A. A. Rumyantsev, A. G. Chirkov, NON-ADIABATIC EFFECTS OF ACCELERATION OF PARTICLES BY THE MGD SHOCK TURBULENCE, *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 1983, Volume 53, Issue 7, 1261–1267

НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ МГД УДАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

А. А. Румянцев, А. Г. Чирков

Рассмотрено ускорение частиц на хаотически распределенных фронтах МГД ударных волн при сверхзвуковой турбулентности. Показано, что темп набора энергии быстрой частицей пропорционален первой степени изменения магнитного поля на фронтах. При этом с избытком компенсируется потеря энергии в волнах разряжения и при адиабатическом охлаждении газа за фронтами. Выполнен последовательный расчет диффузии частиц на мелкомасштабных флуктуациях между фронтами и показано, что эти флуктуации не могут увеличить средний темп набора энергии на фронтах ударных волн.

Ударные волны являются предельной формой нелинейных движений в сплошной среде. Их исследование в физическом аспекте занимает все более значительное место. Шире стало применяться и понятие ударной турбулентности, введенное еще Гейзенбергом и Чандрасекаром (см., например, [1]). При рассмотрении процессов, происходящих в «лабораторной» плазме в экстремально неравновесных условиях [2], в космической среде, окружающей взрывные источники [1], и при излучении ударных волн в ударных трубах [3], намечается четкая тенденция, диктуемая экспериментами и наблюдениями, к анализу того класса движений, который связан с МГД ударной турбулентностью.

В случае движения ударных волн в магнитном полё в проводящей среде за фронтами этих волн создается электрическое поле, ускоряющее заряженные частицы. Идея ускорения в случае уединенных МГД ударных волн была предложена ранее (см., например, [4]). Рассматривались ударные волны, движущиеся поперек силовых линий магнитного поля. Было показано [5], что переход частицы через фронт происходит с сохранением адиабатического инварианта $p_\perp^2/H=J$. Но такое же сохранение заведомо имеет место в волнах разрежения, следующих за фронтами, линейные размеры которых превышают ларморов радиус частицы. Поэтому нет избыточного ускорения на фронте, нескомпенсированного торможением в волне разрежения. Однако подобная «симметрия» не имеет место в случае наклонных по отношению к магнитному полю фронтов.

Среднее изменение «инварианта» оказывается положительным для частиц, встречающих и догоняющих фронт. На фронте МГД ударной волны появляется избыточное, пропорциональное ΔI ускорение, которое уже не компенсируется адиабатическим охлаждением в волнах разрежения. Неадиабатические эффекты в движении заряженных частиц в переменных электромагнитных полях рассматривались и ранее [6], однако на наклонных фронтах ударных волн эти эффекты наиболее выражены. Именно они приводят к темпу ускорения первого порядка по отношению $\Delta H/H$, где ΔH — скачок поля на фронте, в случае ансамбля хаотически распределенных ударных волн. Иными словами, темп ускорения пропорционален V_g/v (где $V_g=u\Delta H/H$ — скорость газа за фронтом; $v \gg u$; v, u — соответственно скорость частицы и фронта), а не $(V_g/v)^2$, как это имеет место в механизме Ферми. Ансамбль ударных фронтов приводит к более быстрому изменению энергии ускоряемых частиц.

Далее мы покажем, что наличие мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля между фронтами, уменьшающее длину пробега частицы, приводит к ее многократному возвращению на фронт, который она пересекла, но не приводит к увеличению скорости роста энергии.

1. Ускорение на фронте

Рассмотрим ударную волну, распространяющуюся в направлении оси x. Пусть магнитное поле ориентировано в плоскости XOZ так, что его x-компонента (непрерывная на фронте) $H_x=H\cos\alpha<0$ и $H_z=H\sin\alpha>0$. Пусть фронт движется со скоростью u, скорость газа соответственно перед и за фронтом равна $u_1=0$ и $u_2=u_g$ (система C). Для простоты мы ограничимся рассмотрением слабой ударной волны; принципиальные результаты будут получены в этом случае, а экстраполяция на случай сильной ударной волны не представляет особых затруднений. В соответствии с этим мы положим $H_{zz}=H_{1z}+\Delta H_z$, $u_g=u\,\Delta H_z/H_z$, изменение угла наклона магнитной силовой линии находится из условия непрерывности нормальной компоненты поля: $(\Delta H+H)\times\cos(\alpha+\Delta\alpha)=H\cos\alpha$, это дает $\Delta\alpha=\Delta H/H\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\Delta H_z=\Delta H/\sin\alpha$ [7]. Движение проводящей среды за фронтом приводит к появлению электрического поля $E=E_y=-1/c\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{H}_2)_y\approx u\,\Delta H_z/c$.

Вычисление будет удобно производить в системе отсчета C_0, в которой отсутствует повсюду электрическое поле. Эта система движется по отношению к системе отсчета C неподвижной плазмы перед фронтом со скоростью, направленной против поля, а ее компоненты $u_{x0}=u$, $u_{z0}=-u\,\mathrm{tg}\,\alpha$. В этой системе газ по обе стороны от фронта движется вдоль магнитных силовых линий; она существует при условии $u<c\,|\cos\alpha|$.

Пусть частица пересекает фронт, так что в системе C_0 центр ларморового кружка движется в направлении поперек магнитного поля со скоростью $w=|v_\parallel\cos\alpha+u|/\sin\alpha$. Тогда время, за которое ларморова орбита пересекает фронт, равно $2\,r/w$, где $r=cp_\perp/eH$ — радиус ларморовой орбиты. При этом число пересечений фронта равно $\nu\approx\mathrm{tg}\,\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha/\pi\sim1$ при $u/|v_\parallel\cos\alpha|\ll1$.

При каждом пересечении заряженной частицей фронта величина импульса не изменится, но изменятся компоненты $p_\parallel$ и $p_\perp$: $\delta p_\parallel=p_{\parallel2}-p_{\parallel1}=-p_\perp\Delta\alpha\sin\varphi$. В системе C_0 при этом энергия не меняется, следовательно, $\delta p_\perp=-p_\parallel\delta p_\parallel/p_\perp=p_\parallel\Delta\alpha\sin\varphi$, где φ — так называемая фаза влета, т. е. угол между $p_\perp$ и осью y в момент пересечения частицей фронта. При переходах $1\to2$ и $2\to1$ соответственно фаза влета заключена в пределах $0\leqslant\varphi<\pi$ и $\pi\leqslant\varphi<2\pi$. При движении ларморового центра в направлении силовой линии угол ϑ острый, а при движении в обратном направлении $\vartheta\to\pi/2+\vartheta$. Обозначим $\Delta p_\parallel$, $\Delta p_\perp$ полные изменения продольной и поперечной по отношению к магнитному полю компонент импульса, обусловленные всеми пересечениями фронта частицей при ее прохождении из области 1 в область 2 (или обратно), т. е. встречному (догоняющему) столкновению ее с фронтом. В системе C изменение энергии $\Delta\varepsilon=u_0\Delta p=u_{0\parallel}\Delta p_\parallel+O(\Delta\alpha^2)\approx-u\Delta p_\parallel/\cos\alpha$. С другой стороны, в системе C_0 имеет место соотношение $\Delta p_\parallel=-p_\perp\Delta p_\perp/p_\parallel$. Введем адиабатический инвариант частицы $J=p_\perp^2/H$, ниже мы покажем, что на фронте в общем случае произвольных угловых переменных $\Delta J=J_2-J_1\neq0$, более того, $\Delta J\gg0$. Воспользуемся тождеством $\Delta p_\perp=(H\Delta J+J\Delta H)/2p_\perp$, следовательно,

$$\Delta\varepsilon=(u/2p_\parallel\cos\alpha)(H\Delta J+J\Delta H). \tag{1}$$

2. Расчет изменения адиабатического инварианта на фронте

Нетрудно видеть, что с точностью до малых величин порядка u^2/c^2 величина адиабатического инварианта в обеих системах C, C_0 одинакова. Поэтому изменение ΔJ удобно вычислять в системе, где электрическое поле отсутствует, т. е. в системе C_0. Сначала обратимся к случаю большого числа оборотов $\nu\gg1$ ($\mathrm{tg}\,\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha\gg\pi$) на фронте. За один полный оборот изменение продольной компоненты импульса удваивается и равно $2\delta p_\parallel=-2p_\perp\Delta\alpha\sin\varphi$ (при переходе $1\to2$ $\sin\varphi>0$, $\Delta H>0$, $\Delta\alpha>0$; при переходе же $2\to1$ $\sin\varphi<0$, но и $\Delta H<0$, $\Delta\alpha<0$). Соответственно изменение поперечной компоненты импульса $2\,\delta p_\perp\equiv dp_\perp/dh=2\delta\sqrt{p^2-p_\parallel^2}=2p_\perp\Delta H\sin\varphi/H\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где n — число оборотов, $dn=1$. Смещение за оборот сечения фронтом ларморового кружка по отношению к ларморову центру определяется из уравнения

$$r(\delta\cos\varphi)=v_\parallel\cos\vartheta\,(1-\delta\varphi/2\pi)\cdot2\pi/\omega_H\sin\alpha,$$

откуда

$$d\varphi/dh = 2\pi(\sin\varphi \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\alpha)^{-1}/(1 + \operatorname{cosec}\varphi \operatorname{ctg}\vartheta \operatorname{ctg}\alpha). \quad (2)$$

Комбинируя последние соотношения, найдем

$$dp_{\perp}/d\varphi = (p_{\perp}\Delta H \sin^2\varphi/\pi H)(1 + \operatorname{cosec}\varphi \operatorname{ctg}\vartheta \operatorname{ctg}\alpha)$$

Следовательно, полное изменение компоненты

$$\Delta p_{\perp} = \int_0^{\pi} \frac{dp_{\perp}}{d\varphi} d\varphi = \frac{p_{\perp}\Delta H}{2H}\left(1 + \frac{4}{\pi \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\alpha}\right),$$

откуда, с нашей точностью,

$$\Delta J = \frac{(p_{\perp} + \Delta p_{\perp})^2}{H + \Delta H} - \frac{p_{\perp}^2}{H} = \frac{4}{\pi} J \frac{\Delta H}{H} \operatorname{ctg}\vartheta \operatorname{ctg}\alpha. \quad (3)$$

Эта величина всегда положительна на фронте. Действительно, если столкновение встречное, угол ϑ острый, $\Delta H > 0$; если столкновение догоняющее фронт, то угол ϑ тупой, $\Delta H < 0$. Если изменим знак $\operatorname{ctg}\alpha$ (например, при обращении силовых линий магнитного поля), то изменится, очевидно, и знак $\operatorname{ctg}\vartheta$ при встречном столкновении.

Рассмотрим случай малого числа пересечений $\nu \sim 1$ или $\operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\alpha \ll \pi$. При пересечении фронта

$$\delta J = J\frac{\Delta H}{H}(2 \operatorname{ctg}\vartheta \operatorname{ctg}\alpha \sin\varphi - 1)$$

и может быть знакопеременно. Поэтому целесообразно произвести усреднение по фазам влета и встречным и догоняющим столкновениям с фронтом. Фазы влета можно определить из уравнения траектории частицы. В проекции на плоскость XOY имеем уравнение трохоиды в параметрической форме

$$x = r \sin\alpha \cos\xi + \frac{v_{\parallel}\cos\alpha}{\omega_H}(\varphi_0 - \xi), \quad y = r\sin\xi; \quad r = cp_{\perp}/eH; \quad \xi = \omega_H t + \varphi_0. \quad (4)$$

Пусть частица встречает фронт в момент t, когда координата фронта $x = 0$; такой выбор сделан лишь для удобства вычислений и, как нетрудно видеть, не влияет на конечный результат. Тогда, полагая в (4) $x = 0$, путем итераций находим фазу влета

$$\xi \equiv \varphi = \varphi_0 + \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\alpha \cos\varphi_0 + O(\operatorname{tg}^2\vartheta \operatorname{tg}^2\alpha).$$

Подставляя найденную фазу в уравнение (3) и производя указанное выше усреднение, найдем

$$\Delta J = \overline{\delta J(\varphi_0, \Delta H)} \approx J(\Delta H/H). \quad (5)$$

Изменение инварианта, следовательно, можно интерполировать следующей формулой:

$$\Delta J(\vartheta, \alpha) = J\frac{\Delta H}{H}\begin{cases} 1, & \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\alpha < \pi, \\ \frac{4}{\pi}\operatorname{ctg}\vartheta \operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\alpha > \pi. \end{cases} \quad (6)$$

В Приложении эта формула подтверждена в конкретной модели профиля электрического поля за ударными фронтами. Мы приходим к выводу, что положительный эффект ускорения на ударных фронтах сохраняется и при учете волн разрежения.

Согласно (1), приобретение энергии частицы на фронте определяется двумя положительными слагаемыми: сверхадиабатическим, пропорциональным изменению инварианта ΔJ, и адиабатическим, которое соответствует $\Delta J = 0$. Последнее слагаемое можно получить из адиабатической теории движения частицы, вводя формально $\operatorname{div} \mathbf{u}_D = u_{Dx}\delta(x)$, где $x = 0$ — координата рассматриваемого фронта, u_D равно компоненте дрейфовой скорости частицы, поперечной к магнитному полю. На фронте $\mathbf{u}_{Dx}=c\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/H^2=\mathbf{u}\,\Delta H/H$. Воспользовавшись известным соотношением [6] для темпа роста энергии частицы в адиабатической области, а именно формулой

$$(d\varepsilon/dt)_{\text{ад}}=-(mv_\perp^2/2)\operatorname{div}\mathbf{u}_D, \qquad (7)$$

найдем в нашем приближении ($u\ll|v_x|$) на фронте

$$\Delta\varepsilon_{\text{ад}}=\int\limits_{x=-0}^{x=+0}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{ад}}\frac{dx}{v_x}=\frac{uJ\Delta H}{2\,|v_x|},$$

что совпадает, как и должно быть, с адиабатическим вкладом в (1). Однако формула (7) пригодна для описания полного изменения энергии в области волны разрежения, так как в этой области ларморов радиус частицы меньше характерного линейного размера, т. е. расстояния между фронтами. В среднем по ансамблю волн $(d\varepsilon/dt)_{\text{ад}}\sim\overline{\operatorname{div}\mathbf{u}_D}=0$ и адиабатический вклад в энергию на фронтах и волнах разрежения оказывается скомпенсированным, тогда как сверхадиабический вклад на каждом фронте положителен для любого пересечения фронта частицей. Подчеркнем, что эти выводы не зависят от конкретного хода поля в волнах разрежения, лишь бы скорость газа в этих волнах изменялась плавно и возвращалась к исходному равновесному значению $u=u_{\text{д}}=0$ до подхода следующего фронта.

Итак, средний темп набора энергии на фронтах равен

$$\dot\varepsilon_f=\frac{\Delta\varepsilon_{\text{с. ад}}}{l}\,|v_x|=\frac{uH\Delta J}{2ml}.$$

Подставляя сюда (6) и производя усреднение по угловым переменным, найдем окончательно

$$\dot\varepsilon_f=p\nu u\Delta H/6Hl. \qquad (8)$$

Оценим вклад отраженных частиц в общее увеличение энергии. В системе C_0 энергия этих частиц сохраняется. При больших углах α, ϑ, при которых происходит полное отражение, величина ΔJ мала и ею можно пренебречь, поэтому для отраженных частиц $\cos\vartheta=\mu<\mu_c=\sqrt{\Delta H/H}$. Переходя в систему C, найдем изменение энергии при встречном столкновении частиц со скоростью $\mathbf{v}$ в системе C и скоростью $\mathbf{v}'=\mathbf{v}-\mathbf{u}_0$ в системе C_0: $\Delta\varepsilon_+=2\mu p_0u_0$, а при догоняющем $\Delta\varepsilon_-=-\Delta\varepsilon_+$. Скорость изменения энергии на хаотически распределенных фронтах $\dot\varepsilon_\pm=\Delta\varepsilon_\pm v_0\mu\cos\alpha/l$. Если функция распределения частиц $f(|\mathbf{v}|)$ изотропна, то, усредняя при $u_0\ll v'$, получим

$$\dot\varepsilon=\bar{\dot\varepsilon}_++\bar{\dot\varepsilon}_-=\left\{\int\limits_0^\infty v'^2dv'\left[\int\limits_0^{\mu_c}\dot\varepsilon_+f(v'^2+2\mathbf{v}'\mathbf{u}_0)\,d\mu+\int\limits_{-\mu_c}^0\dot\varepsilon_-f(v'^2+2\mathbf{v}'\mathbf{u}_0)\,d\mu\right]\right\}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^\infty v'^2dv'\int\limits_{-1}^{+1}d\mu f(v'^2+2\mathbf{v}'\mathbf{u}_0)\right]^{-1}=\frac{3}{2}\,\frac{\bar p u_\varphi^2}{l\cos\alpha}. \qquad (9)$$

Здесь $\bar p$ — среднее значение импульса. Усреднение по углам дает логарифмическую расходимость, которой, однако, можно избежать, усредняя в пределах существования системы C_0. Это дает $\overline{1/\cos\alpha}=1/2\cdot\ln(c/u)$, т. е. величину, не зависящую от энергии. Мы получили формулу, типичную для механизма Ферми.

3. Влияние рассеивателей

В области между фронтами могут возбуждаться мелкомасштабные флуктуации магнитного поля $\delta H\ll H$ с характерной длиной волны λ_0. Быстрая частица, упруго рассеиваясь на этих неоднородностях магнитного поля, может изменять направление своего движения вдоль силовой линии магнитного поля и возвращаться к фронту. Набранная частицей на данном фронте ударной волны энергия может поэтому увеличиваться.

Нас будет интересовать лишь движение частицы по нормали к фронту, так как именно это движение увеличивает число пересечений последнего. Поэтому будем рассматривать одномерную диффузию частиц со скоростью v_x. Эффективная длина рассеяния, на которой частица может изменить скорость, равна $\lambda=\lambda_0\,(H/\delta H)^2$. Именно эту длину мы будем рассматривать как среднее расстояние между эффективными рассеивателями и будем говорить о плоскостях $x=0$, λ, 2λ соответственно первого, второго и т. д. рассеяния. Положение фронта в системе его покоя выберем $x=\lambda$, $x<\lambda$ — область перед фронтом.

Удобно измерять координаты рассеивателей и время движения частицы в единицах λ и $\lambda/|v_x|$, т. е. перейти к безразмерным координатам и времени.

Обозначим p и q вероятности рассеяния по потоку и против него. Чтобы вычислить p и q, рассмотрим случайное блуждание по нормали к фронту как случайные шаги на множестве целых чисел в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Эти шаги описываются разностными уравнениями $P\,(m;\ n+1)=qP\,(m+1;\ n)+pP\,(m-1;\ n)$, $P\,(0,\ 0)=1$, $P\,(m,\ 0)=0$. Здесь $P\,(m,\ n)$ — вероятность находиться в положении m после n шагов. Переход к непрерывной модели [8] дает уравнение Фоккера—Планка для диффузии с дрейфом, происходящим со скоростью $u\ll v=|v_x|$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-u\frac{\partial P}{\partial x}+D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

в котором $u=(p-q)\,\Delta x/\Delta t=(p-q)v$, $D=(\Delta x)^2/2\,\Delta t$, u — скорость фронта, отсюда $p=(u+v)/2\theta$, $q=(u-v)/2\theta$.

Вычислим далее среднее время первого пересечения исходного фронта (безразмерная координата 1) и среднее время первого пересечения следующего фронта (безразмерная координата $L-1$). Здесь L — расстояние от исходного фронта до «поглотителя» частиц, расположенного в невозмущенном газе. Если частица пройдет эту длину, то она выключается из ускорения в области исходного фронта либо потому, что поступает в область поглощения или волны разрежения, либо потому, что пересекает следующий фронт.

Разностное уравнение, описывающее процесс первого возвращения в начало координат (первого пересечения исходного фронта), имеет вид [9]

$$u_{n+1}(x,\ 0)=pu_n(x+1,\ 0)+qu_n(x-1,\ 0)$$

с граничными условиями $u_n(0,\ 0)=u_n(L,\ 0)=0$, $u_0(0,\ 0)=1$, $u_n(x,\ 0)=0$, $x>0$, где $u_n(x,\ 0)$ — вероятность первого, т. е. без повторов достижения частицей за n шагов начала отсчета при выходе из точки x.

Средние интервалы времени между последовательными пересечениями исходного фронта, а также между пересечениями этого и последующего фронтов при блужданиях частицы на отрезках $0<x<L$, $-L<x<+L$ обозначим соответственно $\bar n_0$, $\bar n_L$, $\bar n_{2L}$. Эти величины можно найти исходя из ряда

$$\bar n_i=\sum_{n=0}^{\infty} nu_n^{(i)}(x)=\frac{d}{ds}\,[U_i(x,\ s)]_{s=1},$$

где $i=0,\ L,\ 2L$; U_i — производящая функция, согласно [9], определенная соотношениями

$$U_i(x,\ s)=(g_+^L-g_-^L)\begin{cases}(g/p)^x\,(g_+^{L-x}-g_-^{L-x}), & i=0,\\ g_+-g_-, & i=L,\\ (g_+^{L+x}-g_-^{L+x})/(g_+^L+g_-^L), & i=2L.\end{cases}\tag{10}$$

Здесь $g_\pm=\left(1\pm\sqrt{1-4pqs^2}\right)/2ps$.

Полагая $x=1$ и используя малость u/v, найдем

$$\bar n_0=\begin{cases}|v_x|/u,\\ L,\end{cases}\quad \bar n_{2L}=\begin{cases}L^2, & 2L\dfrac{u}{|v_x|}<1,\\ L\,|v_x|/u, & 2L\dfrac{u}{|v_x|}>1.\end{cases}\tag{11}$$

Случай $Lu/v \gg 1$ довольно трудно реализовать. Действительно, при переходе к размерным длинам, последнее неравенство принимает вид

$$\frac{L}{\lambda_0}\left(\frac{\delta H}{H}\right)^2 \frac{u}{v} > 1,$$

где λ_0 — введенная ранее длина волны мелкомасштабных пульсаций. В теории турбулентности полагают $\delta H = H\ (\lambda_0/L)^a$, где показатель $a = {}^1/_2$ и ${}^1/_3$ соответственно при спектрах ударной турбулентности и колмогоровском случае [1]. При этом $(L/\lambda_0)^{1-2a} > v/u \geqslant 10^2$. Практически лишь при $a \ll 1$, т. е. при логарифмическом интегральном спектре пульсации, могло бы иметь место указанное неравенство.

Согласно [9], среднее число возвратов частицы к фронту $\nu = \min\{L,\ v/u\}$, поэтому средняя набранная энергия на нем $\Delta\varepsilon_f \leqslant \Delta\varepsilon_1 \nu$. Темп ускорения, однако, $\dot{\varepsilon} = \Delta\varepsilon_f/\bar{n} \leqslant \Delta\varepsilon_1 v/L$, т. е. совпадает с (8).

Таким образом, в ансамбле ударных волн частицы ускоряются наиболее эффективно. Энергетический спектр ускоренных частиц здесь не рассматривается, так как это составляет задачу отдельной работы. В частном случае уединенного фронта этот вопрос рассмотрен, например, в [10,11].

Приложение

Расчет приобретения энергии частицей в модели зубчатого профиля электрического поля в ударном импульсе

Рассмотрим движение положительно заряженной частицы при профиле поля, образованного скачком на фронте ($x = 0$) и провалом треугольной формы в области волны разрежения

$$E(x) = E \begin{cases} \dfrac{a}{l-a}\,\dfrac{x - x_l}{x_l - x_b}, & x_l < x < x_b, \\ \dfrac{a}{l-a}\,\dfrac{x_a - x}{x_b - x_a}, & x_b < x < x_a, \\ 1 - x/x_a, & x_a < x < 0, \end{cases}$$

причем $\int\limits_0^{x_l} E(x)\,dx = 0$, $E = E_y$, $x_s = -a,\ -b,\ -l$ при $s = a,\ b,\ l$. При условии $\operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}\alpha < 1$ частица, как это уже отмечено выше, пересекает фронт однажды. Если пересечение фронта имеет место при $t = 0$, то невозмущенная траектория имеет вид $x(t) = -v_0 t + r\sin\alpha\,[\cos(\omega t + \varphi) - \cos\varphi]$, $y(t) = r\sin(\omega t + \varphi)$, $v_0 = v_\parallel\cos\alpha$, $\omega = v_\perp/r$, $r = cp_\perp/eH$.

Далее частица изменяет свою энергию, и после прохождения импульса изменение энергии равно

$$\Delta\varepsilon = e\int\limits_0^{t_l} E(x(t))\,\dot{y}(t)\,dt.$$

Интегрирование дает

$$\Delta\varepsilon \doteq \frac{erEv_\perp\sin\alpha}{2v_0} + \sum_s c_s\cos(\omega t_s + \varphi_s).$$

Расстояния $|x^s| \gg r$ и в стохастическом процессе изменяются от импульса к импульсу, при этом $\omega t_s \gg 1$, так что, производя усреднение в последней формуле по времени t_s или по фазам влета φ_s, получим $\Delta\varepsilon = p_\perp u\Delta H\sin\vartheta/2H\cos\vartheta\operatorname{cor}\alpha$, что в точности совпадает с выведенным в основном тексте соотношением. При изменении направления влета частицы, т. е. при ее влете со стороны «хвоста» импульса, изменяется знак v_0, что сказывается лишь на осциллирующих членах в приобретении энергии, и, следовательно, в среднем частица также набирает энергию. Таким образом, поскольку ударные волны разрежения отсутствуют в природе, частица эффективно ускоряется на ансамбле ударных фронтов.

Литература

[1] *Ф. А. Баум, С. А. Каплан, К. П. Станюкович.* Введение в космическую газодинамику. ГИФМЛ, М. (1958).
[2] *К. Бракнер, С. Джорна.* Управляемый лазерный синтез. Атомиздат, М. (1977).
[3] *Т. В. Баженова, Л. Г. Гвоздев.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. «Наука», М. (1977).
[4] *Л. И. Дорман.* Ускорительные процессы в космосе. В сб.: Итоги науки, 7. М. (1972).
[5] *В. П. Шабанский.* ЖЭТФ, 41, 1107 (1961).
[6] *Т. Нортроп.* Адиабатическая теория движения заряженных частиц. Атомиздат, М. (1967).
[7] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Электродинамика сплошных сред. ГИФМЛ, М. (1959).
[8] *С. Чандрасекар.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, М. (1947).
[9] *В. Феллер.* Введение в теорию вероятности и ее приложения, 1. «Мир», М. (1967).
[10] *A. R. Bell.* Month. Not. Roy. Soc., 182, 147 (1978).
[11] *Г. Ф. Крымский.* ДАН СССР, 234, 1306 (1977).

Ленинградский
политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило в Редакцию
6 июня 1980 г.
В окончательной редакции
15 сентября 1982 г.