big(L(\tau) g + \lambda \Big[2u^*(\tau) + 2f(\tau) + $$

$$+ \int_0^{T-h} K(\tau, \theta) u^*(\theta) d\theta\Big], v(\tau)\Big) d\tau,$$

где

$$L(\tau) = [F(T-h, \tau) C(\tau)]^*, \quad K(\tau, \theta) = \Phi(\tau, \theta) + \Phi^*(\theta, \tau).$$

Так как вариация функционала $\delta A(u)$ должна быть равна нулю для любых значений вариации функции, то

$$L(\tau) g + \lambda \Big[2u^*(\tau) + 2f(\tau) + \int_0^{T-h} K(\tau, \theta) u^*(\theta) d\theta\Big] = 0.$$

Решение полученного интегрального уравнения можно представить в виде суммы двух решений

$$u^*(\tau) = u_1^*(\tau) + u_2^*(\tau) = u_1^*(\tau) + \frac{1}{\lambda} R(\tau) g,$$

причем вектор $u_1^*(\tau)$ и матрица $R(\tau)$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$2u_1^*(\tau) + 2f(\tau) + \int_0^{T-h} K(\tau, \theta) u_1^*(\theta) d\theta = 0 \tag{5}$$

и

$$2R(\tau) + L(\tau) + \int_0^{T-h} K(\tau, \theta) R(\theta) d\theta = 0. \tag{6}$$

Множитель λ найдем из условия, чтобы найденное управление принадлежало множеству U_1

$$\int_0^{T-h} \Big(u_1^*(\tau) + \frac{1}{\lambda} R(\tau) g, \; u_1^*(\tau) + \frac{1}{\lambda} R(\tau) g\Big) d\tau + N +$$

$$+ 2\int_0^{T-h} \Big(f(\tau), \; u_1^*(\tau) + \frac{1}{\lambda} R(\tau) g\Big) d\tau + \int_0^{T-h} \Big(\int_0^{T-h} \Phi(\tau, \theta) \Big[u_1^*(\theta) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} R(\theta) g\Big] d\theta, \; u_1^*(\tau) + \frac{1}{\lambda} R(\tau) g\Big) d\tau = 1.$$

Отсюда для λ получаем алгебраическое уравнение

$$a \frac{1}{\lambda^2} + 2b \frac{1}{\lambda} + c = 0. \tag{7}$$

Здесь

$$a=\int\limits_0^{T-h}\Big(R(\tau)g,\ R(\tau)g\Big)d\tau+\int\limits_0^{T-h}\Big(\int\limits_0^{T-h}\Phi(\tau,\ \theta)R(\theta)g\,d\theta,\ R(\tau)g\Big)d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{T-h}(L(\tau),\ R(\tau)g)\,d\tau,$$

$$b=\int\limits_0^{T-h}(u_1^*(\tau),\ R(\tau)g)\,d\tau+\int\limits_0^{T-h}(f(\tau),\ R(\tau)g)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{T-h}\Big(\int\limits_0^{T-h}K(\tau,\ \theta)\,u_1^*(\theta)\,d\theta,\ R(\tau)g\Big)d\tau=0,$$

$$c=\int\limits_0^{T-h}\big(u_1^*(\tau),\ u_1^*(\tau)\big)\,d\tau+N+2\int\limits_0^{T-h}\big(f(\tau),\ u_1^*(\tau)\big)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{T-h}\Big(\int\limits_0^{T-h}\Phi(\tau,\ \theta)\,u_1^*(\theta)\,d\theta,\ u_1^*(\tau)\Big)d\tau-1=N-1+\int\limits_0^{T-h}\big(f(\tau),\ u_1^*(\tau)\big)\,d\tau.$$

Из двух корней уравнения (7) конечный минимум функционалу $A(u)$ всегда доставляет положительный корень.

Итак, условие (3) для множества допустимых управлений (4) имеет вид

$$\max_{\|g\|=1}\Big\{\big(g,\ e(T-h)\big)+\Big(g,\int\limits_0^{T-h}F(T-h,\ \tau)\,C(\tau)\,u^*(\tau,\ g)\,d\tau\Big)\Big\}\leqslant 0 \qquad (8)$$

или короче

$$\max_{\|g\|=1}\Psi(g,\ T)\leqslant 0.$$

Здесь

$$u^*(\tau,\ g)=u_1^*(\tau)+\frac{1}{\lambda}R(\tau)g,$$

причем $u_1^*(\tau)$ и $R(\tau)$ — решения интегральных уравнений (5) и (6), а λ — положительный корень уравнения (7).

Задача 2. В классе допустимых управлений найти управление $u^0(t)$, которое при заданных x^0, $\varphi(t)$ и h решает задачу 1 за минимальное время.

Управление $u^0(t)$ будем называть оптимальным, а время T^0 переходного процесса, соответствующего этому управлению, будем называть временем быстродействия.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Время быстродействия T^0 является наименьшим числом, для которого выполнено неравенство* (8). *Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется следующим образом:*

$$u^0(t)=\begin{cases}u^*(t,\ g^0), & 0\leqslant t\leqslant T^0-h,\\ C^{-1}(t)\,B(t)\,x(t-h), & T^0-h\leqslant t\leqslant T^0,\end{cases}$$

где g^0 — элемент, на котором достигается максимум функции $\Psi(g,\ T^0)$.

Пример:

$$\dot{x}(t) = -x(t-1) + u(t), \tag{9}$$

$$\varphi(t) \equiv 0, \quad -1 \leqslant t < 0, \quad x(0) = 10, \quad T = 3,$$

$$\int_0^3 u^2(t)\,dt \leqslant M.$$

Для упрощения вычислений вместо задачи быстродействия рассмотрим другую задачу, непосредственно связанную с первой.

Найти такое управление из класса допустимых, чтобы траектория, соответствующая заданным начальным условиям и выбранному управлению, удовлетворяла условию $x(t) \equiv 0$, $2 \leqslant t \leqslant 3$, а функционал $\int_0^3 u^2(t)\,dt$ достигал минимума.

Решение уравнения (9):

$$x(t) = 10 + \int_0^t u(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$x(t) = -10t + 20 + \int_0^{t-1} (-t+\tau+2)\,u(\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^t u(\tau)\,d\tau, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2;$$

$$x(t) = 5\left[(t-3)^2 - 1\right] + \frac{1}{2}\int_0^{t-2} \left[(t-\tau-3)^2 - 1\right] u(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t-2}^{t-1} (-t+\tau+2)\,u(\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^t u(\tau)\,d\tau, \quad 2 \leqslant t \leqslant 3.$$

Интегральное уравнение для определения $u(\tau, g)$ имеет вид

$$L(\tau)\,g + \lambda\left[2u(\tau) + 2f(\tau) + \int_0^2 K(\tau, \theta)\,u(\theta)\,d\theta\right] = 0,$$

где

$$L(\tau) = \begin{cases} \tau, & 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant \tau \leqslant 2; \end{cases}$$

$$f(\tau) = \begin{cases} \dfrac{10}{6}\tau^3 - 5\tau^2 + 5\tau + \dfrac{20}{6}; & 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ 5\tau^2 - 20\tau + 20, & 1 \leqslant \tau \leqslant 2; \end{cases}$$

$$K(\tau, \theta) = \Phi(\tau, \theta) + \Phi(\theta, \tau), \quad \Phi(\tau, \theta) = \begin{cases} \Phi_1(\tau, \theta), & 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ \Phi_2(\tau, \theta), & 1 \leqslant \tau \leqslant 2; \end{cases}$$

$$\Phi_1(\tau, \theta) = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2}\tau^2 + \dfrac{3}{2}\right)\theta + \dfrac{1}{6}\tau^3 - \dfrac{1}{2}\tau + \dfrac{1}{3}, & 0 \leqslant \theta \leqslant \tau, \\ \dfrac{1}{6}\theta^3 - \left(\dfrac{1}{2}\tau + 1\right)\theta^2 + \left(2\tau + \dfrac{3}{2}\right)\theta - \tau^2 - \dfrac{1}{2}\tau + \dfrac{1}{3}, \\ \qquad \tau \leqslant \theta \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\Phi_1(\tau,\ \theta)=\begin{cases}-\theta-\tau^2+\tau+2, & 1\leqslant\theta\leqslant\tau+1,\\ \theta^2-(2\tau+4)\theta+4\tau+4, & \tau+1\leqslant\theta\leqslant 2;\end{cases}$$

$$\Phi_2(\tau,\ \theta)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\theta\leqslant\tau-1,\\ \theta-\tau+1, & \tau-1\leqslant\theta\leqslant 1,\\ 2-\tau, & 1\leqslant\theta\leqslant\tau,\\ 2-\theta, & \tau\leqslant\theta\leqslant 2.\end{cases}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$u(\tau)=\frac{g}{\lambda}u_1(\tau)+u_2(\tau).$$

После соответствующих вычислений получим

$$u_1(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left[(\sqrt{3}A_1-A_2)\sin\frac{\tau}{2}-(A_1+\sqrt{3}A_2)\cos\frac{\tau}{2}\right]-\\ \quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left[(\sqrt{3}A_3+A_4)\sin\frac{\tau}{2}+(A_3-\right.\\ \quad \left.-\sqrt{3}A_4)\cos\frac{\tau}{2}\right]+A_5, \quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,\\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-1)}\left(A_1\sin\frac{\tau-1}{2}-A_2\cos\frac{\tau-1}{2}\right)+\\ \quad +e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-1)}\left(A_3\sin\frac{\tau-1}{2}-A_4\cos\frac{\tau-1}{2}\right), \quad 1\leqslant\tau\leqslant 2;\end{cases}$$

$$u_2(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left[(\sqrt{3}B_1-B_2)\sin\frac{\tau}{2}-(B_1+\sqrt{3}B_2)\cos\frac{\tau}{2}\right]-\\ \quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left[(\sqrt{3}B_3+B_4)\sin\frac{\tau}{2}+(B_3-\right.\\ \quad \left.-\sqrt{3}B_4)\cos\frac{\tau}{2}\right]+B_5, \quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,\\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-1)}\left(B_1\sin\frac{\tau-1}{2}-B_2\cos\frac{\tau-1}{2}\right)+\\ \quad +e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-1)}\left(B_3\sin\frac{\tau-1}{2}-B_4\cos\frac{\tau-1}{2}\right), \quad 1\leqslant\tau\leqslant 2.\end{cases}$$

Здесь $A_5=B_5=0$, а остальные коэффициенты A_i и B_i, $i=1, 2, 3, 4$, удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)A_1+\left[2-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]A_2-$$
$$-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)A_3+\left[2-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]A_4=0;$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}\right)A_1+\left(\frac{1}{2}-2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{1}{2}\right)A_2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\right.$$
$$\left.-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}\right)A_3+\left(\frac{1}{2}-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{1}{2}\right)A_4=-1;$$

$$\left[1-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]A_1-\left[\sqrt{3}-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cos\frac{1}{2}\right)\right]A_2+\left[1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]A_3+$$
$$+\left[\sqrt{3}-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)\right]A_4=0;$$

$$\sqrt{3}A_1+A_2-\sqrt{3}A_3+A_4=0;$$

$$e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)B_1+\left[2-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]B_2-$$
$$-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)B_3+\left[2-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]B_4=-\frac{20}{3};$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}\right)B_1+\left(\frac{1}{2}-2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{1}{2}\right)B_2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\right.$$
$$\left.-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}\right)B_3+\left(\frac{1}{2}-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{1}{2}\right)B_4=-10;$$

$$\left[1-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]B_1-\left[\sqrt{3}-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cos\frac{1}{2}\right)\right]B_2+\left[1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\right)\right]B_3+$$

$$+\left[\sqrt{3}-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)\right]B_4=10;$$

$$\sqrt{3}B_1+B_2-\sqrt{3}B_3+B_4=-\frac{10}{3}.$$

Уравнение для множителя λ имеет вид

$$a\left(\frac{g}{\lambda}\right)^2+2b\left(\frac{g}{\lambda}\right)+c=0,$$

$$a\approx 0{,}3273;\quad b=0;\quad c=-71{,}6011-M.$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^0(\tau)=\begin{cases} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(2{,}6521\sin\frac{\tau}{2}-2{,}5115\cos\frac{\tau}{2}\right)-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(2{,}3118\sin\frac{\tau}{2}+\right. \\ \qquad\left.+4{,}6325\cos\frac{\tau}{2}\right),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1; \\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(1{,}1407\sin\frac{\tau}{2}-1{,}0301\cos\frac{\tau}{2}\right)+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(12{,}2625\sin\frac{\tau}{2}+\right. \\ \qquad\left.+1{,}0359\cos\frac{\tau}{2}\right),\quad 1\leqslant\tau\leqslant 2; \\ e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(0{,}4901\sin\frac{\tau}{2}-0{,}4219\cos\frac{\tau}{2}\right)-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\tau}\left(17{,}2647\sin\frac{\tau}{2}-\right. \\ \qquad\left.-23{,}6179\cos\frac{\tau}{2}\right)-8{,}3334\tau+19{,}9980,\quad 2\leqslant\tau\leqslant 3. \end{cases}$$

Приложение. Доказательство выпуклости множества G_1. По определению множества G_1, если $e(t)\in G_1$, то для него найдется такое $u(t)\in U_1$, что $x(t)\equiv 0$ при $T-h\leqslant t\leqslant T$, где

$$x(t)=e(t)+\int_0^t F(t,\tau)C(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим два элемента множества G_1: $e_1(t)$ и $e_2(t)$ и соответствующие им управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Покажем, что элемент $e(t)=\alpha e_1(t)+(1-\alpha)e_2(t)$, $0<\alpha<1$, также принадлежит множеству G_1, причем соответствующее ему управление, обеспечивающее выполнение условия (2), имеет вид

$$u(t)=\alpha u_1(t)+(1-\alpha)u_2(t).$$

Действительно,

$$x(t)=e(t)+\int_0^t F(t,\ \tau)C(\tau)u(\tau)\,d\tau=\alpha\left[e_1(t)+\int_0^t F(t,\ \tau)C(\tau)u_1(\tau)\,d\tau\right]+$$

$$+(1-\alpha)\left[e_2(t)+\int_0^t F(t,\ \tau)C(\tau)u_2(\tau)\,d\tau\right]=\alpha x_1(t)+(1-\alpha)x_2(t).$$

Но так как $x_1(t)\equiv 0$ и $x_2(t)\equiv 0$ при $T-h\leqslant t\leqslant T$, то и $x(t)\equiv 0$ при $T-h\leqslant t\leqslant T$. Выпуклость множества G_1 доказана.

В заключение авторы выражают благодарность Ф. М. Кирилловой за полезные обсуждения.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.

2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Гостехиздат, 1951.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. О решении некоторых задач теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, 25, № 7, 1964.

4. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию
30 ноября 1965 г.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова