A. A. Zykov, A. V. Ivanov, Partial regularity of generalized solutions of quasilinear parabolic systems of a nondifferentiable structure,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 6, 167–199

1989 **АЛГЕБРА И АНАЛИЗ** *том 1, вып. 6*

А. А. Зыков, А. В. Иванов

О ЧАСТИЧНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ СТРУКТУРЫ

Для обобщенных решений квазилинейных параболических систем недифференцируемой структуры установлена локальная частичная $C^{1+\sigma,\,\sigma/2}(Q_T)$-регулярность при некотором $\sigma \in (0, 1)$. Типичным примером допустимой системы является система вида

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{a^i(x,\ t,\ u)\,(1+|\nabla u|^{m-2})\,\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right\} = f^i(x,\ t,\ u,\ \nabla u), \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $m \geqslant 2$, $a^i(x, t, u) \geqslant a_0 = \text{const} > 0$, $|f^i(x, t, u, p)| \leqslant c\,(1 + |p|^m)$, $c = \text{const} > 0$, а функции $a^i(x, t, u)$ и $f^i(x, t, u, p)$ предполагаются лишь непрерывными по Гёльдеру с некоторым показателем $\alpha \in (0, 1)$.

Результаты данной работы относятся к так называемой проблеме регулярности для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений и систем — задача выявления дифференциальных свойств обобщенных решений таких систем, не вытекающих из одной только принадлежности их к соответствующему энергетическому пространству. Проблема регулярности является одной из важнейших в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Эта проблема, связанная, в частности, со знаменитыми девятнадцатой и двадцатой проблемами Гильберта, породила громадное число работ. В настоящее время хорошо известно принципиальное отличие случая одного квазилинейного эллиптического или параболического уравнения второго порядка от случая системы таких уравнений с числом независимых переменных, большим 2. Если в первом случае достаточная регулярность коэффициентов уравнения приводит к требуемой гладкости обобщенного решения, то в векторном случае никакая гладкость функций, образующих систему уравнений, не влечет, вообще говоря, требуемой гладкости решения. В то же время, как показывают сегодня многочисленные результаты, обобщенные решения многих квазилинейных эллиптических и параболических систем могут терять свою гладкость только на замкнутом подмножестве нулевой меры. Результаты такого сорта для систем стали называть результатами о частичной регулярности. С другой стороны, в ряде работ изучалась возможность выделения более узких классов указанных систем, обобщенные решения которых обладают определенной гладкостью всюду в области определения решения. Глубокое изучение проблемы регулярности и частичной регулярности, содержится в хорошо известных монографиях О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [1, 2], Морри [3] и Джиаквинты [4]. В этих монографиях можно найти также подробное изложение истории вопроса и обширную литературу.

В данной работе мы устанавливаем локальную частичную регулярность обобщенных решений квазилинейных параболических систем вида

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_{p^i_\alpha}(x, t, u, u_x) = f^i(x, t, u, u_x), \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (0.1)$$

рассматриваемых в цилиндре $Q_T = \Omega x (0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Здесь $u_x \equiv u\left(u^i_{x_\alpha}\right)_{i=1,\ldots,N;\ \alpha=1,\ldots,n}$ — пространственный градиент векторной функции $u \equiv (u^i)_{i=1,\ldots,N}$, a $F(x, t, u, p)$ и $f^i(x, t, u, p)$, $i = 1, \ldots, n$, — скалярные функции, заданные в $Q_T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN}$ и удовлетворяющие определенным структурным условиям. Основным примером допустимых систем является система вида

$$\frac{\partial u^i}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{a(x, t, u)(\mu^2 + |u_x|^2)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right\} = f^i(x, t, u, u_x), \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (0.2)$$

где $m \geqslant 2$; $\mu = \mathrm{const} > 0$; $a(x, t, u) \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$, $|f^i(x, t, u, p)| \leqslant c(\mu^2 + |p|^2)^{m/2}$, $c = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, \ldots, N$, причем функции $a^i(x, t, u)$ и $f^i(x, t, u, p)$ непрерывны по Гельдеру по переменным x, t и u. При таких условиях (не требуя дифференцируемости $a^i(x, t, u)$ и $f^i(x, t, u, p)$ по x, t, u) мы доказываем локальную частичную $C^{1+\sigma, \sigma/2}(Q_T)$-регулярность обобщенных решений системы (0.2) при некотором $\sigma \in (0, 1)$. Таким образом, основной результат данной работы является (ослабленной) параболической версией известного результата Джиаквинты—Модики [4, 5] о локальной частичной $C^{1+\sigma}(\Omega)$-регулярности обобщенных экстремалей «недифференцируемых» функционалов с интегрантами вида

$$F(x, u, u_x) = a(x, u)(\mu^2 + |u_x|^2)^{\frac{m}{2}}, \qquad (0.3)$$

где $m \geqslant 2$, $\mu = \mathrm{const} \geqslant 0$, $a(x, u) \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$, а функция $a(x, u)$ лишь непрерывна по Гельдеру относительно x и u. Частичная регулярность минимайзеров «дифференцируемых» функционалов и обобщенных решений квазилинейных эллиптических и параболических систем с дифференцируемыми коэффициентами интенсивно изучалась последние 20 лет, начиная с известных работ Морри [6] и Джусти—Миранды [7]. Однако изучение частичной регулярности в случае систем «недифференцируемой структуры» (т. е. при условиях, не гарантирующих возможность дифференцирования уравнений системы хотя бы по пространственным независимым переменным) началось сравнительно недавно (см. [4, 5, 8]) и относилось только к эллиптическому случаю. Разумеется, здесь мы имеем в виду только результаты о частичной регулярности порядка не ниже первого (т. е. относящиеся к частичной регулярности производных рассматриваемых обобщенных решений).

Ключевые слова: квазилинейная параболическая система, обобщенное решение, частичная регулярность, непрерывность по Гельдеру.

В случае, когда матрица $(\partial^2 F/\partial p_\alpha^i \partial p_\beta^j)$ не зависит от u_x и имеет диагональный вид, О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева (см. [2]) получили такое же полное решение проблемы регулярности, как и в случае одного параболического уравнения. Впоследствии различные результаты о регулярности всюду в Q_T обобщенных решений для квазилинейных параболических систем специального вида были получены в работах [9—11] и др. Отметим, что по ходу доказательства основного результата данной работы мы устанавливаем, в частности, $C^{1+\sigma,\,\sigma/2}$-регулярность всюду внутри Q_T для класса систем, имеющего непустое пересечение с классом систем, рассмотренных в работах [9, 10]. Этот результат, как и результаты работ [9, 10], относятся к случаю систем дифференцируемой структуры. Различные результаты о частичной $C^{\sigma,\,\sigma/2}(Q_T)$-регулярности или частичной регулярности высших порядков для систем дифференцируемой структуры были получены в работах [12—17]. Частичная $C^{1+\sigma,\,\sigma/2}(Q_T)$-регулярность для квазилинейных параболических систем недифференцируемой структуры в случае линейного роста по u_x главных частей уравнений системы (в частности, для системы (0.2) при $m = 2$) получена недавно одним из авторов этой статьи и будет вскоре опубликована (см. [18]).

При доказательстве результатов настоящей статьи мы опирались на методику работ [4, 5, 10, 17]. Для краткости мы устанавливаем все результаты в этой работе, считая, что обобщенные решения $u(x, t)$ системы (0.1) имеют $u_t \in L_2(Q_T)$. Для устранения этого предположения следует воспользоваться стандартной на сегодняшний день техникой усреднений пробных функций по переменной t (см. [2], с. 164—168 и 657).

§ 1. Формулировка основного результата

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная область в R^n, $n \geqslant 1$, систему вида (0.1), предполагая, что выполнены следующие структурные условия.

H.1. При п. в. $(x, t) \in Q_T$ и любых $u \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$, $\xi \in \mathbb{R}^{nN}$

$$\lambda(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}}|\xi|^2 \leqslant F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x, t, u, p)\,\xi_\alpha^i \xi_\beta^j \leqslant \Lambda(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}}|\xi|^2,$$

$$\lambda(1+|p|^m) - c_0 \leqslant F(x, t, u, p) \leqslant \Lambda(1+|p|^m) + c_0,$$

где $\lambda, \Lambda = \mathrm{const} > 0$, $m = \mathrm{const} > 2$.

H.2. Существует такая симметричная положительно определенная матрица $b = \|b^{ij}\|$ порядка N, что при п. в. $(x, t) \in Q_T$ и любых $u \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$, $q \in \mathbb{R}^{n^2N}$

$$F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x, t, u, p)\,p_r^i q_{r\beta}^j b^{kl} p_s^k q_{s\alpha}^l \geqslant \varkappa(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}} \sum_{\alpha=1}^n \left| b^{kl} p_s^k q_{s\alpha}^l \right|^2 -$$

$$- \varepsilon_0 |p|^2 |q|^2 (1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}},$$

где $\Lambda_1 = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$ — достаточно малое число, выбор которого будет уточнен ниже,

$$\sum_{\alpha=1}^n \left| F_{p_\alpha^i p_\beta^j} p_r^i q_{r\beta}^j \right| \leqslant \Lambda_1 (1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}} \sum_{\alpha=1}^n \left| b^{kl} p_s^k q_{s\alpha}^l \right| + \hat{\varepsilon}_0 |p||q|(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}},$$

где $\Lambda_1 = \mathrm{const} > 0$, $\hat{\varepsilon}_0 = \mathrm{const} > 0$ — достаточно малое число, выбор которого также будет уточнен ниже.

H.3. При п. в. (x_1, t_1), $(x_2, t_2) \in Q_T$ и любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$

$$|F(x_2, t_2, u_2, p) - F(x_1, t_1, u_1, p)| \leqslant \eta(|u_1|, |x_2 - x_1| + |t_2 - t_1| + \\ + |u_2 - u_1|)(1 + |p|^m),$$

где функция $\eta(r, s)$ определена по формуле

$$\eta(r, s) = K(r) \min(s^\delta, L_0),$$

причем $\delta \in (0, 1)$, $L_0 = \text{const} > 0$, $K(r)$ — неубывающая функция от r.

H.4. Существует неотрицательная ограниченная функция $\omega(t, s)$, неубывающая по t при любом фиксированном s, неубывающая и выпуклая по s при любом фиксированном t, для которой $\lim\limits_{s\to 0} \omega(t, s) = 0$ и при п. в. $(x, t) \in Q_T$ и любых $u \in \mathbb{R}^N$, $p, q \in \mathbb{R}^{nN}$

$$F_{pp}(x, t, u, q) - F_{pp}(x, t, u, p)| \leqslant (1 + |p|^2 + |q|^2)^{\frac{m-2}{2}} \omega(|p|, |q - p|).$$

H.5. Функция $f(x, t, u, p)$ удовлетворяет условию Каратеодори и условию

$$|f(x, t, u, p)| \leqslant a(1 + |p|^2)^{\frac{m}{2}} + f_1(x, t),$$

где $a = \text{const} \geqslant 0$, $f_1 \in L_{s_0}(Q_T)$ при некотором $s_0 > m/(m-1)$.

Определение. *Функция* $u \in W_m^{1,0}(Q_T, \mathbb{R}^N) \cap L_\infty(Q_T, \mathbb{R}^N)$ *называется обобщенным решением системы* (0.1) *в* Q_T, *если при любой пробной функции* $\varphi \in C_0^\infty(Q_T, \mathbb{R}^N) \cap L_\infty(Q_T, \mathbb{R}^N)$

$$-\iint\limits_{Q_T} u^i \varphi_t^i \, dx\, dt + \iint\limits_{Q_T} F_{p_\alpha^i}(x, t, u, u_x) \varphi_{x_\alpha}^i \, dx\, dt = \iint\limits_{Q_T} f^i(x, t, u, u_x) \varphi^i \, dx\, dt. \tag{1.1}$$

Обозначим

$$V(p) = (1 + |p|^2)^{\frac{m-2}{4}} p, \quad p \in \mathbb{R}^{nN}, \quad m \geqslant 2. \tag{1.2}$$

Далее мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$z_0 = (x_0, t_0)$, $Q_R(z_0) \equiv K_R(x_0) x (t_0 - R^2, t_0)$, $K_R(x_0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$.

Если v — некоторая векторная функция, определенная в цилиндре $Q_R(z_0)$, то через $v_{z_0, R}$ будем обозначать среднее функции v по цилиндру $Q_R(z_0)$

$$v_{z_0 R} = \fint\!\!\fint_{Q_R(z_0)} v\, dx\, dt \equiv (\text{mes}_{n+1}^{-1} Q_R(z_0)) \iint\limits_{Q_R(z_0)} v\, dx\, dt.$$

Основная теорема. *Пусть u — обобщенное решение системы* (0.1) *в* Q_T, *рассматриваемой при условиях* H.1—H.5. *Предположим, что выполнено неравенство*

$$2aM < \lambda, \tag{1.3}$$

где λ, a — константы из условий H.1 *и* H.5 *соответственно, а* $M \equiv \sup(|u(x, t)|, Q_T)$. *Тогда существуют открытое множество* $Q_0 \subset Q_T$ *и число* $\sigma \in (0, 1)$ *такие, что* $V(u_x) \in C^{\sigma, \sigma/2}(Q_0, \mathbb{R}^N)$. *Более того,* $Q_T \setminus Q_0 \equiv \sum = \sum_1 \cup \sum_2$, *где*

$$\textstyle\sum_1 \equiv \left\{(x, t) \in Q_T : \sup\limits_{R>0}(|u_{z_0, R}| + |(u_x)_{z_0, R}|) = +\infty\right\},$$

$$\textstyle\sum_2 \equiv \left\{(x, t) \in Q_T : \liminf\limits_{R\to+0} \fint\!\!\fint_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(u_x)_{z_0, R}|^2 dx\, dt > 0\right\}.$$

В частности,

$$\mathrm{mes}_{n+1} \sum = 0.$$

Замечание. Из основной теоремы легко следует, что $u_x \in C^{\sigma, \sigma/2}(Q_0, \mathbb{R}^N)$. Отсюда и из результатов работы [17] следует, в частности, что само решение u обладает локальной частичной непрерывностью по Гельдеру с любым показателем $\alpha \in (0, 1)$.

§ 2. Известные факты и предложения

Лемма 2.1. *Для функции $V(p)$, определенной по формуле* (1.2), *при всех p, $q \in \mathbb{R}^{nN}$ и любых $\mu \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства*

$$c_1(\mu^2 + |p|^2 + |q|^2)^{\frac{m-2}{2}} |p-q|^2 \leqslant |V(p) - V(q)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\mu^2 + |p|^2 + |q|^2)^{\frac{m-2}{2}} |p-q|^2, \qquad (2.1)$$

причем константы c_1 и c_2 зависят лишь от m.

Доказательство леммы 2.1 см. в [15]. Следующая лемма есть простое следствие из леммы 1 работы [19].

Лемма 2.2. *Пусть $f(t)$ — неотрицательная ограниченная функция, определенная для $0 \leqslant T_0 \leqslant t \leqslant T_1$. Предположим, что для $T_0 \leqslant t < s \leqslant T_1$*

$$f(t) \leqslant A(s-t)^{-\alpha} + B(s-t)^{-\beta} + C + \theta f(s),$$

где A, B, α, β, θ — неотрицательные константы, причем $\theta < 1$. Тогда существует такая константа $c_0 = c_0(\theta, \alpha, \beta)$, что для всех ρ, R, $T_0 \leqslant \rho < R \leqslant T_1$, справедливо неравенство

$$f(\rho) \leqslant c_0[A(R-\rho)^{-\alpha} + B(R-\rho)^{-\beta} + C].$$

Определим теперь некоторое взвешенное среднее $\tilde{u}_{x_0;\, r, s;\, R}$ векторной функции u. Пусть $\xi(x) = \xi(|x|) \in C_0^\infty(K_s(0))$, где $1 < s \leqslant 2$ такая, что $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi = 1$ в $K_r(0)$, $1 \leqslant r < s$, и такая, что $|\xi_x| \leqslant c(s-r)^{-1}$. Пусть

$$\xi_{x_0;\, r, s;\, R}(x) = \xi((x - x_0)/R).$$

Обозначим тогда

$$\tilde{u}_{x_0;\, r, s;\, R}(t) = \int\limits_{K_{sR}(x_0)} u(x, t)\, \xi^2_{x_0;\, r, s;\, R}(x)\, dx \Big/ \int\limits_{K_{sR}(x_0)} \xi^2_{x_0;\, r, s;\, R}\, dx. \qquad (2.2)$$

В работе [20] установлено следующее предложение.

Лемма 2.3. *Пусть функция $V(p)$ определена по формуле* (1.2) *при некотором $m \geqslant 2$. Тогда для любой $\Phi \in W_m^{1,0}(Q_R(z_0))$*

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(\Phi) - V(\Phi_{z_0, R})|^2\, dx\, dt \leqslant c \iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(\Phi) - V(\Phi)_{z_0, R}|^2\, dx\, dt, \qquad (2.3)$$

где константа $c > 0$ зависит только от m.

Замечание 2.1. Условие H.1 влечет усиленную квазивыпуклость функции $F(x, t, u, p)$ (ср. [20], с. 186) в том смысле, что при любых $(x_0, t_0) \in Q$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$, $p_0 \in \mathbb{R}^{nN}$ и любой $\Phi \in C_0^1(Q, \mathbb{R}^N)$

$$\iint\limits_Q F(x_0, t_0, u_0, p_0 + \Phi_x)\, dx\, dt \geqslant \iint\limits_Q F(x_0, t_0, u_0, p_0)\, dx\, dt +$$
$$+ \varkappa \iint\limits_Q (|\Phi_x|^2 + |\Phi_x|^m\, dx\, dt, \qquad (2.4)$$

где $\varkappa = \varkappa(n, m) > 0$.

Действительно, для доказательства (2.4) достаточно убедиться в том, что при п. в. $(x, t) \in Q$ и любых $. \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^{nN}$, $q \in \mathbb{R}^{nN}$ справедливо неравенство

$$F(x, t, u, p+q) \geqslant F(x, t, u, p) = F_{p_\alpha^i}(x, t, u, p) q_\alpha^i + \varkappa\left(|q|^2 + |q|^m\right). \tag{2.5}$$

Обозначим $h(s) = F(p + sq)$. Учитывая, что

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \int_0^1 (1-s) h''(s)\, ds,$$

получим

$$F(p+q) = F(p) + F_{p_\alpha^i}(p) q_\alpha^i + \int_0^1 (1-s) F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p + sq)\, ds q_\alpha^i q_\beta^j \geqslant$$

$$\geqslant F(p) + F_{p_\alpha^i}(p) q_\alpha^i + \lambda \int_0^1 (1-s)\left(1 + |p + sq|^{m-2}\right) ds\, |q|^2. \tag{2.6}$$

Применяя лемму 8.1 из [21], заключаем, что существует такая константа $\varkappa_1 > 0$, что

$$\int_0^1 (1-s)|p + sq|^{m-2}\, ds \geqslant \varkappa_1 |q|^{m-2}. \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) легко следует (2.5). Таким образом, неравенство (2.4) установлено.

§ 3. Второе неравенство Каччополи и другие неравенства для систем недифференцируемой структуры

В этом параграфе мы рассматриваем более общие системы, чем в основной теореме. Точнее, мы предполагаем здесь, что для системы вида (0.1) выполнены лишь условия Н.1 и Н.3 при любом фиксированном $m \geqslant 2$. Устанавливаемые здесь аналитические факты будут играть существенную роль при доказательстве основного результата работы. В то же время они имеют и самостоятельный интерес. Ради некоторого сокращения доказательств ограничимся случаем однородных систем, т. е. систем вида

$$u_t^i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i}(x, t, u, u_x)\right\} = 0 \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3.1}$$

Обозначим

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}^i)_{i=1,\ldots,N}, \quad \mathcal{P}^i(x, t) = \tilde{u}^i(t) + \sum_{\alpha=1}^n p_{0\alpha}^i (x_\alpha - x_{0_\alpha}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

где $x, x_0 \in \Omega$, $x \equiv (x_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,n}$, $x \equiv (x_{0\alpha})_{\alpha=1,\ldots,n}$, $\tilde{u}(t) \in C(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^N)$, $p_0 \in \mathbb{R}^{nN}$;

$$\begin{gathered}\alpha(x, t) = K(|u_0(t)|) \min\{[|x - x_0| + |t - t_0|^{1/2} + |u - u_0(t)|]^\delta, L\},\\ G^2(x, t) = (1 + |p_0|^2 + |u_x|^2)^{\frac{m}{2}} \min(1, \alpha(x, t)),\\ u_0(t) \in C(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1),\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $u_0(t) \in C(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\delta = \text{const} > 0$, $L = \text{const} > 0$, $k(s)$ — возрастающая функция на $[0, \infty]$, причем $u = u(x, t)$ — обобщенное решение системы (3.1), $u_x = u_x(x, t)$. Заметим, что в случае однородной системы (3.1) при определении обобщенного решения мы исключаем условие $u \in L_\infty(Q_T, \mathbb{R}^N)$.

Лемма 3.1. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.1), *рассматриваемой при условиях* Н.1, Н.3. *Пусть $p_0 \in \mathbb{R}^{nN}$, причем $|p_0| \leqslant L_1 = \mathrm{const} > 0$. Тогда при всех $z_0 \equiv (x_0, t_0) \in Q_T$ и любых R таких, что $0 < R < (1/2)\,\mathrm{dist}(z_0, \partial Q_T)$, справедливо «второе неравенство Каччополи»*

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} (|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m)\,dx\,dt \leqslant c\left[R^{-2}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^2\,dx\,dt + \right.$$

$$\left. + R^{-m}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^m\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} G^2(x, t)\,dx\,dt\right], \qquad (3.4)$$

где $\mathscr{P}_{2R} = \mathscr{P}_{2R}(x, t)$ определена формулой (3.2), *в которой в качестве $\tilde{u}(t)$ выбрана функция $\tilde{u}_{2R}(t) \equiv \tilde{u}_{x_0;\,1,\,2;\,R}(t)$ (см.* (2.2)), *причем константа c в* (3.4) *зависит только от структуры системы* (0.1) *и L_1.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{P}_{r,s} = \mathscr{P}_{r,s}(x, t)$ функцию, определяемую формулой (3.2) при $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_{x_0;\,r,\,s;\,R}(t)$ (см. (2.2)). Таким образом, $\mathscr{P}_{2R} \equiv \mathscr{P}_{1,2}$. Пусть $\tau(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — такая срезающая функция, что $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\tau \equiv 1$ в $[t_0 - (2R)^2, t_0]$, $\tau \equiv 0$ при $t < t_0 - (2R)^2$. Пусть $\chi\{t < t_0\}$ — характеристическая функция интервала $(-\infty, t_0)$. Положим

$$\Phi = (u - \mathscr{P}_{r,\,s})\,\xi^2_{x_0;\,r,\,s;\,R}\tau^2; \quad \Psi = \left(1 - \xi^2_{x_0;\,r,\,s;\,R}\tau^2\right)(u - \mathscr{P}_{r,\,s}).$$

Очевидно, что

$$\Phi_x + \Psi_x = u_x - p_0.$$

Используя тождество (1.1) при $\varphi = \Phi\chi\{t < t_0\}$, получим ввиду (2.5)

$$\lambda \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} [|\Phi_x|^2 + |\Phi_x|^m]\,dx\,dt \leqslant \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} [F(x_0 t, u_0(t), \Phi_x + p_0) -$$

$$- F(x_0, t_0\ u_0(t), p_0)]\,dx\,dt =$$

$$= \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} [F(x_0, t, u_0(t), u_x - \Psi_x) - F(x_0, t, u_0(t), u_x)]\,dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} [F(x_0, t, u_0(t), u_x) - F(x, t, u, u_x)]\,dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} \Big[F(x, t, u, u_x) - F_{p^i_\alpha}(x, t, u, u_x)\,\Phi^i_{x_\alpha} + \varkappa\big(|\Phi_x|^2 +$$

$$+ |\Phi_x|^m\big)\Big]\,dx\,dt + \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} u^i\Phi^i_t\,dx\,dt -$$

$$- x \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} (|\Phi_x|^2 + |\Phi_x|^m)\,dx\,dt -$$

$$- \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x_0, t, u_0(t), u_x - \Phi_x)\,dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} [F(x_0, t, u_0(t), p_0+\Psi_x) - F(x_0, t, u_0(t), p_0)\,dx\,dt =$$

$$= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}+\mathrm{VI}+\mathrm{VII}, \qquad (3.5)$$

где $\widetilde{Q}_{sR}(z_0) = K_{sR}(x_0)\times(t_0-(2R)^2,\ t_0)$, $u_0(t)$ — среднее функции $x\to \to u(x, t)$ по шару $K_{2R}(x_0)$.

Сначала оценим сверху сумму первого и седьмого интегралов, стоящих в правой части неравенства (3.5), используя условие Н.1.

$$\mathrm{I}+\mathrm{VII} =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} dx\,dt \int\limits_0^1 \Big[F_{p^i_\alpha}(x_0, t, u_0(t), p_0+\tau\Psi_x) -$$

$$- F_{p^i_\alpha}(x_0, t, u_0(t), u_x-\tau\Psi_x)\Big]\,d\tau\,\Psi^i_{x_\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} (1+|p_0|^2+|u_x|^2+|\Psi_x|^2)^{\frac{m-2}{2}} (|u_x-p_0|+|\Psi_x|)\,|\Psi_x|\,dx\,dt.$$

Учитывая, что Ψ_x отлична от нуля лишь на множестве $\widetilde{Q}_{sR}(z_0)\setminus\widetilde{Q}_{rR}(z_0)$, что

$$|\Psi_x| \leqslant c\,|u_x-p_0| + \frac{c}{(s-r)R}\,|u-\mathscr{P}_{r,s}|,$$

а также используя элементарное неравенство Юнга, можно заключить, что

$$\mathrm{I}+\mathrm{VII} \leqslant c\Bigg\{\frac{1}{(s-r)^2R^2}\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u-\mathscr{P}_{r,s}|^2\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{(s-r)^mR^m}\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u-\mathscr{P}_{r,s}|^m\,dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)\setminus Q_{rR}(z_0)} [\,|u_x-p_0|^2+|u_x-p_0|^m]\,dx\,dt\Bigg\}. \qquad (3.6)$$

Далее, ввиду (2.5)

$$\mathrm{III} \leqslant \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, u_x-\Phi_x)\,dx\,dt = \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, p_0+\Psi_x)\,dx\,dt.$$

Поэтому

$$\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{VI} \leqslant \mathrm{II} + \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, p_0+\Psi_x) -$$

$$- F(x_0, t, u_0(t), p_0+\Psi_x)]\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg\{\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} \min(\alpha(x, t), 1)\,(1+|u_x|^2)^{\frac{m}{2}}\,dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} \min(\alpha(x, t), 1)\,(1+|p_0+\Psi_x|^2)^{\frac{m}{2}}\,dx\,dt\Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} G^2(x,\ t)\,dx\,dt + \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |\Psi_x|^m\,dx\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(s_0)} G^2(x,\ t)\,dx\,dt + \frac{1}{(s-r)^m R^m}\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{r,\,s}|^m\,dx\,dt\right\} +$$

$$+ c\int\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)\setminus\tilde{Q}_{rR}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\,dx\,dt, \tag{3.7}$$

где функции $\alpha(x,\ t)$, $G^2(x,\ t)$ определены по формуле (3.3). Пятый интеграл, стоящий в правой части неравенства (3.5), очевидно неположителен. Осталось оценить четвертый интеграл. Имеем

$$\mathrm{IV} = -\int\limits_{K_{sR}(x_0)} |u(x,\ t_0) - \mathscr{P}_{r,\,s}(x,\ t_0)|^2 \xi^2_{r,\,s;\,R}\tau^2\,dx +$$

$$+ 2\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{r,\,s}|^2 \xi^2_{r,\,s;\,R}\tau\partial_t\tau\,dx\,dt. \tag{3.8}$$

При выводе (3.8) мы учли, что в силу определения (2.2)

$$\int\limits_{t_0-(2R)^2}^{t_0}\left[\int\limits_{K_{sR}(x_0)} (u - \tilde{u}_{r,\,s;\,R}(t) - p_0(x - x_0))\,\xi^2_{r,\,s;\,R}\,dx\right]\partial_t\tilde{u}_{r,\,s}(t)\,\tau^2\,dt = 0.$$

Собирая вместе оценки (3.6)—(3.8) с учетом того, что $\mathrm{V} \leqslant 0$, приходим к выводу, что

$$\iint\limits_{\tilde{Q}_{rR}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s-r)^2 R^2}\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{r,\,s}|^2\,dx\,dt + \frac{c}{(s-r)^m R^m}\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{r,\,s}|^m\,dx\,dt +$$

$$+ c\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} G^2(x,\ t)\,dx\,dt +$$

$$+ \theta\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\,dx\,dt$$

с некоторой константой θ, $0 < \theta < 1$. Заметим, что

$$\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{r,\,s}|^2\,dx\,dt \leqslant c\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^2\,dx\,dt, \tag{3.9}$$

$$\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{r,\,s}|^m\,dx\,dt \leqslant c\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^m\,dx\,dt. \tag{3.10}$$

Действительно,

$$\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \tilde{u}_{r,\,s;\,R}(t) - p_0(x - x_0)|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \tilde{u}_{2R}(t) - p_0(x - x_0)|^2\,dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |\tilde{u}_{2R}(t) - \tilde{u}_{r,\,s;\,R}(t)|^2\,dx\,dt. \tag{3.11}$$

Второй интеграл в правой части неравенства (3.11) оценим сверху следующим образом:

$$\iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} |\tilde{u}_{2R}(t) - \tilde{u}_{r,\,s;\,R}(t)|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} \left[\left(\int\limits_{K_{sR}(x_0)} (u - \tilde{u}_{2R} - p_0(x - x_0))\,\xi^2\,dx\right)^2 \Bigg/ \left(\int\limits_{K_{sR}(x_0)} \xi^2\,dx\right)^2\right] dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\tilde{Q}_{sR}(z_0)} \left[\int\limits_{K_{sR}(x_0)} |u - \tilde{u}_{2R} - p_0(x - x_0)|^2\,dx \Bigg/ \int\limits_{K_{sR}(x_0)} \xi^2\,dx\right] dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^2\,dx\,dt, \tag{3.12}$$

где $\xi = \xi_{x_0;\,r,\,s;\,R}(x)$. Очевидно, что из (3.11), (3.12) следует оценка (3.9). Оценка (3.10) устанавливается совершенно аналогичным образом. Применяя теперь лемму 2.2 в случае

$$f(r) = \iint\limits_{Q_{rR}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\,dx\,dt,$$

$$A = cR^{-2} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^2\,dx\,dt,$$

$$B = \frac{c}{R^m} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^m\,dx\,dt,$$

$$C = c \iint\limits_{Q_{2R}} G^2(x,\ t)\,dx\,dt,$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = m, \quad 0 < \theta < 1,$$

получаем оценку (3.4). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены все условия леммы 3.1. Тогда при всех $z_0 \equiv (x_0,\ t_0) \in Q_T$ и любых R таких, что $0 < R < (^1/_2)\,\mathrm{dist}\,(z_0,\ \partial Q_T)$, справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in [t_0 - R^2,\ t_0]} \int\limits_{K_R(x_0)} |u(x,\ t) - \mathscr{P}_R(x,\ t)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\,dx\,dt + c \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} G^2\,dx\,dt, \tag{3.13}$$

где константа c зависит от структуры системы (0.1) *и от* L_1.

Доказательство. Выбирая в качестве пробной функции в тождестве (1.1) функцию $\varphi = (u - \mathscr{P}_{2R})\,\xi_{2R}^2\tau^2\chi\{t < t_1\}$, где $t_1 \in [t_0 - R^2,\ t_0]$, и используя простую вариацию неравенства Пуанкаре, получим аналогично доказательству леммы 3.1 оценку

$$\sup_{t \in [t_0 - R^2,\ t_0]} \int\limits_{K_R(x_0)} |u - \mathscr{P}_{2R}|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\,dx\,dt + c \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} G^2(x,\ t)\,dx\,dt. \tag{3.14}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{K_R(x_0)} |u-\mathscr{P}_R|^2\,dx \leqslant 2 \int\limits_{K_R(x_0)} |u-\mathscr{P}_{2R}|^2\,dx + 2\,\mathrm{mes}\,K_R\cdot|\tilde{u}_R-\tilde{u}_{2R}|^2. \quad (3.15)$$

Замечая, что

$$|\tilde{u}_R-\tilde{u}_{2R}|^2 =$$
$$=\left|\int\limits_{K_R(x_0)} u(x,\ t)\,\xi_R^2\,dx\cdot\left(\int\limits_{K_R(x_0)} \xi_R^2\,dx\right)^{-1} -\right.$$
$$\left.-\int\limits_{K_R(x_0)} \tilde{u}_{2R}\xi_R^2\,dx\left(\int\limits_{K_R(x_0)} \xi_R^2\,dx\right)^{-1}\right|^2 =$$
$$=\left|\int\limits_{K_R(x_0)} (u(x,\ t)-\tilde{u}_{2R}-p_0(x-x_0)\ \xi_R^2)\,dx\left(\int\limits_{K_R(x_0)} \xi_R^2\,dx\right)^{-1}\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int\limits_{K_R(x_0)} |u-\tilde{u}_{2R}-p_0(x-x_0)|\,dx\right)^2 \mathrm{mes}^{-2}\,K_{R/2} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int\limits_{K_R(x_0)} |u-\mathscr{P}_{2R}|^2\,dx\right)\cdot\mathrm{mes}^{-1}K_{R/2}, \quad (3.16)$$

выведем из (3.14)—(3.16) оценку (3.13). Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.1), *рассматриваемой при условиях* H.1. *Тогда при всех $z_0 \equiv (x_0,\ t_0) \in Q_T$, всех $R > 0$ таких, что $Q_{2R}(z_0) \subset Q$, справедливо «первое неравенство Каччополи»*

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} [|u_x|^2+|u_x|^m]\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c\left[R^{-2}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u-\tilde{u}_{2R}|^2\,dx\,dt + R^{-m}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u-\tilde{u}_{2R}|^m\,dx\,dt + R^{n+2}\right],$$

где $\tilde{u}_{2R} \equiv \tilde{u}_{x_0;\,1,\,2;\,R}(t)$ (см. (2.2)), константа c зависит от структуры системы (3.1).

Лемма 3.4. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.1), *рассматриваемой при условиях* H.1. *Тогда при всех $z_0 \equiv (x_0,\ t_0) \in Q_T$, всех $R > 0$, таких, что $R < (1/2)\,\mathrm{dist}\,(z_0,\ \partial Q_T)$, справедливы неравенства*

$$\sup_{t\in[t_0-R^2,\ t_0]} \int\limits_{K_R(x_0)} |u(x,\ t)-\tilde{u}_R(t)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} [|u_x|^2+|u_x|^m+1]\,dx\,dt,$$

где константа c зависит от структуры системы (3.1).

Доказательства лемм 3.3, 3.4 аналогичны доказательствам лемм 3.1, 3.2 соответственно.

При доказательстве дальнейших результатов для решений системы (3.1) мы воспользуемся следующим известным предложением «об обратном неравенстве Гельдера» (см. [4, 17]).

Предложение 3.1. *Пусть функция $g = g\,(x,\ t)$ неотрицательна в цилиндре $Q = \Omega\times(T_1,\ T_2)$, и пусть при всех $Q_R(z_0) \subset Q$*

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} g^q\,dx\,dt \leqslant b\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} g\,dx\,dt)^q\right) + \iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} f^q\,dx\,dt + \theta\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} g^q\,dx\,dt, \quad (3.17)$$

где $z_0 \equiv (x_0, t_0)$, $f \in L^r(Q)$, $0 < q < r < \infty$, $\theta = \mathrm{const} \in (0, 1)$. *Тогда существует такое число* $\varepsilon = \varepsilon(n, q, r, b, \theta)$, *что* $g \in L_p(Q)$ *при* $p = q + \varepsilon$, *причем* $q + \varepsilon \leqslant r$. *Более того, для любого цилиндра* Q', $\overline{Q'} \subset Q$,

$$\left(\iint\limits_{Q'} g^p\,dx\,dt\right)^{1/p} \leqslant c\left(\iint\limits_{Q} g^q\,dx\,dt\right)^{1/q} + \left(\iint\limits_{Q} f^p\,dx\,dt\right)^{1/p}, \tag{3.18}$$

где $c = c(n, q, b, \theta)$.

Мы будем использовать также следующее неравенство Соболева—Пуанкаре.

Предложение 3.2. *Для любой функции* $u \in W_q^1(K_R(x_0))$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{K_R(x_0)} |n - u_{x_0, R} - p_0(x - x_0)|^q\,dx \leqslant c\left[\int\limits_{K_R(x_0)} |u_x - p_0|^{q_*}\,dx\right]^{q/q_*}, \tag{3.19}$$

где $q_* \equiv \dfrac{nq}{n+q}$, $q \geqslant \dfrac{n}{n-1}$, $u_{x_0, R} = \fint\limits_{K_R(x_0)} u\,dx$, $c = c(n, q)$.

Лемма 3.5. *Пусть* u — *обобщенное решение в* Q_T *системы* (3.1), *рассматриваемой при условиях* H.1, H.3. *Пусть* $p_0 \in \mathbb{R}^{nN}$, *причем* $|p_0| \leqslant L_1 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда при всех* $z_0 \in Q_T$ *таких, что* $Q_{4R}(z_0) \subset Q_T$, *при любом* $\theta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^2\,dx\,dt \leqslant c\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^{2_*}\,dx\,dt\right)^{\frac{2}{2_*}} + \\ + \theta\left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^2\,dx\,dt + \left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{m}{2}}\right] + \\ + c\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} G^2(x, t)\,dx\,dt + c\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} G^2(x, t)\,dx\,dt\right)^{\frac{m}{2}},\end{aligned} \tag{3.20}$$

где c *зависит только от структуры системы* (3.1) *и от* L_1.

Доказательство. Оценим интегралы правой части неравенства (3.4). Используя (3.19) при $q = 2$ и учитывая, что $2/2_* = (n+2)/n$, получим при $\forall\ \theta_1 > 0$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^2\,dx\,dt \leqslant \left(\max_{t \in [t_0 - (2R)^2,\, t_0]} \int\limits_{K_{2R}(x_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^2\,dx\right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\ \times \int\limits_{t_0 - (2R)^2} \left(\int\limits_{K_{2R}(x_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^2\,dx\right)^{\frac{n}{n+2}} dt \leqslant \\ \leqslant \left(\max_{t \in [t_0 - (2R)^2,\, t_0]} \int\limits_{K_{2R}(x_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^2\,dx\right)^{\frac{2}{n+2}} \cdot \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x - p_0|^{2_*}\,dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \theta_1 R^2 \max_{t \in [t_0 - (2R)^2,\, t_0]} \int\limits_{K_{2R}(x_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^2\,dx + c(\theta_1) R^{-4/n} \times \\ \times \left(\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x + p_0|^{2_*}\,dx\,dt\right)^{2/2_*}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Принимая во внимание лемму 3.2 и выбирая подходящее θ_1, получим при $\forall\ \theta \in (0, 1)$

$$R^{-2} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u + \mathcal{P}_{2R}|^2\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \theta \left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} [|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m]\, dx\, dt + \iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} G^2(x, t)\, dx\, dt \right] +$$

$$+ c(\theta) \left(\iint\limits_{Q_{4R}(y_0)} |u_x - p_0|^{2_*}\, dx\, dt \right)^{2/2_*}. \tag{3.22}$$

Для оценки второго интеграла в правой части (3.4) воспользуемся следующим известным неравенством Соболева—Пуанкаре (см. [2], гл. II)

$$\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \tilde{u}_{x_0,\, 2R}(t)|^m\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\max_{t \in [t_0 - (2R)^2,\, t_0]} \int\limits_{K_{2R}(x_0)} |u - \tilde{u}_{2R}(t)|^2\, dx \right)^{\frac{m}{m+2}} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x|^{\hat{m}}\, dx\, dt, \tag{3.23}$$

где $\hat{m} = \frac{mn}{n+2}$. Применяя неравенство Юнга, выведем из (3.23) при $\forall \varepsilon \in$ $\in (0, 1)$ оценку

$$\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^m\, dx\, dt \leqslant \varepsilon R^{-\frac{(m-2)(n+2)}{2} + m} \times$$

$$\times \left[\max_{t \in [t_0 - (2R)^2,\, t_0]} \int\limits_{K_{2R}(x_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^2\, dx \right]^{\frac{m}{2}} +$$

$$+ c(\varepsilon) R^{-\frac{4}{n} + m - 2} \left(\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x - p_0|^{\hat{m}}\, dx\, dt \right)^{2/2_*}. \tag{3.24}$$

Используя (3.24), лемму 3.2 (с учетом того, что $m/(n+2) \cdot 2/2_* = m/2$, $(^4/n - m + 2)\, 2_*\, (n+2)/4 = -((m-2)(n+2)/2) + m$) и выбирая подходящее ε, получим

$$R^{-m} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \mathcal{P}_{2R}|^m\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \theta \left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} (|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m)\, dx\, dt + c \iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} G^2 dx\, dt \right]^{\frac{m}{2}} +$$

$$+ c(\theta) \left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |u_x - p_0|^{\hat{m}}\, dx\, dt \right)^{2/2_*}. \tag{3.25}$$

Учитывая, что $\hat{m} = m2_*/2$ и что (см. лемму 2.1)

$$c_1 (|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m)^{2_*/2} \leqslant |V(u_x) - V(p_0)|^{2_*} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 (|u_x - p_0|^2 + |u_x - p_0|^m)^{2_*/2}, \tag{3.26}$$

выведем из (3.25), (3.26) оценку (3.20). Лемма 3.5 доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

Лемма 3.6. *Пусть u есть обобщенное решение в Q_T системы* (3.1), *пусть выполнено условие* Н.1. *Тогда при всех $z_0 \in Q_T$ и всех $R > 0$ таких, что $Q_{4R}(z_0) \subset Q_T$, при любом $\theta > 0$ справедливы неравенства*

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt \leqslant c\left(\iint\limits_{R_{4R}(z_0)} |V(u_x)|^{2_*}\,dx\,dt\right)^{1/2_*} +$$
$$+\theta\left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt + \left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{m}{2}}\right] + c,$$

где константа c зависит только от структуры системы (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.1), *рассматриваемой при условии* Н.1. *Пусть точка $z_0 \in Q_T$ обладает тем свойством, что при всех $z \in Q_{R_1}(z_0)$ (при некотором $R_1 > 0$) и всех $R < R_1$ имеют место оценки*

$$\iint\limits_{Q_{4R}(z)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt \leqslant L_2 < \infty.$$

Пусть $Q_{4R}(z_0) \subset Q_{R_2}(z_0)$. Тогда

$$\left(\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x)|^p\,dx\,dt\right)^{2/p} \leqslant c\left\{\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt + 1\right\}, \tag{3.27}$$

где $p = 2 + \varepsilon_1$, а константы $c > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ зависят лишь от структуры системы (3.1) *и величины L_2.*

Доказательство. Результат теоремы 3.1 легко следует из леммы 3.6 и предложения 3.1 в случае $g = |V(u_x)|^{2*}$, $q = {}^2/_{2*}$, $f = 1$.

Теорема 3.2. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.1). *Пусть выполнены все предположения леммы 3.5 и теоремы 3.1. Пусть точка $z_0 \in Q_T$ обладает тем свойством, что при всех $R < R_2$, $R_2 > 0$, и всех $z \in Q_{R_2}(z_0)$ имеют место неравенства*

$$\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z)} |V(u_x) - V(p_0)|^2\,dx\,dt\right)^{(m-2)/2} \leqslant L_3^{(m-2)/2} < \infty. \tag{3.28}$$

Пусть $Q_{4R}(z_0) \subset Q_{R_2}(z_0)$. Тогда

$$\left(\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^p\,dx\,dt\right)^{2/p} \leqslant c\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^2\,dx\,dt +$$
$$+ R^{2\gamma}h\left(|p_0| + \max_{Q_{4R}(z_0)} |u_0(t)| + c_0\right), \tag{3.29}$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, *$h(r)$ — неубывающая по r функция; $p = 2 + \varepsilon_2$; а константы $c > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ зависят от структуры системы* (3.1) *и от величин L_1, L_2, L_3. Если $F = F(p)$, то вместо неравенства* (3.29) *справедлива оценка* $\left(\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x - V(p_0)|^p\,dk\,dt\right)^{2/p} \leqslant c \iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^2 \times$ $\times\, dx\,dt$.

Доказательство. Пусть $0 < R < \min(R_1, R_2)$, где R_1, R_2 — числа из условий теорем 3.1, 3.2 соответственно. Ввиду леммы 3.5, теоремы 3.1 и условия (3.27) имеем

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^2\,dx\,dt \leqslant c\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x) - V(p_0)|^{2_*}\,dx\,dt\right)^{2/2_*} +$$

$$+\theta(1+c(L_3))\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}|V(u_x-V(p_0)|^2\,dx\,dt+$$

$$+c(L_2)\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}G^2\,dx\,dt.$$

Далее, применяя неравенство Пуанкаре, теорему 3.1, а также учитывая определение функции $G^2(x, t)$ (см. (3.3)), оценим

$$\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}G^2(x,t)\,dx\,dt=\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}\alpha(x,t)(1+|p_0|^2+|u_x|^2)^{m/2}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\max_{t\in[t_0-4R^2,\,t_0]}K(|u_0(t)|)\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(1+|p_0|^2+|u_x|^2)^{ms/4}\,dx\,dt\right)^{2/s_*}\cdot$$

$$\cdot\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}\{\min[(|x-x_0|+|u-u_0(t)|)^\delta,\ \overline{L}]\}^{s/(s-2)}\,dx\,dt\right)^{(s-2)/s}\leqslant$$

$$\leqslant c\max_{t\in[t_0-(4R)^2,\,t_0]}K(|u_0(t)|)\cdot\left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(1+|p_0|^2+|u_x|^2)^{\frac{m}{2}}\,dx\,dt+c\right]\cdot$$

$$\cdot\left[R^2\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(1+|u_x|^2)\,dx\,dt\right]^{1-\frac{2}{s}}. \tag{3.30}$$

Теперь из предложения 3.1 следует (3.29). Теорема 3.2 доказана.

Для нужд следующего параграфа сформулируем еще один результат.

Следствие 3.1. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы*

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}F_{p^i_\alpha}(u_x)=0,\quad i=1,\ldots,N, \tag{3.31}$$

рассматриваемой при условии Н.1 в случае $m=2$. Тогда существует такое число $p>2$ (зависящее только от структуры системы (3.31)), что

$$\left(\iint\limits_{Q_R(z_0)}|u_x-(u_x)_{z_0,R}|^p\,dx\,dt\right)^{2/p}\leqslant c\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}|u_x-(u_x)_{z_0,4R}|^2\,dx\,dt, \tag{3.32}$$

причем константа c зависит только от структуры системы (3.31) и от $|(u_x)_{z_0,R}|$.

Доказательство. Результат следствия 3.1 очевидным образом вытекает из теоремы 3.2 (в случае $m=2$, $V(p)=p$, $F\equiv F(p)$).

Теорема 3.3. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы (3.31), рассматриваемой при условиях Н.1 и Н.4 в случае $m=2$. Пусть $z_0\equiv\equiv(x_0,t_0)\in Q_T$ и $Q_{4R}(z_0)\subset Q_T$. Тогда для величины*

$$\tilde\Phi(z_0,\rho)\equiv\iint\limits_{Q_\rho(z_0)}|u_x-(u_x)_{z_0,\rho}|^2\,dx\,dt \tag{3.33}$$

при всех $\rho\in(0,4R)$ справедливо следующее «рекуррентное соотношение»

$$\tilde\Phi(z_0,\rho)\leqslant A\,[(\rho/4R)^2+(4R/\rho)^{n+2}\omega^{1-2/p}(|(u_x)_{z_0,4R}|,\ \tilde\Phi^{1/2}(z_0,4R))]\,\tilde\Phi(z_0,4R), \tag{3.34}$$

где $A=A(|u_{z_0,4R}|+|(u_x)_{z_0,4R}|)$, а $\omega(t,s)$ — функция из условия Н.4 (при $m=2$).

Доказательство. Положим $p_0 = (u_x)_{z_0, 4R}$. Пусть v — решение следующей задачи для параболической системы с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} v_t^i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p_0)\, v_{x_\beta}^j = 0 \text{ в } Q_R(z_0),\ i = 1, \ldots, N, \\ v = u \text{ на } \partial_p Q_R(z_0). \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Тогда хорошо известно (см. (22)), что для всех $\rho < R/2$ имеют место соотношения

$$\iint_{Q_\rho(z_0)} |v_x - (v_x)_{z_0,\rho}|^2\, dx\, dt \leqslant c \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \iint_{Q_R(z_0)} |v_x - (v_x)_{z_0, R}|^2\, dx\, dt \tag{3.36}$$

с некоторой константой c, зависящей только от структуры системы (3.35). Ввиду (3.36)

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}_{n+1} Q_\rho \cdot \widetilde{\Phi}(z_0, \rho) \leqslant \iint_{Q_\rho(z_0)} |u_x - (u_x)_{z_0,\rho}|^2\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant c \iint_{Q_\rho(z_0)} |v_x - (v_x)_\rho|^2\, dx\, dt + c \iint_{Q_\rho(z_0)} |v_x - u_x|^2\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4} \iint_{Q_R(z_0)} |v_x - (v_x)_R|^2\, dx\, dt + c \iint_{Q_R(z_0)} |u_x - v_x|^2\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4} \operatorname{mes}_{n+1} Q_R\, \widetilde{\Phi}(z_0, R) + c \iint_{Q_R(z_0)} |u_x - v_x|^2\, dx\, dt. \end{aligned}$$

Теперь оценим последний интеграл в (3.28). Складывая системы (3.35 и (3.31), получим

$$u_t^i - v_t^i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p_0)\left(u_{x_\beta}^j - v_{x_\beta}^j\right)\right\} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\alpha^i, \tag{3.37}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} H_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p_0)\, u_{x_\beta}^j - F_{p_\alpha^i}(u_x)\right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p_0)\left(u_{x_\beta}^j - p_{0_\beta}^j\right) - F_{p_\alpha^i}(u_x) + F_{p_\alpha^i}(p_0)\right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\left[F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p_0) - \widetilde{F}_{p_\alpha^i p_\beta^j}(u_x, p_0)\right]\left(u_{x_\beta}^j - p_{0\beta}^j\right)\right\}; \end{aligned}$$

$$\widetilde{F}_{p_\alpha^i p_\beta^j}(u_x, p_0) = \int_0^1 F_{p_\alpha^i p_\beta^j}(p_0 + \tau(u_x - p_0)\, d\tau. \tag{3.38}$$

Выбирая в качестве пробной функции в интегральном тождестве для (3.38) функцию $\varphi = u - v$ и используя условия Н.1, Н.4 и следствие 3.1, получим

$$\begin{aligned} \iint_{Q_R(z_0)} |u_x - v_x|^2\, dx\, dt \leqslant \iint_{Q_R(z_0)} |F_{pp}(p_0) - F_{pp}(p_0, u_x)|^2\, |u_x - p_0|^2\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant \iint_{Q_R(z_0)} \omega(|p_0|, |u_x - p_0|)\, |u_x - p_0|^2\, dx\, dt \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant \omega^{1-\frac{2}{p}}\left(|p_0|, \left(\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x - p_0|^2\, dx\, dt\right)^{1/2}\right) \iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |u_x - p_0|^2\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega^{1-\frac{2}{p}}\left(|(u_x)_{z_0, 4R}|, \tilde{\Phi}^{\frac{1}{2}}(z_0, 4R)\right)\tilde{\Phi}(z_0, 4R).$$

Подставляя полученную оценку в (3.28), получим неравенство

$$\tilde{\Phi}(z_0, \rho) \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \tilde{\Phi}(z_0, 4R) +$$

$$+ c\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \omega^{1-\frac{2}{p}}\left(|(u_x)_{z_0, 4R}, \tilde{\Phi}^{\frac{1}{2}}(z_0, 4R)\right)\tilde{\Phi}(z_0, 4R). \qquad (3.39)$$

Поскольку в случае $R/2 < \rho < 4R$ неравенство (3.30) очевидно, то теорема 3.1 доказана.

§ 4. Гельдеровская оценка градиента решения для систем дифференцируемой структуры

В этом параграфе мы будем рассматривать только систему вида (3.31), предполагая что для нее выполнены условия Н.1, Н.2 и Н.4 (в случае функции F, зависящей лишь от p). Подчеркнем, что здесь условия Н.1 и Н.4 могут выполняться при любом $m \geqslant 2$.

Лемма 4.1. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.31), *рассматриваемой при условиях* Н.1 *и* Н.2 *при каком-нибудь $m \geqslant 2$. Пусть $Q' = \Omega' \times (T_1, T_2)$, причем $Q' \subset Q_T$. Тогда существует такая константа $\mu = \mu(Q')$, что*

$$\sup(|u_x|, Q') \leqslant \mu. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Ввиду условия Н.2 доказательство оценки (4.1) проводится совершенно аналогично доказательству ограниченности градиента решения системы вида

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{|u_x|^{m-2}\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right\} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (4.2)$$

изложенному в работе [23].

Лемма 4.2. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.31), *рассматриваемой при условиях* Н.1, Н.2 *и* Н.4 *при каком-нибудь $m \geqslant 2$. Пусть $Q_R(z_0) \subset Q'$, $\overline{Q'} \lhd Q_T$. Тогда для величины*

$$\Phi(z_0, \rho) \equiv \iint\limits_{Q_\rho(z_0)} |V(u_x) - V(u_x)_{z_0, \rho}|^2\, dx\, dt \qquad (4.3)$$

при всех $\rho \in (0, R)$ справедливо неравенство

$$\Phi(z_0, \rho) \leqslant A\left[(\rho/R)^2 + (R/\rho)^{n+2}\, \omega^{1-\frac{2}{p}}(|u_x|_{z_0, R}, \Phi^{1/2}(z_0, R))\right]\Phi(z_0, R), \qquad (4.4)$$

где A и ω — такие же величины, как в (3.25).

Доказательство. Ввиду леммы 4.1 можно считать, что для системы (3.31), рассматриваемой в цилиндре $Q_{R+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, условия Н.1 и Н.4 выполнены в случае $m = 2$. Тогда из (3.34), (3.33) и леммы 2.1 легко следует неравенство (4.4). Лемма 4.2 доказана.

Далее мы всегда будем иметь дело с цилиндрами $Q_R(z_0)$, для которых выполнены условия $Q_R(z_0) \subset Q_{R_0}(z_0) \subset Q'$ при некотором фиксированном цилиндре Q', $\overline{Q'} \subset Q_T$. Ввиду леммы 4.1 существует такая константа μ, что для любого из указанных цилиндров $Q_R(z_0)$ справедлива оценка $\sup(|u_x|, Q_R(z_0)) \leqslant \mu$ (см. (4.1)).

Лемма 4.3. *Пусть выполнены все условия леммы 4.2. Тогда существуют такие достаточно малые положительные константы ε_1 и δ_1, зависящие только от структуры системы* (3.20), *что если для каких-либо $z_0 \equiv \equiv (x_0, t_0)$ и $R \leqslant R_0$, $\overline{Q_{R_0}(z_0)} \subset Q'$, $\overline{Q'} \subset Q_T$, выполнено неравенство*

$$\Phi(z_0, R) \leqslant \varepsilon_1 M(2R), \tag{4.5}$$

то

$$\Phi(z_0, \delta_1 R) \leqslant \delta_1 \Phi(z_0, R), \tag{4.6}$$

где

$$M(R) = M(z_0, R) = \max_{Q_R(z_0)} H(u_x), \quad H(u_x) =$$

$$= (B(u_x))^2 + (B(u_x))^m, \quad B(u_x) \equiv b^{ij} u^i_{x_\alpha} u^j_{x_\alpha},$$

причем (b^{ij}) — матрица из условия H.2.

Доказательство. Полагая в (4.4) $\rho = \delta_1 R$ и учитывая (4.5), (4.1), оценим

$$\Phi(z_0, \delta_1 R) \leqslant \left[A\delta_1^2 + \delta_1^{-(n+2)} \omega^{1-\frac{2}{p}} (\mu, \sqrt{\varepsilon_1} \| b \| \mu^2)\right] \Phi(z_0, R), \tag{4.7}$$

где $\|b\|$ — норма матрицы b. Выберем сначала δ_1 так, чтобы $A\delta_1 \leqslant 1/2$, а затем, учитывая свойства функции $\omega(t, s)$, выберем ε_1 столь малым, чтобы квадратная скобка в (4.7) не превосходила δ_1. Тогда из (4.7) следует (4.6). Лемма 4.3 доказана.

Докажем, что существуют константы ρ, $\delta_2 \sigma$, $\beta \in (0, 1/2)$, зависящие только от параметров, определяющих систему 4.2, при которых справедливы следующие утверждения (альтернативы), аналогичные альтернативам работы [10].

Альтернатива В. *Если*

$$\operatorname{mes}\{z \in Q_{(1+\sigma)R}(z_0) : H(u_x) < (1-\rho) M(2R)\} \geqslant \rho \operatorname{mes} Q_{(1+\sigma)R},$$

то

$$M(\delta_2 R) \leqslant (1-\beta) M(2R).$$

Альтернатива А. *Если*

$$\operatorname{mes}\{z \in Q_{(1+\sigma)R}(z_0) : H(u_x) < (1-\rho) M(2R)\} < \rho \operatorname{mes} Q_{(1+\sigma)R},$$

то

$$\Phi(z_0, R) < \varepsilon_1 M(2R),$$

где ε_1 — число из леммы 4.3.

Доказательство альтернатив А и В аналогично доказательству одноименных альтернатив в [10].

I. Доказательство альтернативы А. Обозначим

$$W = -\ln(1 + (H(u_x)/M(2R)) + \varepsilon_2) + \ln\rho, \tag{4.8}$$

где $\varepsilon_2 < \rho$. Пусть $R_0 = (1+\sigma) R \leqslant (3R)/2$. Тогда по предположению

$$\operatorname{mes}\{\{W_+ = 0\} \cap Q_{R_0}\} \geqslant \rho \operatorname{mes} Q_{R_0}.$$

Кроме того, очевидно, что $W_+ \leqslant \ln(\rho/\varepsilon_2)$ на Q_{2R}.

Предложение 4.1. *Справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{Q_{\frac{3}{2}R}} |(W_+)_x|^2 \, dx\, dt \leqslant cR^n (1 + \ln(\rho/\varepsilon_2)). \tag{4.9}$$

Доказательство. Возьмем в качестве пробной функции в интегральном тождестве для системы (4.2) функцию

$$u_{x_r}(M(2R))^{-1}(1+(m/2)(B(u_x))^{m-2})D^{-1}\xi,$$

где $D = 1 - \mathrm{H}(u_x)M^{-1}(2R) + \varepsilon_2$, а функция $\xi \geqslant 0$ и имеет компактный носитель в $Q_{2R}(z_0)$. Тогда

$$\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} u^i_{x_r t}u^i_{x_r}(1+(m/2)(B(u_x))^{m-2})D^{-1}M^{-1}(2R)\,\xi\,dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(u_x)\,u^i_{x_\alpha x_r}u^j_{x_\beta x_r}M^{-1}(2R)\left[1+\frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right]\xi D^{-1}\,dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}\left\{F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(u_x)\,u^i_{x_r}u^j_{x_\beta x_r}\left[1+\frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right]M^{-1}(2R)\,D^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\, b^{kl}u^k_{x_\gamma}u^l_{x_\gamma x_\alpha}\left[1+\frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right]M^{-1}(2R)\,D^{-1}\xi\right\}dx\,dt +$$

$$+\frac{m(m-2)}{4}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(u_x)\,u^i_{x_s}u^j_{x_\beta x_r}b^{kl}u^k_{x_\gamma}u^l_{x_\gamma x_\alpha}(B(u_x))^{m-4}\times$$

$$\times M^{-1}(2R)\,D^{-1}\xi\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(u_x)\,u^i_{x_r}u^j_{x_\beta x_r}M^{-1}(2R)\,D^{-1}\xi_{x_\alpha}\times$$

$$\times\left[1+\frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right]dx\,dt. \tag{4.10}$$

Поскольку $H(u_x)_{x_\alpha} = b^{ij}u^j_{x_\gamma x_\alpha}[1+(m/2)(B(u_x))^{m-2}]$, то, полагая в (4.10) $\xi = \eta^2$, где η — срезающая функция на $Q_{2R}(z_0)$ по отношению к цилиндру $Q_{(3R/2)}(z_0)$, получаем, используя условия H.1, H.2,

$$\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}(W\eta^2)_t\,dx\,dt + \lambda\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}(1+|u_x|^{m-2})\,|u_{xx}|\,M^{-1}(2R)\,D^{-1}\times$$

$$\times\left[1+\frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right]\eta^2\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_{(3R/2)}(z_0)}(1+|u_x|^{m-2})\,|W_x|^2\,dx\,dt -$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}(1+|u_x|^{m-2})\,|u_x|^2\,|u_{xx}|^2\,M^{-1}(2R)\,D^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[1+\frac{m}{2}(B)\,u_x))^{m-2}\right]\eta^2\,dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_{Q_{(3R/2)}(z_0)}(1+|u_x|^{m-2})\,|\nabla(B(u_x))^2|\,(B(u_x))^{m-4}\,dx\,dt -$$

$$-\varepsilon_0\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}(1+|u_x|^{m-2})\,|u_{xx}|^2M^{-1}(2R)\,D^{-1}\,|u_x|^2(B(u_x))^{m-4}\,\eta^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}\left[(1+|u_x|^{m-2})\,|W_x| + \hat{\varepsilon}_0(1+|u_x|^{m-2})|u_x|\,|u_{xx}|\,|\eta|\,|\eta_x|\,M^{-1}(2R)D^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{m}{2}\cdot(B(u_x))^{m-2}\right)\right]dx\,dt + \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}|W|\,|\eta_t|\,dx\,dt. \tag{4.11}$$

Предположим, что числа ε_0, $\hat{\varepsilon}_0$ из условия Н.2 удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_2\lambda/2, \ \hat{\varepsilon}_0 < \varepsilon_2^{1/2}, \tag{4.12}$$

где λ — число из условия Н.1. Тогда при $\forall\varepsilon \in (0, 1)$

$$(1 + |u_x|^{m-2})|u_x||u_{xx}|\left(1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right)M^{-1}(2R)D^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(1 + |u_x|^{m-2})|u_{xx}|^2\left(1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right)M^{-1}(2R)D^{-1} +$$

$$+ c(\varepsilon)(1 + |u_x|^{m-2})|u_x|^2\left(1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right)M^{-1}(2R)\cdot D^{-1},$$

и так как

$$(1 + |u_x|^{m-2})|u_x|^2 \leqslant c[(B(u_x))^2 + (B(u_x))^m] \leqslant cM(2R)$$

на $Q_{2R}(z_0)$, то после приведения подобных членов получаем

$$\iint\limits_{Q_{\frac{3}{2}R}(z_0)} (1 + |u_x|^{m-2})|W_x|^2\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{K_{2R}(x_0)} |W(x, t_0)|\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} (1 + |u_x|^{m-2})|\eta_x|^2\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |W||\eta_t|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c[(1 + \mu^{m-2})R^n + \ln(\rho/\varepsilon_2) + \ln(\rho/\varepsilon_2)]R^n, \tag{4.13}$$

где μ — константа из неравенства (4.7). Из (4.13) очевидным образом следует оценка (4.9). Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Существуют константы* $\gamma < 1$, $\delta > 0$ (*причем* $(1 + \delta)(1 + \sigma) < {}^3/_2$) *такие, что либо*

$$\int\limits_{t_0 - (\rho/2)R^2}^{t_0} \int\limits_{K_{R_0(1+\delta)}(x_0)} (W - \gamma\overline{M})_+^2\,dx\,dt \leqslant cR_0^2 \times$$

$$\times \int\limits_{t_0-(\rho/2)R^2}^{t_0} \int\limits_{K_{R_0(1+\partial)}} |\nabla W_+|^2\,dx\,dt, \tag{4.14}$$

либо неверно хотя бы одно из неравенств

$$\overline{M}^2 \geqslant \frac{1}{(1+\delta)^n}\ln^2\frac{\rho}{\varepsilon_2}, \quad \overline{M}^2 \geqslant \frac{8}{\rho}c\delta^{-2}\ln\frac{\rho}{\varepsilon_2}, \tag{4.15}$$

где $\overline{M} \geqslant \max(W, Q_{(3/2)R})$.

Доказательство. Пусть

$$A_{k,\rho}(t) \equiv \{x \in K_\rho(x_0) : W(x, t) > k\}.$$

Прежде всего заметим, что существует такое значение $t_1 \in \left[t_0 - R_0^2, t_0 - \frac{\rho}{2}R_0^2\right]$, при котором

$$\operatorname{mes} A_{0,R_0}(t_1) \leqslant \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)\operatorname{mes} K_{R_0},$$

поскольку в противном случае

$$\operatorname{mes}(\{W_t > 0\} \cap Q_{R_0}) \geqslant \int\limits_{t_0-R_0^2}^{t_0-(\rho/2)R_0^2} \operatorname{mes} A_{0,R_0}(s)\,ds >$$

$$> (1 - \rho/2)^2 \operatorname{mes} K_{R_0}R_0^2 > (1 - \rho)\operatorname{mes} Q_{R_0}.$$

Обозначим через $\varphi(x)$ срезающую функцию на $K_{(1+\delta)R_0}$ по отношению к K_{R_0} и положим в (4.10) $\xi = W_+\varphi(x)\chi[t_1, t_2]$, где $\chi[t_1, t_2]$ есть характеристическая функция промежутка $[t_1, t_2]$ при любом $t_2 \in [t_1, t_0]$. Тогда

$$\int\limits_{K_{R_0}(x_0)} W(x, t_2)\,dx + \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(u_x)\, u^i_{x_\alpha x_r} u^j_{x_\beta x_r} M^{-1}(2R)\, D^{-1} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right] W_+\varphi^2\,dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\,|\nabla W_+|^2\, W_+\varphi^2(x)\,dx\,dt -$$

$$- \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\,|u_x|^2\,|u_{xx}|^2 M^{-2}(2R)\, D^{-1}\left[1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right] \times$$

$$\times W_+\varphi^2(x)\,dx\,dt + \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\,|\nabla (B(u_x))^2|^2 M^{-1}(2R)\, D^{-1} \times$$

$$\times W_+\varphi^2(x)\,dx\,dt - \varepsilon_0 \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\,|u_x|^2\,|u_{xx}|^2 M^{-1}(2R)\, D^{-1} \times$$

$$\times (B(u_x))^{m-4}\, W_+\varphi^2\,dx\,dt + \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\,|\nabla W_+|^2\,\varphi^2(x)\,dx\,dt -$$

$$- (\varepsilon_0/\varepsilon_2) \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2}) \frac{|u_x|^2\,|u_{xx}|^2}{M^2(2R)\,D}\left(1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right)\varphi^2(x)\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{K_{R_0}(1+\sigma)} W^2_+(x, t_1)\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\,|\nabla W_+|\, W_+\varphi\,|\varphi_x|\,dx\,dt +$$

$$+ (\hat{\varepsilon}_0/\varepsilon_2^{1/2}) \iint\limits_{\overline{Q}_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2}) \frac{|u_x|\,|u_{xx}|}{M(2R)\,D^{1/2}}\left(1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right) \times$$

$$\times W_+\varphi\,|\varphi_x|\,dx\,dt. \qquad (4.16)$$

Здесь $\overline{Q}_{R_0}(z_1) = K_{R_0(1+\sigma)}(x_0) \times [t_1, t_2]$. Налагая на ε_0 и $\hat{\varepsilon}_0$ условия, аналогичные (4.12), выведем из (4.16) неравенство

$$\int\limits_{K_{R_0}} W^2_+(x, t_2)\,dx \leqslant \int\limits_{K_{R_0}(1+\sigma)} W^2_+(x, t_1)\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{Q_{R_0}(z_1)} (1 + |u_x|^{m-2})\, W_+\,|\varphi_x|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \ln^2(\rho/\varepsilon_2)\,\mathrm{mes}\, A_{0,\,R_0(1+\delta)} + c(t_2 - t_1)(\delta R_0)^{-2}(1 + \mu^{m-2}) \times$$

$$\times \ln\frac{\rho}{\varepsilon_2}\cdot \mathrm{mes}\, K_{R_0(1+\delta)} \leqslant \left[\mathrm{mes}\,(K_{R_0(1+\delta)} \backslash K_{R_0}) + \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)\mathrm{mes}\, K_{R_0}\right] \times$$

$$\times \ln^2(\rho/\varepsilon_2) + c\delta^{-2}\,\mathrm{mes}\, K_{R_0(1+\delta)}\cdot \ln(\rho/\varepsilon_2).$$

Величину δ выберем столь малой, чтобы

$$\operatorname{mes}(K_{R_0(1+\delta)} \setminus K_{R_0}) \leqslant (\rho/16) \operatorname{mes} K_{R_0}.$$

Тогда

$$\int\limits_{K_{R_0}} W_+^2(x, t_2)\,dx \leqslant \left[\frac{1-\frac{\rho}{4}}{(1+\delta)^n} \ln^2(\rho/\varepsilon_2) + c\delta^{-2}\ln(\rho/\varepsilon_2)\right] \operatorname{mes} K_{R_0(1+\delta)}.$$

Если $\gamma < 1$, то

$$(\gamma\overline{M})^2 \operatorname{mes} A_{\gamma\overline{M},\, R_0}(t_2) \leqslant \operatorname{mes} K_{R_0(1+\delta)}\left[1 - \rho/4\,\frac{\ln^2(\rho/\varepsilon_2)}{(1+\delta)^n} + c\delta^{-2}\ln(\rho/\varepsilon_2)\right].$$

Пусть условие (4.15) не имеет места, т. е. $\ln^2(\rho/\varepsilon_2) \leqslant (1+\delta)^n\,\overline{M}$ и $c\delta^{-2}\ln(\rho/\varepsilon_2) \leqslant (\rho//8)\,\overline{M^2}$. Тогда

$$\operatorname{mes} A_{\gamma\overline{M},\, R_0(1+\delta)}(t_2) \leqslant \operatorname{mes}(K_{R_0(1+\delta)} \setminus K_{R_0}) + \operatorname{mes} A_{\gamma\overline{M},\, R^0}(t_2) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} K_{R_0(1+\delta)}\,[(\rho/16) + \gamma^{-2}(1-(\rho/8))] \leqslant (1-\rho/32) \operatorname{mes} K_{R_0(1+\delta)},$$

если γ достаточно близко к единице. Применяя теперь известное неравенство Де-Джорджи (см. [2], с. 87), имеем

$$\int\limits_{K_{R_0(1+\delta)}} (W(x, t_2) - \gamma\overline{M})_+^2\,dx \leqslant cR_0^2 \int\limits_{K_{R_0(1+\delta)}} |\nabla W_+|^2\,dx.$$

Интегрируя это неравенство по $t_2 \in [t_0 - \rho/2R_0^2,\ t_0]$, получим (4.14). Предложение 4.2. доказано.

Предложение 4.3. *Пусть* $\rho_0 < 1/2$, $\sigma_0 \leqslant 1/2$, $\overline{M} := \sup\limits_{Q_{\rho_0(1-\sigma_0)}} W_+$. *Предположим, что существует константа* $\gamma < 1$ *такая, что для всех* $k \geqslant \gamma\overline{M}$, $\rho < \rho_0$, $\sigma < \sigma_0$ *имеют место неравенства*

$$\sup_{t\in[t_0-(1-\sigma^2)\rho^2,\, t_0]} \int\limits_{K_{(1-\sigma)\rho}} (W-k)_+^2\,dx + \iint\limits_{Q_{(1-\sigma)\rho}} |\nabla(W-k)_+|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\sigma\rho)^{-2}\iint\limits_{Q_\rho}(W-k)_+^2\,dx\,dt. \tag{4.17}$$

Тогда

$$\overline{M}^2 \leqslant c(c_1, \sigma_0, \gamma)\iint\limits_{Q_{\rho_0}}(W-\gamma\overline{M})_+\,dy\,dx.$$

Предложение 4.3 аналогично теореме 6.2 монографии [2]. Кроме того, доказательство его приведено в [10], с. 393.

Для завершения доказательства альтернативы А положим в (4.10) $\xi\,(W-k)_+\eta^2$ с подходящей срезающей функцией η, получим оценки (4.17), с $\rho_0 = (\rho_2/2)R$, $\sigma_0 = 1/2$. Тогда из предложений 4.3 и 4.2 при $\overline{M} = \overline{M}((\rho/4)R)$ и предложения 4.1 выведем неравенство

$$\overline{M}^2((\rho/4)R) \leqslant c\iint\limits_{Q_{(\rho/2)R}}(W-\gamma\overline{M}((\rho/4)R))_+^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{t_0-(\rho/2)R^2}^{t_0}\ \int\limits_{K_{R_0(1+\sigma)}}(W-\gamma\overline{M}(\rho/4)R_+^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant cR_0^2 \int\limits_{t_0-(\rho/2)R^2}^{t_0} \int\limits_{K_{R_0}(1+\sigma)} |\nabla W_+|^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant cR_0^2 \iint\limits_{Q_{\frac{3}{2}R}} |\nabla W_+|^2 \, dx\, dt \leqslant c \ln (\rho/\varepsilon_2). \qquad (4.18)$$

Если же хотя бы одно из неравенств в (4.15) неверно, то

$$\overline{M}(\delta_2 R) \leqslant \frac{1}{(1+\delta)^{\frac{n}{2}}} \ln (\rho/\varepsilon_2), \qquad (4.19)$$

где $\delta_2 \leqslant \frac{\rho}{4}$. Выбирая ε_2 достаточно малым, заключаем, что из (4.18) следует (4.19). Тогда элементарные вычисления приводят к оценке

$$M(\delta_2 R) < (1-\beta)\, M(2R), \qquad (4.20)$$

где $\beta = \rho^{1-\theta}\varepsilon_2^{\theta} - \varepsilon_2$, причем $\varepsilon_2 < \rho$, $0 < \theta < 1$.

II. Доказательство альтернативы B. Обозначим

$$W = H(u_x) - (1-2\rho)\, M(2R).$$

Полагая в интегральном тождестве для системы (3.20) в качестве пробной функции φ функцию

$$\varphi = u_{x_s}\left[1 + \frac{m}{2}(B(u_x))^{m-2}\right] W_+ \eta^2,$$

где η — срезающая на Q_{2R} по отношению к цилиндру $Q_{R(1+\sigma)}$, с помощью стандартных оценок получим

$$\iint\limits_{Q_{R(1+\sigma)}} (1 + |u_x|^{m-2})\, |u_{xx}|^2 W_+ \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c \iint\limits_{Q_{2R}} W_+^2 \left[(1 + |u_x|^{m-2})\, |\eta_x|^2 + |\eta_t|\right] dx\, dt. \qquad (4.21)$$

Замечая, что $W_+ \leqslant 2\rho\, M(2R)$ на Q_{2R} и $W_+ \geqslant \rho M(2R)$ на множестве $A^{\rho}_{(1+\sigma)R} := \{z \in Q_{(1+\sigma)R} : H(u_x) > (1-\rho)\, M(2R)\}$, получим

$$\iint\limits_{A^{\rho}_{(1+\sigma)R}} (1 + |u_x|^{m-2})\, |u_{xx}|^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \rho M(2R) \iint\limits_{Q_{2R}} \left[(1 + |u_x|^{m-2})\, |\eta_x|^2 + |\eta_s|\right] dx\, dt \leqslant cM(2R)\, R^n \cdot \rho \qquad (4.22)$$

Заметим, что, кроме того, имеет место оценка

$$\iint\limits_{Q_{(1+\sigma)R}} (1 + |u_x|^{m-2})\, |u_{xx}|\, dx\, dt \leqslant c \iint\limits_{Q_{2R}} (1 + |u_x|^{m-2})\, |\eta_x| + \eta_t \,|\, dx\, dt \leqslant cR^n. \qquad (4.23)$$

Определим на промежутке $I_{(1+\sigma)R} \equiv [t_0 - (1+\sigma)^2 R^2, t_0]$ функцию

$$\widetilde{V}_R(u_x)(t) := \int\limits_{K_{(1+\sigma)R}} (1 + |u_x|^2)^{\frac{m-2}{4}} u_x \, dx,$$

и докажем, что

$$\iint\limits_{Q_{(1+\sigma)R}} |V(u_x)-\tilde{V}_R(u_x)(t)|^2\,dx\,dt \leqslant cM(2R)\,\rho^{\frac{1}{n+1}}R^{n+2}. \qquad (4.24)$$

Для этой цели воспользуемся неравенством Соболева—Пуанкаре

$$\int\limits_{K_\rho} |\omega|^2 dx \leqslant c\int\limits_{K_\rho}(|\omega_x|^2)^{\frac{n}{n+1}}dx\left(\int\limits_{K_\rho}|\omega|\,dx\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

справедливым для любой функции, имеющей нулевое среднее по K_ρ. (см. [1], с. 79, при $\alpha = n/(n+1)$, $r=1$, $p=2$, $m=2n/(n+2)$.) Пусть $\omega = V(u_x) - V_R(u_x)(t)$. Учитывая неравенство $|\omega| \leqslant cM^{1/2}(2R)$, получим

$$\iint\limits_{Q_{(1+\sigma)R}} |V(u_x)-\tilde{V}_R(u_x)(t)|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant cR^{\frac{2n}{n+1}}M^{\frac{1}{n+1}}(2R)\iint\limits_{Q_{(1+\sigma)R}}[(1+|u_x|^{m-2})|u_{xx}|^2]^{\frac{n}{n+1}}dx\,dt. \qquad (4.25)$$

Разобьем область интегрирования на две части $A^\rho_{(1+\sigma)R}$ и $Q_{(1+\sigma)R}\setminus A^\rho_{(1+\sigma)R}$. Имеем

$$\iint\limits_{A^\rho_{(1+\sigma)R}} [(1+|u_x|^{m-2})|u_{xx}|^2]^{n/(n+1)}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant\left[\iint\limits_{A^\rho_{(1+\sigma)R}}(1+|u_x|^{m-2})|u_{xx}|^2\,dx\,dt\right]^{n/(n+1)}\mathrm{mes}^{1/(n+1)}\,Q_{(1+\sigma)R}\leqslant$$

$$\leqslant c\rho^{n/(n+1)}M^{n/(n+1)}(2R)\,R^{n^2/(n+1)}R^{(n+2)/(n+1)}. \qquad (4.26)$$

С другой стороны, используя условие альтернативы B и оценку (4.23), получим

$$\iint\limits_{Q_{(1+\sigma)R}\setminus A^\rho_{(1+\sigma)R}} [(1+|u_x|^{m-2})|u_{xx}|^2]^{n/(n+1)}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\iint\limits_{Q_{(1+\sigma)R}}(1+|u_x|^{m-2})|u_{xx}|^2\,dx\,dt\right)^{n/n+1}\mathrm{mes}^{1/(n+1)}[Q_{(1+\sigma)R}\setminus A^\rho_{(1+\sigma)R}]\leqslant$$

$$\leqslant cM^{n/(n+1)}(2R)\,R^{n^2/(n+J)}\rho^{1/(n+1)}R^{(n+2)/(n+1)}. \qquad (4.27)$$

Собирая эти оценки вместе и подставляя в (4.25), получаем (4.24). Далее ввиду лемм 3.4, 4.1, 2.1 и 2.3 справедливо неравенство

$$\iint\limits_{Q_R}|V(u_x)-V((u_x)_R(t))|^2\,dx\,dt \leqslant c\iint\limits_{Q_R}|V(u_x)-\tilde{V}_R(u_x)(t)|^2\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c(\sigma)\iint\limits_{Q_{R(1+\sigma)}}|V(u_x)-\tilde{V}_R(u_x)(t)|^2\,dx\,dt,$$

где $(u_x)_R(t) = \fint\limits_{K_R} u_x(x,t)\,dx$. Тогда из (4.24) следует оценка

$$\iint\limits_{Q_R}|V(u_x)-V((u_x)_R(t))|^2\,dx\,dt \leqslant cM(2R)\,\rho^{\frac{1}{n+1}}R^{n+2}. \qquad (4.28)$$

Осталось оценить величину

$$D = \iint_{Q_R} | V((u_x)_R(t)) - V((u_x)_R) |^2 \, dx\, dt.$$

Заметим, что ввиду леммы 1.1

$$D \leqslant c \iint_{Q_R} (1 + |(u_x)_R(t)|^{m-2} + |(u_x)_R|^{m-2}) \, |(u_x)_R(t) - (u_x)_R|^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c(1+\beta^{m-2}) \iint_{Q_R} |(u_x)_R(t) - (u_x)_R|^2 \, dx\, dt \equiv$$

$$\equiv c(1+\beta^{m-2}) D_1 \leqslant c_1 D_1.$$

Величину D_1 в свою очередь можно оценить как

$$D_1 \leqslant \operatorname{mes} Q_R \sup_{I_R} \left| \frac{1}{\operatorname{mes} K_R} \int_{K_R} u_x(x, t)\, dx - \frac{1}{\operatorname{mes} I_R} \int_{I_R} \left(\fint_{K_R} u_x(x,s)\, dx \right) ds \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} Q_R \frac{1}{\operatorname{mes}^2 K_R} \sup_{s,\, t \in I_R} \left| \int_{K_R} (u_x(x, t) - u_x(x, s))\, dx \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant cR^{2-n} \sup_{s,\, t \in I_R} \left| \int_{K_R} (u_x(x, t) - u_x(x, s))\, dx \right|^2, \tag{4.29}$$

где $I_R = [t_0 - R^2, t_0]$. Пусть φ — срезающая функция для шара $K_{R(1+\sigma)}$ по отношению к K_R. Тогда

$$E = \left| \int_{K_R} (u_x(x, t) - u_x(x, s))\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{K_{(1+\sigma)R}} (u_x(x, t) - u_x(x, s))\, \varphi(x)\, dx \right| + 2\mu \operatorname{mes}(K_{(1+\sigma)R} \setminus K_R).$$

Интегрируя систему (3.20) от s до t, умножая на φ и интегрируя по $K_{(1+\sigma)R}$, получаем

$$E \leqslant c\mu\sigma R^n + \left| \int_s^t \int_{K_{(1+\sigma)R}} F_{p^i_\alpha p^j_\beta}(u_x)\, \nabla u^j_{x_\beta} \varphi_{x_\alpha}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\mu\sigma R^n + c(\sigma R)^{-1} \iint_{Q_{(1+\sigma)R}} (1 + |u_x|^{m-2})\, |u_{xx}|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c\sigma M^{1/2}(2R) R^n + c(\sigma R)^{-1} (1+\mu^{m-2})^{1/2} \times$$

$$\left(\iint_{Q_{(1+\sigma)R}} (1 + |u_x|^{m-2})\, |u_{xx}|^2\, dx\, dt \right)^{1/2} \operatorname{mes}^{1/2} Q_R. \tag{4.30}$$

Оценивая интеграл во втором слагаемом правой части последнего неравенства точно так же, как это сделано в (4.26), (4.27), получаем

$$E \leqslant c\sigma M^{1/2}(2R) R^n + \frac{c}{\sigma R} M^{1/2}(2R)\, \rho^{1/2} R^{n/2} R^{(n/2)+1} \leqslant$$

$$\leqslant cM^{1/2}(2R) R^n (\sigma + \rho^{1/2}\sigma^{-1}). \tag{4.31}$$

Следовательно,

$$D_1 \leqslant cM(2R) R^{2+n} (\sigma + \rho^{1/2}\sigma^{-1})^2.$$

Собирая вместе оценки (4.29)—(4.31), и учитывая (4.28), получаем

$$\iint\limits_{Q_R} |V(u_x) - V((u_x)_R)|^2\,dx\,dt \leqslant cM(2R)\,R^{n+2}\left(\rho^{\frac{1}{n+1}} + \sigma^2 + \rho\sigma^{-2}\right),$$

и выбирая сначала σ, а затем ρ достаточно малыми (в зависимости от ε_1), получаем утверждение альтернативы В.

Из альтернатив А и В и леммы 4.3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Пусть ε_1 и δ_1 — числа из леммы 4.3, δ_2 — число из альтернативы* А, *причем $\delta_1 < \delta_2/2$. Тогда существует такое число $\beta \in (0, 1)$, что либо*

$$\Phi(z_0, \delta_1 R) < \delta_1 \Phi(z_0, R),$$

либо

$$\Phi(z_0, R) \geqslant \varepsilon_1 M(z_0, 2R),$$

$$M(z_0, \delta_2 R) < (1-\beta)\,M(z_0, 2R),$$

где $\Phi(z_0, \rho)$ и $M(z_0, \rho)$ определены соответственно в (4.3) *и* (4.7). Очевидно, что

$$\Phi(z_0, R) \leqslant c_1 M(z_0, R).$$

Теорема 4.1. *Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы* (3.20), *рассматриваемой при условиях* H.1, H.2, H.4 *при каком-нибудь $m \geqslant 2$. Тогда существует показатель $\sigma \in (0, 1/2)$, при котором*

$$\Phi(z_0, \rho) \leqslant c\,(\rho/R)^{2\sigma}\,\Phi(z_0, R), \tag{4.32}$$

причем константа c зависит только от структуры системы (3.20).

Доказательство. Теорема 4.1 выводится из леммы 4.4 точно так же, как теорема 3.1 из леммы 3.1 в работе [5]. А именно пусть ε_1, δ_1, δ_2 — такие, как в лемме 4.4. Положим $\rho_i = \delta_1^i R$, $i = 1, 2, \ldots$ Принимая во внимание лемму 4.4, разобьем множество натуральных чисел на два подмножества

$$A \equiv \{i : \Phi(\rho_{i+1}) \leqslant \delta_1 \Phi(\rho_i)\},$$

$$B \equiv \{i : \Phi(\rho_i) > \varepsilon_1 M(2\rho_i),\ M(\delta_2\rho_i) \leqslant (1-\beta)\,M(2\rho_i)\}.$$

Пусть k и h — такие натуральные числа, что

$$c_1(1-\beta)^k/\varepsilon_1 < \delta_1,\quad c_1^2\delta_1^{(h/k)-1}/\varepsilon_1^2 < \delta_1^2.$$

Ясно, что если положить

$$r_j = \rho_{jh} = \delta_1^{jh} R \quad (r_{j+1} = \delta_1^h r_j),$$

то имеем

$$\Phi(r_{j+1}) < \delta_1 \Phi(r_j). \tag{4.33}$$

Действительно, обозначив $I_j \equiv [jh, (j+1)h]$, получаем два случая.

Случай 1. $I_j \cap B = \{n_1, \ldots, n_p\}$ содержит не менее k точек, в этом случае

$$\Phi(r_{j+1}) \leqslant c_1 M(\rho_{(j+1)h}) \leqslant c_1 M(\delta_1\rho_{n_p}) \leqslant c_1(1-\beta)\,M(2\rho_{n_p}) \leqslant$$

$$\leqslant c_1(1-\beta)\,M(\delta_2\rho_{n_{p-1}}) \leqslant c_1(1-\beta)^2 M(2\rho_{n_{p-1}}) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant c_1(1-\beta)^k M(2\rho_{n_1}) \leqslant (c_1(1-\beta)^k/\varepsilon_1)\,\Phi(\rho_{n_1}) \leqslant (c_1(1-\beta)^k/\varepsilon_1)\,\Phi(r_j),$$

и поэтому из-за выбора k следует (4.33).

Случай 2. $I_j \cap B$ содержит менее чем k точек. Но тогда $I_j \cap A$ содержит максимально длинный набор натуральных чисел, идущих подряд $\bar{n}$, $\bar{n}+1, \ldots, \bar{n}+p$ такой, что $p > (h/k) - 1$. Следовательно,

$$\Phi(\rho_{\bar{n}+p+1}) = \Phi(\delta_1 \rho_{\bar{n}+p}) < \delta_1 \Phi(\rho_{\bar{n}+p}) <$$
$$< \delta_1^2 \Phi(\rho_{\bar{n}+p-1}) < \ldots < \delta_1^{(h/k)-1} \Phi(\rho_{\bar{n}}).$$

Из максимальности набора следует, что числа $\bar{n}-1$, $\bar{n}+p+1$ принадлежат уже B. Теперь мы имеем несколько возможностей:

либо a) $\bar{n} = jh$ (и тогда $\Phi(\rho_{\bar{n}}) = \Phi(r_j)$);

либо b) $\bar{n}-1$ — есть минимум целых чисел в $B \cap I_j$, меньших, чем $\bar{n}$ $\left(\text{в этом случае } \Phi(\rho_{\bar{n}}) \leqslant c_1 M(2\rho_{\bar{n}-1}) \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon_1} \Phi(\rho_{\bar{n}-1}) \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon_1} \Phi(r_j)\right)$;

либо c). Пусть q — наименьшее натуральное число, принадлежащее $B \cap I_j$ и меньшее, чем $\bar{n}-1$ $\left(\text{тогда } \Phi(\rho_{\bar{n}}) \leqslant c_1 M(\rho_{\bar{n}}) \leqslant c_1 M(2\rho_q) \leqslant \right.$ $\left. \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon_1} \Phi(\rho_q) < \frac{c_1}{\varepsilon_1} \Phi(r_j)\right)$;

либо 1) $\bar{n}+p+1 = j(h+1)$ (и тогда $\Phi(r_{j+1}) = \Phi(\rho_{\bar{n}+p+1})$);

2) $\Phi(r_{j+1}) < c_1 M(\rho_{j+1}) \leqslant c_1 M(r\rho_{\bar{n}+p+1}) \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon_1} \Phi(\rho_{\bar{n}+p+1})$.

Таким образом, в любом случае

$$\Phi(r_{j+1}) \leqslant c_1^2 \frac{\delta_1^{\frac{h}{k}-1}}{\varepsilon_1^2} \Phi(r_j),$$

и снова имеет место (4.33). Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. *Очевидно, что из теоремы* 4.1 *вытекает, что* u_x *непрерывна, по Гельдеру, в окрестности точки* z_0.

§ 5. Доказательство основного результата

В этом параграфе мы рассматриваем систему (0.1) при условиях H.1—H.5 при любом фиксированном $m \geqslant 2$.

Лемма 5.1. *Пусть* u — *обобщенное решение в* Q_T *системы* (0.1), *рассматриваемой при условиях* H.1 и H.5. *Тогда для всех* $z_0 \in Q'$, $Q' \subset Q_T$ *и любых* $0 < R < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z_0, \partial Q)$ *имеют место неравенства*

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} |u - u_{z_0,R}|^2 \, dx\, dt \leqslant cR^{2-\frac{m-2}{m-1}} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x|^m \, dx\, dt +$$
$$+ cR^2 \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u_x|^2 \, dx\, dt + cR^2 \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} f_1(x,t)\, dx\, dt, \qquad (5.1)$$

где константа c *зависит от параметров, определяющих систему* (0.1), *и от* $M = \sup\limits_{Q_T} |u|$.

Доказательство. Оценим величину, стоящую в левой части неравенства (5.1), следующим образом

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} |u - u_R|^2 \, dx\, dt \leqslant \iint\limits_{Q_R(z_0)} |u - \tilde{u}_{2R}^*|^2 \, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \tilde{u}_{2R}(t)|^2 dx\, dt + 2 \iint\limits_{Q_R(z_0)} |\tilde{u}_{2R}(t) - \tilde{u}_{2R}^*|^2 \, dx\, dt, \qquad (5.2)$$

где $\tilde{u}_{2R}(t)$ — функция, определенная равенством (2.2) при $s=2$, $r=1$, а $u^*_{2R} = \displaystyle\fint_{t_0-(2R)^2}^{t_0} \tilde{u}_{2R}(t)\,dt$. Используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\iint\limits_{Q_R} |u-u_R|^2\,dx\,dt \leqslant cR^2 \iint\limits_{Q_{2R}} |u_x|^2\,dx\,dt + \operatorname{mes} Q_{2R} \max_{s,\,t\in I_R} |\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)|^2. \tag{5.3}$$

Для того чтобы оценить последнее слагаемое в правой части неравенства (5.3), положим в интегральном тождестве (1.1) $\varphi = \xi_{2R}(\tilde{u}_{2R}(t) - \tilde{u}_{2R}(s))\,\chi([s,t])$. Тогда при любом $\varepsilon\in(0,1)$

$$\begin{gathered}
R^n|\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)|^2 \leqslant \\
\leqslant \int_s^t \int\limits_{K_{2R}} |F_p(x,t,u,u_x)|\,|\xi_x|\,dx\,dt\,|\tilde{u}_{2R}(t)- \\
-\tilde{u}_{2R}(s)| + \int_s^t \int\limits_{K_{2R}} |f(x,t,u,u_x)|\,dx\,dt\,|\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)| \leqslant \\
\leqslant c\int_s^t \int\limits_{K_{2R}} (|u_x|+|u_x|^{m-1})\,|\xi_x|\,dx\,dt\,|\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)| + \\
+c\int_s^t \int\limits_{K_{2R}} (|u_x|^2+|u_x|^m+f_1(x,t))\,dx\,dt\,|\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)| \leqslant \\
\leqslant c\iint\limits_{Q_{2R}} |u_x|^2\,dx\,dt + cR^{-(m-2)/(m-1)} \iint\limits_{Q_{2R}} |u_x|^m\,dx\,dt + \\
+c\iint\limits_{Q_{2R}} |u_x|^2\,dx\,dt + c\iint\limits_{Q_{2R}} |u_x|^m\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_{2R}} f_1(x,t)\,dx\,dt + \\
+\varepsilon R^n|\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)|^2 + \varepsilon\cdot R^n|\tilde{u}_{2R}(t)-\tilde{u}_{2R}(s)|^m.
\end{gathered}$$

Подставляя эту оценку в 5.3 и используя тот факт, что решение системы (0.1) ограничено, получаем нужную оценку. Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. (*Первое неравенство Каччополи*). *Пусть* u — *обобщенное решение системы* (0.1), *рассматриваемой при условиях* H.1, H.5 *и условии* (1.3). *Тогда для всех* $z_0\in Q_T$ *и* $0<R<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(z_0,\partial Q_T)$ *справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}
\iint\limits_{Q_R(z_0)} |u_x|^2+|u_x|^m\,dx\,dt \leqslant (c/R^2) \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u-\tilde{u}_{2R}|^2\,dx\,dt + \\
+(c/R^m) \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u-\tilde{u}_{2R}|^m\,dx\,dt + cR^{m/(m-1)} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} f_s^{m/(m-1)}\,dx\,dt + cR^{n+2},
\end{gathered} \tag{5.4}$$

где c *зависит от структуры системы* (0.1) *и от величины* M *из требования* (1.3), *а функция* $\tilde{u}_{2R}(t)$ *определена равенством* (2.2) *при* $s=2$, $r=1$.

Доказательство. Пусть функции Φ и Ψ такие же, как в лемме 3.1 в случае $p_0 \equiv 0$. Воспользуемся соотношением (2.5) в следующем виде

$$F(x, t, u, u_x - \Phi_x) \geqslant F(x, t, u, u_x) - F_{p^i_\alpha}(x, t, u, u_x)\Phi^i_{x_\alpha} + \\ + \varkappa(|\Phi_x|^2 + |\Phi_x|^m).$$

Полагая тогда в интегральном тождестве (1.1) $\varphi = \Phi\chi$ $(t < t_0)$, получим

$$- \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} u^i \Phi^i_t \, dx\, dt + \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, u_x)\, dx\, dt + \\ + \varkappa \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |\Phi_x|^2 + |\Phi_x|^m \, dx\, dt \leqslant \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, u_x - \Phi_x)\, dx\, dt + \\ + \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} f(x, t, u, u_x)\Phi\, dx\, dt. \qquad (5.5)$$

Первый интеграл, стоящий в левой части этого неравенства, оценивается точно так же, как интеграл IV в неравенстве (3.5) (см. лемму 3.1). Второй интеграл левой части оценим снизу, используя Н.1:

$$\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, u_x)\, dx\, dt \geqslant \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} [\lambda(|u_x|^2 + |u_x|^m) - c_0]\, dx\, dt.$$

Первый интеграл в правой части неравенства (5.5) оценим сверху, снова используя Н.1 и неравенство $|\Psi_x| \leqslant c|u_x| + c(s-r)^{-1}R^{-1}|u - \tilde{u}_{r,s}|$:

$$\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, u_x - \Phi_x)\, dx\, dt = \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} F(x, t, u, \Psi_x)\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)\setminus\widetilde{Q}_{rR}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\, dx\, dt + \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} f_2(x, t)\, dx\, dt + \\ + (c/(s-r)^2R^2) \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \tilde{u}_{r,s}|^2\, dx\, dt + (c/(s-r)^m R^m) \times \\ \times \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \tilde{u}_{r,s}|^m\, dx\, dt.$$

Наконец, последний интеграл, стоящий в правой части неравенства (5.5), оценим сверху, используя Н.5.

$$\iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} f(x, t, u, u_x)\Phi\, dx\, dt \leqslant 2Ma \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\, dx\, dt + \\ + (c/R^m) \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - u_{r,s}|^m\, dx\, dt + R^{m/(m-1)} \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} f_1^{m/(m-1)}\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant 2Ma \iint\limits_{\widetilde{Q}_{rR}(z_0)} |u_x|^2 + |u_x|^m\, dx\, dt + c \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)\setminus Q_{rR}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\, dx\, dt + \\ + (c/R^m) \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \tilde{u}_{r,s}|^m\, dx\, dt + cR^{m/(m-1)} \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} f_1^{m/(m-1)}\, dx\, dt.$$

Таким образом, из (5.5) следует неравенство

$$\lambda \iint\limits_{\widetilde{Q}_{rR}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\,dx\,dt \leqslant 2Ma \iint\limits_{\widetilde{Q}_{rR}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\,dx\,dt +$$

$$+ c \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)\setminus\widetilde{Q}_{rR}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\,dx\,dt +$$

$$+ (c/(s-r)^2 R^2) \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - \tilde{u}_{s,r}|^2\,dx\,dt + (c/(s-r)^m R^m) \times$$

$$\times \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} |u - u_{r,s}|^m\,dx\,dt + \iint\limits_{\widetilde{Q}_{sR}(z_0)} R^{m/(m-1)} f_1^{m/(m-1)}\,dx\,dt + c\rho^{n+2}.$$

Продолжая далее точно так же, как при доказательстве леммы 3.1, получим (5.4). Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены все условия леммы* 5.2. *Тогда для любого* $z_0 \in Q_T$ *такого, что* $Q_R(z_0) \subset Q_{2R}(z_0) \subset Q_T$, *имеют место оценки*

$$\sup_{I_R} \int\limits_{K_R(x_0)} |u - \tilde{u}_R|^2\,dx\,dt \leqslant c \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} (|u_x|^2 + |u_x|^m)\,dx\,dt +$$

$$+ R^{m/(m-1)} \iint\limits_{Q_{2R}(z_0)} f_1^{m/(m-1)}\,dx\,dt + cR^{n+2},$$

причем c *зависит от структуры системы* (0.1) *и от* M.

Аналогично доказательству теоремы 3.1 доказывается следующая лемма.

Лемма 5.4. *Пусть* u — *обобщенное решение в* Q_T *системы* (0.1), *рассматриваемой при условиях* H.1, H.3, H.5 *и* (1.3). *Пусть* $Q_{4R}(z_0) \subset Q_T$. *Пусть точка* $z_0 \in Q_T$ *такова, что неравенство*

$$\sup_{R>0} \iint\limits_{Q_{4R}(z)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt \leqslant L_2 < \infty \tag{5.6}$$

имеет место для всех z *из некоторой окрестности точки* z_0 *радиуса* R_0. *Тогда для всех* $R < \min\left\{\frac{1}{4}\operatorname{dist}(z_0, \partial Q),\ R_0\right\}$ *имеют место неравенства*

$$\left(\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x)|^p\,dx\,dt\right)^{1/p} \leqslant c\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} |V(u_x)|^2\,dx\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+ c\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)} (R^{m/(m-1)} f_1^{m/(m-1)})^{p/2}\,dx\,dt\right)^{1/p} + c, \tag{5.7}$$

причем константа c *и показатель* $p > 2$ *зависят от структуры системы* (0.1), *от величины* L_2 *и от величины* M *из условия* (0.3).

Лемма 5.5. *Пусть* u — *обобщенное решение в* Q_T *системы* (0.1), *рассматриваемой при условиях* H.1, H.5, (0.3). *Пусть*

$$\Phi(z_0, R) = \iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(u_x)_{z_0,R}|^2\,dx\,dt.$$

Тогда для всех z_0, *для которых выполнено условие* (5.6), *и таких, что* $Q_{4R}(z_0) \subset Q_T$, *при любых* ρ, R, $0 < \rho < R < \min\{(1/4)\operatorname{dist}(z_0, \partial Q), R_0\}$, *где* R_0 — *число из леммы* 5.4, *справедливо неравенство*

$$\Phi(z_0, \rho) \leqslant c\{(\rho/R)^{2\sigma}\,\Phi(z_0, R) + R^{2\gamma} H(z_0, R)\}, \tag{5.8}$$

где σ — *показатель из теоремы* 4.2, $\gamma > 0$, $H(z_0, R) = h(\Phi(z_0, R) + |(u_x)_{z_0, R}| + |u_{z_0, R} + (|f_1|^{s_0})_{z_0, R} + 1)$, *а* $h(t)$ — *не убывающая по* t *функция.*

Доказательство. Фиксируем точку $(x_0, t_0) \in Q_T$ и положим $u_0 = (u)_{z_0, R}$. По теореме 4.2 для решений системы

$$\begin{cases} v_t^i - \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i}(x_0, t_0, u_0, v_x)\right\} = 0 \text{ в } Q_R, & i = 1, \ldots, N, \\ v = u & \text{на } \partial_p Q_R, \end{cases} \tag{5.9}$$

справедливы неравенства

$$\iint\limits_{Q_\rho(z_0)} |V(v_x) - V(v_x)_{z_0, \rho}|^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\sigma+n+2} \iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(v_x) - V(v_x)_{z_0, R}|^2 \, dx\, dt.$$

Тогда для решений системы (0.1) имеем

$$\iint\limits_{Q_\rho(z_0)} |V(u_x) - V(u_x)_{z_0, \rho}|^2 \, dxdt \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\sigma+n+2} \iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(u_x)_{z_0,R}|^2 \times$$

$$\times\, dxdt + c \iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(v_x)|^2 \, dxdt. \tag{5.10}$$

Оценивая сверху последний интеграл в (5.10), заметим, что ввиду леммы 1.1

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} |V(u_x) - V(v_x)|^2 \, dx\, dt \leqslant c \iint\limits_{Q_R(z_0)} (1 + |u_x|^{m-2} + |v_x|^{m-2}) \times$$

$$\times\, |u_x - v_x|^2 \, dx\, dt. \tag{5.11}$$

Теперь, для того чтобы оценить правую часть неравенства (5.11), сложим системы (0.1) и (5.9). Тогда

$$u_t^i - v_t^i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i}(x_0, t_0, u_0, u_x) - F_{p_\alpha^i}(x_0, t_0, u_0, v_x)\right\} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{F_{p_\alpha^i}(x_0, t_0, u_0, u_x) - F_{p_\alpha^i}(x, t, u, u_x)\right\}.$$

Отсюда легко выводим, используя условия Н.1, Н.3, что при $\forall\, \varepsilon \in (0, 1)$

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} (1 + |u_x|^{m-2} + |v_x|^{m-2})\, |u_x - v_x|^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_R(z_0)} |F_p(x_0, t_0, u_0, u_x) - F_p(x, t, u, u_x||u_x - v_x| \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_R(z_0)} \eta(|u_0|, |x - x_0| + |t - t_0| + |u - u_0|)(|u_x| + |u_x|^{m-1}) \times$$

$$\times\, |u_x - v_x| \, dx\, dt \leqslant \varepsilon \iint\limits_{Q_R(z_0)} (1 + |u_x|^{m-2} + |v_x|^{m-2})\, |u_x - v_x|^2 \, dx\, dt +$$

$$+ c \iint\limits_{Q_R(z_0)} \eta(|u_0|, |x - x_0| + |t - t_0| + |u - u_0|)(|u_x|^2 + |u_x|^m) \, dx\, dt. \tag{5.12}$$

Далее, используя результаты леммы 5.3, получаем

$$\iint\limits_{Q_R(z_0)} (1+|u_x|^{m-2}+|v_x|^{m-2})\,|u_x-v_x|^2\,dx\,dt \leqslant c\left[\iint\limits_{Q_R(z_0)} \eta(|u_0|,\right.$$

$$\left.|x-x_0|+|t-t_0|+|u-u_0|)\,dxdt\right]^{1-2/p}\cdot\left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(|u_x|^2+|u_x|^m)\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(R^{m/(m-1)}f_1^{m/(m-1)})^{p/2}\,dx\,dt\right)^{2/p}+1\right]\leqslant$$

$$\leqslant c\eta^{1-2/p}\left(|u_0|,\ R+R^{2-(m-2)/(m-1)}\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}|u_x|^m\,dxdt+R^2\iint\limits_{Q_{2R}}|u_x|^2\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+R^2\iint\limits_{Q_{2R}(z_0)}f_1(x,t)\,dxdt\right)\left[\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(|u_x|^2+|u_x|^m)\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\left(\iint\limits_{Q_{4R}(z_0)}(R^{m/(m-1)}f_1^{m/(m-1)})^{p/2}\,dx\,dt\right)^{2/p}+1\right]. \tag{5.13}$$

Очевидно, из (5.10)—(5.13) следует (5.9). Лемма 5.5 доказана.

Предложение 5.1. *Пусть $\overline{Q_{2R}(z_*)}\subset Q_T$ при некоторых $R_0>0$ и $z_*\in Q_T$. Пусть в любой точке $z_0\in Q_{R_0}(z_*)$ выполнены условия*

$$\sup_{R>0}(|u_{z_0,R}|+|(u_x)_{z_0,R}|)\leqslant M_1,$$

$$\liminf_{R\to+0}\iint\limits_{Q_R(z_0)}|V(u_x)-V(u_x)_{z_0,R}|^2\,dx\,dt=0 \tag{5.14}$$

при некоторой константе $M_1>0$. Предположим, что при всех $z_0\in Q_R(z_*)$ и любых $0<\rho<R\leqslant R_0$

$$\Phi(z_0,\rho)\leqslant c[(R/\rho)^\sigma+\chi(z_0,R)]\,\Phi(z_0,R)+\psi(z_0,R)\,R^{n+\varepsilon},$$

$$\chi(z_0,R)\equiv\omega(|u_{z_0,R}|+|(u_x)_{z_0,R}|+\Phi^{1/2}(z_0,R)\,\Phi^{1/2}(z_0,R)), \tag{5.15}$$

$$\psi(z_0,R)\equiv H(|u_{z_0,R}|+|(u_x)_{z_0,R}|+\Phi^{1/2}(z_0,R)),$$

где $\sigma>0$, $\varepsilon>0$, $\omega(t,s)$ — возрастающая по t при любом s функция такая, что $\lim\limits_{s\to0}\left(\max\limits_{|t|\leqslant M}\omega(t,s)\right)=0$, а $H(t)$ — возрастающая функция. Тогда существуют такие числа $R_*>0$, $c>0$ и $\alpha\in(0,1)$, что при всех $z_0\in Q_{R_*}(z_*)$

$$\Phi(z_0,\rho)\leqslant c\,(\rho/R_*)^\alpha,\quad 0\leqslant\rho\leqslant R_*, \tag{5.16}$$

где *c и α зависят лишь от M_1, c, σ, ε и функций $\omega(t,s)$ и $H(t)$.*

Доказательство. Предложение 5.1 устанавливается точно так же, как аналогичное утверждение в книге [4] (см. [4], с. 197—199).

Доказательство основной теоремы. Пусть u — обобщенное решение в Q_T системы (0.1). Пусть z_* — любая точка открытого множества $Q_0\equiv\sum_1\cup\sum_2$ (см. § 1). Тогда существуют такие числа $R_0>0$ и $M_1>0$, при которых $\overline{Q_{2R_*}(z_0)}\subset Q_T$ и выполнены условия (5.14). В частности, из (5.14) следует, что $\iint\limits_{Q_R(z_0)}|V(u_x)-V(u_x)_{z_0,R_*}|^2\times$ $\times\,dx\,dt\leqslant1$ при всех $z_0\in Q_R(z_*)$, $R\leqslant R_0$. Поскольку $\iint\limits_{Q_R(z_0)}|V\times$ $\times(u_x)|^2\,dx\,dt\leqslant\iint\limits_{Q_R(z_0)}|V(u_x)-V(u_x)_{z_0,R}|^2\,dx\,dt+|V(u_x)_{z_0,R}|^2\leqslant$

$\leqslant L_1^2 + 1$, то условие (5.6) выполнено в $Q_R(z_0)$ при $L_2 \equiv (M_1^m + 1)c$ для всех $z_0 \in Q_R(z_*)$, $R \leqslant R_0$. Следовательно, из леммы 5.5 следует справедливость (5.15) при $\chi \equiv 0$, и с функцией H из (5.8). Тогда ввиду предложения 5.1 справедливы неравенства (5.16), из которых, очевидно, и вытекает результат основной теоремы.

Список литературы

[1] *Ладыженская О. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения. М.: Наука, *1964*. 538 с.

[2] *Ладыженская О. А.*, *Солонников В. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, *1967*. 736 с.

[3] *Morrey C. B., Jr.* Multiple intergrals in the calculus of variations. New York: Springer, *1966*.

[4] *Giaquinta M.* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems//Annals of math. studies. 105. Princeton: Princeton University Press, *1983*. 296 p.

[5] *Giaquinta M.*, *Modica G.* Remarks on the regularity of the minimizers of certain degenerate functionals//Arch. Rat. Mech. Anal. *1986*. Vol. 51. P. 121—173.

[6] *Morrey C. B., Jr.* Partial regularity results for nonlinear elliptic systems//J. Math. and Mech. *1968*. Vol. 17. P. 649—670.

[7] *Giusti E.*, *Miranda M.* Sulla regolarita delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellitici qussilineari//Arch. Rat. Mech. Anal. *1968*. Vol. 31. P. 173—184.

[8] *Giaquinta M.* The problem of the regularity of minimizers//Address of the International Congress of Mathematics Berkely. *1986*.

[9] *Di Benedetto E.*, *Friedman A.* Holder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems//J. Reine Angew. Math. *1985*. Vol. 357. P. 1—22.

[10] *Wiegner M.* On C^α-regularity of the gradient of solutions of degenerate parabolic systems//An. Mat. Pura Appl. (4). *1986*. Vol. 145. P. 383—404.

[11] *Иванов А. В.* Гельдеровские оценки для квазилинейных вырождающихся параболических систем второго порядка//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. *1987*. Т. 163. С. 49—65.

[12] *Campanato S.* Partial Hölder continuity of solutions quasilinear parabolic systems of second order with linear growth//Rend. Sem. Mat. Padova Univ. *1981*. Vol. 64. P. 59—127.

[13] *Giaquinta M.*, *Giusti E.* Partial regularity for solutions to nonlinear parabolic systems// An. Math. Pura Appl. *1973*. Vol. 47. P. 253—266.

[14] *Данилюк Г. И.*, *Скрыпник И. В.* Частичная регулярность обобщенных решений параболических систем//ДАН СССР. *1980*. Т. 250. С. 790—794.

[15] *Struwe M.* Some regularity results for quasilinear parabolic systems//Com. Math. Univ. Carol. *1985*. Vol. 26. P. 129—150.

[16] *Giaquinta M.*, *Struwe M.* An optimal regularity results for class of quasilinear parabolic systems//Manus. Math. *1981*. Vol. 36. P. 223—239.

[17] *Giaquinta M.*, *Struwe M.* On the partial regularity of weak solutions of quasilinear parabolic systems//Math. Z. *1982*. Vol. 179. P. 437—451.

[18] *Зыков А. А.* Частичная регулярность градиентов обобщенных решений нелинейных параболических систем//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. *1989*. Т. 171. С. 66—69.

[19] *Giaquinta M.*, *Giusti E.* On the regularity of minima of variational integrals//Acta Math. *1982*. Vol. 148. P. 31—46.

[20] *Giaquinta M.*, *Modica G.* Partial regularity of minimaizers of quasiconvex integrals//An. Inst. H. Poincare. Analyse non Lineaire. *1986*. Vol. 3. P. 185—208.

[21] *Evans L. C.* Quasiconvexity and partial regularity in calculus of variations//Arch. rat. mech. anal. *1986*. Vol. 95. P. 227—253.

[22] *Campanato S.* Equazioni parabolic del secondo ordine spari $L^{2\Theta}(\Omega, \delta)$//An. Math. Pura Appl. *1966*. Vol. 73. P. 55—102.

[23] *Di Benedetto E.*, *Friedman A.* Regularity of solutions of nonlinear degenerate parabolic systems//J. für Rein und Angew. Math. *1984*. Vol. 349. P. 83—128.

Ленинградское отделение математического института им. В. А. Стеклова АН СССР
191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 14 июня 1989 г.