Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. A. Sakhabiev, Обратная задача напорной фильтрации в анизотропном грунте,
Trudy Sem. Kraev. Zadacham, 1968, Issue 5, 203–211

https://www.mathnet.ru/eng/kukz574

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
December 10, 2025, 11:17:44

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

А. А. Сахабиев и Н. Б. Салимов

В настоящей заметке задача, рассмотренная в [1], обобщается на случай анизотропного грунта. Под анизотропностью понимается однородная анизотропность: коэффициенты зависят только от направления скорости фильтрации. Уравнения движения жидкости в анизотропных грунтах и методы решения некоторых задач фильтрации имеются в [2, 3, 4, 5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим напорную фильтрацию в анизотропной области, изображенной на рис. 1, где границей водоупора является прямая AD, проходящая через точку z_0 и образующая с ox угол β, коэффициент фильтрации $\vec{k}=(k_1, k_2)$, k_1 направлен под углом α к ox. Требуется найти форму подземного контура BC гидротехнического сооружения по заданному на нем распределению напоров:

$$h=f_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,$$
$$f_1(0)=H, \quad f_1(l)=0. \tag{1}$$

Обратная функция $f_1^{-1}(h)$ удовлетворяет условию Гельдера, и производная в концевых точках обращается в нуль. Движение грунтовых вод установившееся, подчиняющееся закону Дарси.

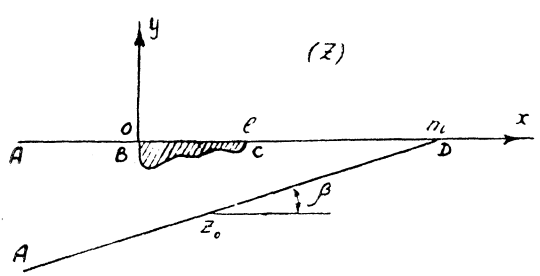

Рис. 1.

2. Афинное преобразование (см. [5])

$$\mu = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x\sin\alpha + y\cos\alpha), \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1} \tag{2}$$

преобразует нашу область в область переменного $\theta = \mu + i\nu$, изображенную на рис. 2.

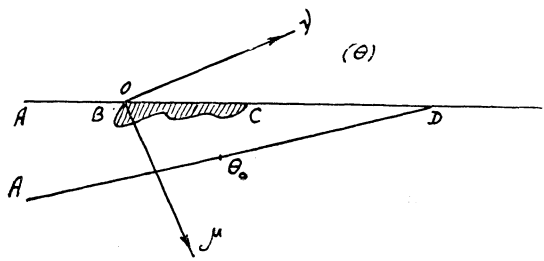

Рис. 2.

Функция $w = \varphi(\mu, \nu) + i\psi(\mu, \nu)$, где $\varphi(\mu, \nu) = \varphi[x(\mu, \nu), y(\mu, \nu)]$ и $\psi(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\psi[x(\mu, \nu), y(\mu, \nu)]$, является аналитической по θ функцией. Получили задачу определения контура BC по условию на контуре

$$h = f_1(\mu\cdot\cos\alpha + \sqrt{\lambda}\sin\alpha\cdot\nu). \tag{3}$$

Так как заданы напор H и расход Q, в плоскости комплексного потенциала W имеем прямоугольник с известными сторонами (рис. 3). Его легко отобразить на верхнюю полуплоскость комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ при помощи функции:

$$W(\zeta) = \frac{iQ}{2K(k)\sqrt{\lambda}}\cdot\left[F\left(\arcsin\frac{1-k}{2k}\zeta + \frac{1+k}{2k}, k\right) - K(k)\right]. \tag{4}$$

(Соответствие точек указано на рис. 4).

Координаты точек A и D соответственно равны

$$a = -\frac{3+k}{1-k}, \quad d = -\frac{1+3k}{1-k}. \tag{5}$$

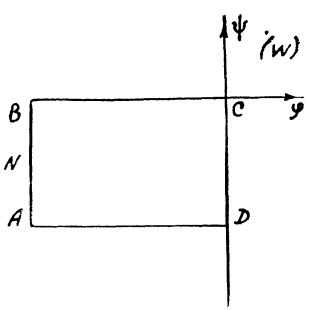

Рис. 3.

Модуль k эллиптического интеграла первого рода F находится из соотношения

$$\frac{k_1 H}{Q}\sqrt{\lambda}=\frac{K'(k')}{2K(k)},$$

$$K(k)=F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)\quad\text{и}\quad K'(k')=F\left(\frac{\pi}{2},\ \sqrt{1-k^2}\right).$$

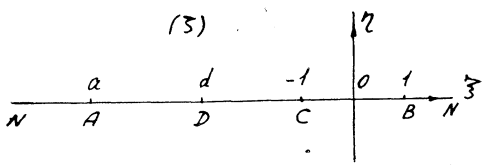

Рис. 4.

Из (4) при $\zeta=\xi$ в интервале $-1\leqslant\xi\leqslant 1$ получаем

$$h(\xi)=\frac{Q}{k_1(1+k)\cdot K(k)}\cdot F\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\xi+1}{\xi-d}},\ \frac{1-k}{1+k}\right). \tag{6}$$

Сравнивая (3) и (6), имеем:

$$\mu\cos\alpha+\sqrt{\lambda}\,\nu\sin\alpha=$$

$$=f_1^{-1}\left[\frac{Q}{k_1(1+k)K(k)}\cdot F\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+k}{1-k}\,\frac{\xi+1}{\xi-d}},\ \frac{1-k}{1+k}\right)\right] \tag{7}$$

Учитывая (7) и уравнения границ области θ, на всей вещественной оси ξ имеем линейные соотношения для значений мнимой и действительной частей искомой функции

$$a_1(\xi)\cdot\mu(\xi)+a_2(\xi)\,\nu(\xi)=a_3(\xi), \tag{8}$$

где

$a_1=\sin\alpha,\ a_2=-\sqrt{\lambda}\cos\alpha,\ a_3=0$ при $\begin{matrix}-\infty<\xi<a,\\ d<\xi<-1,\ 1<\xi<\infty;\end{matrix}$

$a_1=\cos\alpha,\ a_2=\sqrt{\lambda}\sin\alpha,\ a_3=f(\xi)$ при $-1<\xi<1$;

$a_1=\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta,\ a_2=-\sqrt{\lambda}(\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta),\ a_3=m\operatorname{tg}\beta$ при $a<\xi<d$.

Таким образом, получили задачу Гильберта с разрывными коэффициентами для верхней полуплоскости. Решение ищется ограниченное всюду, кроме точки A, где искомая функция обращается в бесконечность. Индекс задачи равен -1, задача имеет единственное решение. Функцию $\theta(\zeta)$ будем нахо-

дить методом, предложенным в [6], приведением к задаче Римана. Решение записывается в виде:

$$\Phi^+(\zeta)=\theta(\zeta)=\left(\frac{\zeta-d}{\zeta-a}\right)^{\varkappa}\frac{(\zeta-1)^{\gamma}(\zeta+1)^{1-\gamma}}{\pi i e^{ip\pi}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{A}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t-a}{t-d}\right)^{\varkappa}\frac{f(t)}{(t+1)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma}}\cdot\frac{dt}{t-\zeta}-\right.$$

$$\left.-\frac{m\operatorname{tg}\beta}{B}\int_{a}^{d}\left(\frac{t-a}{d-t}\right)^{\varkappa}\frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(-1-t)^{1-\gamma}(t-\zeta)}\right],\qquad(9)$$

где $\varkappa=p-r$, $\gamma=p+q$ и $p=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\alpha)$,

$$q=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{\lambda}\operatorname{tg}\alpha),\quad r=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$A=\sqrt{\cos^2\alpha+\lambda\sin^2\alpha},$$

$$B=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta)^2+\lambda(\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\beta)^2}.$$

Из ветвей функции $\left(\frac{\zeta-d}{\zeta-a}\right)^{\varkappa}(\zeta-1)^{\gamma}(\zeta+1)^{1-\gamma}$ выбрана та, которая положительна на $1<\xi<\infty$.

Пользуясь теорией вычетов, выразим второе слагаемое правой части (9) через интеграл с пределами от -1 до $+1$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left(\frac{\tau-a}{\tau-d}\right)^{\varkappa}\frac{d\tau}{(\tau-1)^{\gamma}(\tau+1)^{1-\gamma}(\tau-\zeta)},$$

где L граница области Δ (см. рис. 5).

Подынтегральная функция аналитична в Δ всюду, за исключением полюса $\tau=\zeta$. По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left(\frac{\tau-a}{\tau-d}\right)^{\varkappa}\frac{d\tau}{(\tau-1)^{\gamma}(\tau+1)^{1-\gamma}(\tau-\zeta)}=\left(\frac{\zeta-a}{\zeta-d}\right)^{\varkappa}\frac{1}{(\zeta-1)^{\gamma}(\zeta+1)^{1-\gamma}}.$$

После оценки интегралов по C_R, C_{r_1}, C_{r_2}, C_{r_3}, C_{r_4} при $R\to\infty$, r_1, r_2, r_3, $r_4\to 0$ по лемме Жордана:

$$\int_{a}^{d}\left(\frac{t-a}{d-t}\right)^{\varkappa}\frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(-1-t)^{1-\gamma}(t-\zeta)}=$$

$$=\frac{\sin\gamma\pi}{\sin\varkappa\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t-a}{t-d}\right)^{\varkappa}\frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\zeta)}+$$

$$+\frac{\pi}{\sin\varkappa\pi}\left(\frac{\zeta-a}{\zeta-d}\right)^{\varkappa}\frac{}{(\zeta-1)^{\gamma}(\zeta+1)^{1-\gamma}}.$$

С учетом полученной формулы и (9) имеем:

$$\theta(\zeta) = -R\frac{e^{-ip\pi}}{i} +$$

$$+\left(\frac{\zeta-d}{\zeta-a}\right)^{\varkappa}\frac{(\zeta-1)^{\gamma}(\zeta+1)^{1-\gamma}}{\pi i e^{ip\pi}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t-a}{t-d}\right)^{\varkappa}\frac{\tilde{f}(t)\,dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\zeta)}, \quad (10)$$

где $\tilde{f}(\xi) = \frac{f(\xi)}{A} - R\sin\gamma\pi$ и $R = \frac{m}{B}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\varkappa\pi}$.

Находя по формулам Сохоцкого предельные значения $\theta(\zeta)$ при $\zeta\to\xi$ на $-1\leqslant\xi\leqslant 1$ и разделяя действительную и мнимую части, получаем параметрические уравнения искомого контура

$$\mu(\xi) = R\sin p\pi + \tilde{f}(\xi)\cos q\pi +$$

$$+\left(\frac{\xi-d}{\xi-a}\right)^{\varkappa}\frac{(1-\xi)^{\gamma}(1+\xi)^{1-\gamma}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)}\cdot\sin q\pi,$$

$$\nu(\xi) = R\cos p\pi + \tilde{f}(\xi)\sin q\pi -$$

$$+\left(\frac{\xi-d}{\xi-a}\right)^{\varkappa}\frac{(1-\xi)^{\gamma}(1+\xi)^{1-\gamma}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)}\cdot\cos q\pi, \quad (11)$$

где $F(\xi) = \tilde{f}(\xi)\cdot\left(\frac{\xi-a}{\xi-d}\right)^{\varkappa}$.

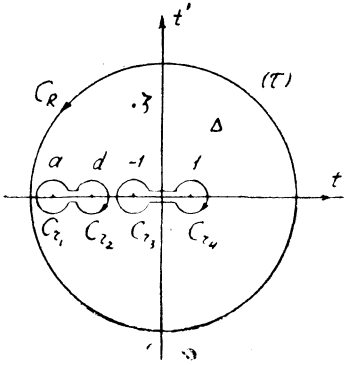

Рис. 5.

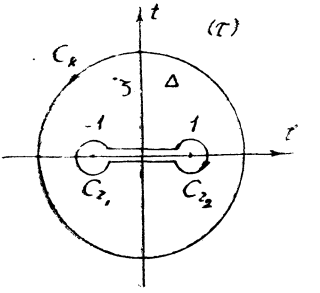

Рис. 6.

3. Иногда в решениях обратной задачи фильтрации встречаются „загибы“ границ бьефов [7]. В этом пункте получим условия отсутствия этих „загибов“.

На участках DC и BN действительной оси ξ функция $\theta(\xi)$ принимает значения

$$\theta(\xi) = -R\frac{e^{-ip\pi}}{i} +$$

$$+\left(\frac{\xi-d}{\xi-a}\right)^{\alpha}\frac{(\xi-1)^{\gamma}(\xi+1)^{1-\gamma}\cdot e^{-ip\pi}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)} \qquad (12)$$

при $\xi > 1$,

$$\theta(\xi) = -R\frac{e^{-ip\pi}}{i} -$$

$$-\left(\frac{\xi-d}{\xi-a}\right)^{\alpha}\frac{(1-\xi)^{\gamma}(-\xi-1)^{1-\gamma}\cdot e^{-ip\pi}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)} \qquad (13)$$

при $\xi < -1$.

Интеграл $I(\xi) = \int_{-1}^{1}\frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)}$ на участке $d < \xi < -1$ можно представить в виде:

$$I(\xi) = \int_{-1}^{1}\frac{F(t)-F(-1)}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)}\,dt +$$

$$+F(-1)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)}, \qquad (14)$$

где второй интеграл правой части легко подсчитывается при помощи интеграла

$$\int_{L}\frac{d\tau}{(\tau-1)^{\gamma}(\tau+1)^{1-\gamma}(\tau-\zeta)}; \qquad (15)$$

контур L изображен на рис. 6. Рассуждая как в предыдущем пункте, имеем:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\zeta)} = -\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\cdot\frac{1}{(\zeta-1)^{\gamma}(\zeta+1)^{1-\gamma}}. \qquad (16)$$

Учитывая (12), (14), (16) с точностью до малых высшего порядка, можно писать:

$$S(\xi) = nx(\xi) = \frac{l}{A\sin\gamma\pi} +$$

$$+\left(\frac{1+d}{1+a}\right)^{\alpha}\frac{2^{\gamma}(-1-\xi)^{1-\gamma}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)-F(-1)}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t+1)}\,dt, \qquad (17)$$

где n — постоянная, зависящая от α и λ.

Аналогично около точки $\xi = 1$

$$S(\xi) = \left(\frac{1-d}{1-a}\right)^{\alpha} \frac{2^{1-\gamma}(\xi-1)^{\gamma}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(t)-F(1)}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(1-t)}\,dt. \qquad (18)$$

При отсутствии загибов ясно, что функция $S(\xi)$ в интервалах $\xi > 1$ и $\xi < -1$ должна убывать.

Из (17) и (18) очевидно, что это условие запишется в виде:

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(t)-F(-1)}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(1+t)}\,dt \geqslant 0, \quad \int_{-1}^{1} \frac{F(t)-F(1)}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(1-t)}\,dt \leqslant 0. \qquad (19)$$

4. Известен метод вычисления интеграла [см., напр., 7]

$$I_1^*(\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{(t-\xi)}, \qquad (20)$$

где $f(\xi)$ ограничена и удовлетворяет условию Гельдера. Желая воспользоваться этим методом при расчете примера, приведем интеграл в (11) к виду (20). Для этого запишем его так:

$$I(\xi) = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \frac{F(t)-F(-1)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-\xi)}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{F(-1)}{\pi}\sqrt{1-\xi^2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)}\right]. \qquad (21)$$

С помощью формулы Сохоцкого из (16) получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{1-\gamma}(t-\xi)} = -\operatorname{ctg}\gamma\pi \frac{\pi}{(1-\xi)^{\gamma}(1+\xi)^{1-\gamma}}.$$

Исследуем первое слагаемое квадратной скобки в (21). Оно есть функция вида (20), так как функция

$$\tilde{F}(\xi) = \left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} [F(\xi) - F(-1)]$$

в окрестности точки $\xi = -1$ ограничена и удовлетворяет условию Гельдера. Последнее следует из того, что

$$|F(\xi) - F(-1)| \leqslant A^* \cdot |\xi + 1|^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma < \frac{1}{2}.$$

Итак, вместо (21) имеем

$$I(\xi)=\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma}\cdot I_2^*(\xi)-F(-1)\cdot\operatorname{ctg}\gamma\pi,$$

где

$$I_2^*(\xi)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\widetilde{F}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{dt}{t-\xi}$$

5. Пример. По заданному распределению напора:

$$h(x)=0{,}5\,(2-\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{1-x}$$

определить подземный контур плотины, считая $k_1=1$, $k_2=0,1$, $H=l=1$, $Q=0{,}4$, $m=-2$, $\beta=-\alpha=-18^\circ$. Определяем $k=0{,}3247$ и $k'=0{,}9458$. Формула (5) дает $a=-4{,}9233$, $d=-2{,}9233$.

Зависимость (6) имеет вид:

$$h(\xi)=0{,}9514F\left(\arcsin\sqrt{1{,}9616\,\frac{1+\xi}{\xi+2{,}9233}}\cdot 0{,}5098\right).$$

Сравнивая графически $h(x)$ и $h(\xi)$, находим $f(\xi)$, где $\xi=\cos\gamma$ меняется с шагом $\gamma=9^\circ$. Разлагая $\widetilde{F}(\xi)$ в ряд $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\cos k\gamma$ ($n=20$) по приближенным формулам гармонического анализа, находим интегрированием $I(\xi)$.

Числовые расчеты приведены в табл. 1, полученный контур плотины изображен на рис. 7.

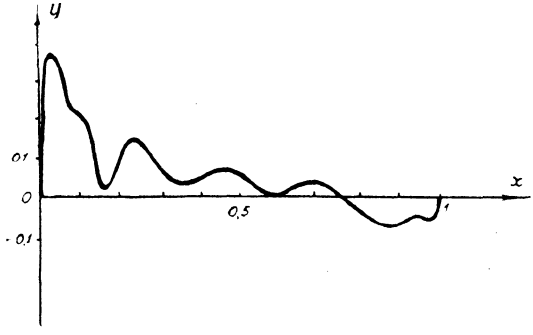

Рис. 7.

Эксперимент подтверждает выполнение условий (19). Максимальное отклонение величин напоров, снятых с прибора ЭГДА-9/60, от заданных не превышает погрешность измерений напоров на интеграторе.

Доложено на семинаре 2 декабря 1966 г.

Таблица 1

ξ	x	y
—1	1,0000	0000
—0,9877	0,9975	—0,0137
—0,9511	0,9818	—0,0461
—0,8910	0,9429	—0,0513
—0,8090	0,8775	—0,0692
—0,7071	0,7895	—0,0021
—0,5878	0,6891	0,0410
—0,4540	0,5840	0,0007
—0,3090	0,4836	0,0698
—0,1564	0,3876	0,0488
0	0,3045	0,0555
0,1564	0,2315	0,1498
0,3090	0,1690	0,0321
0,4540	0,1176	0,1876
0,5878	0,0773	0,2381
0,7071	0,0467	0,3345
0,8090	0,0304	0,3840
0,8910	0,0107	0,1117
0,9511	0 0034	0,0620
0,9877	0,0005	0,0401
1	0,0000	0,0000

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Салимов. Обратная задача напорной фильтрации при наклонном водоупоре. Труды семинара по краевым задачам, вып. 3. Изд. КГУ, 1963.

2. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. ГИТТЛ, 1952.

3. П. Я. Полубаринова-Кочина. О фильтрации в анизотропном грунте. Прикл. мат, и мех., т. IV, вып. 2, 1940.

4. В. И. Аравин. К вопросу о фильтрации в анизотропно-водопроницаемых грунтах. ТЛИИ, Л., 1937.

5. В. С. Козлов. К вопросу о расчете движения воды под гидротехническими сооружениями в анизотропно-проницаемых грунтах. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, 1940.

6. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. М., ГИФМЛ, 1963.

7. М. Т. Нужин, Н. Б. Ильинский. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Изд. КГУ, Казань, 1963.