ИЮНЬ 1993 г., ТОМ 29, № 6

УДК 517.925.7

Б. П. БОГОСЛОВСКИЙ, В. А. КАЗАКОВ

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В теории неприводимых уравнений Пенлеве [1] наряду с другими рассматривается уравнение

$$ww''=w'^2+w'\sum_{j=0}^{2}a_j(z)w^{2-j}+\sum_{j=0}^{4}b_j(z)w^{4-j}. \tag{1}$$

Методом малого параметра из (1) отсеиваются все уравнения с многозначными подвижными особыми точками, однако структура решений отсеянных уравнений в окрестности этих точек остается невыясненной.

В большинстве случаев исследование отсеянных из (1) уравнений проводится переходом с помощью подходящей замены переменных к системе двух уравнений Брио и Буке, а по характеру решений этой системы делается заключение и о структуре решений отсеянных уравнений.

Особое место при этом исследовании занимает случай нулевого корня характеристического уравнения системы Брио и Буке, описанный, например, в [2].

Для уравнения (1) этот случай осуществляется при условии

$$b_0(z)=-\frac{a_0^2(z)}{4}. \tag{2}$$

В настоящей работе решение уравнения (1) с условием (2), обладающее свойством $w\to\infty$, $w'\to\infty$ при $z\to z_0$, строится методом Н. П. Еругина [3, 4] без перехода к системе Брио и Буке. Построение решения ведется в плане работы [5].

Не теряя общности [1], положим

$$a_0(z)=2, \tag{3}$$

и будем считать остальные коэффициенты уравнения (1) голоморфными функциями в некоторой области D.

Введя переменные x и y согласно равенствам

$$w=xy,\ w'=x(1+x)y^2, \tag{4}$$

перейдем от уравнения (1) к системе

$$dx=\frac{1-x\Omega}{y(1+\Omega)}dy,\ dz=\frac{1}{xy^2(1+\Omega)}dy. \tag{5}$$

Здесь

$$\Omega=\frac{1}{y}\left[\frac{a_1+a_1x}{x}+b_1+\left(\frac{a_2+a_2x}{x}+b_2\right)\frac{1}{xy}+\right.$$
$$\left.+b_3\left(\frac{1}{xy}\right)^2+b_4\left(\frac{1}{xy}\right)^3\right]. \tag{6}$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$dx = \frac{1}{y}\, dy, \quad dz = \frac{1}{xy^2}\, dy, \tag{7}$$

которая имеет решение

$$x = \operatorname{Ln} y + C, \tag{8_1}$$

$$z - z_0 = \int_L \frac{dy}{y^2(\operatorname{Ln} y + C)}, \tag{8_2}$$

где C — произвольная постоянная и $z_0 \in D$.

Ввиду очевидной оценки

$$|z - z_0| = \left| \int_L \frac{dy}{y^2(\operatorname{Ln} y + C)} \right| = o\left(\left| \frac{1}{y} \right| \right) \tag{9}$$

установим, что $z - z_0 \to 0$, если $y \to \infty$ вдоль пути $L(\infty, y)$ из некоторого сектора S^*.

С другой стороны, интегрируя (8_2) по частям, получим [6] асимптотическое разложение

$$z - z_0 \sim \frac{1}{y} \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} (\operatorname{Ln} y + C)^{-j-1}, \quad A_{1j} = (-1)^{j+1} j!, \tag{10}$$

справедливое в том же секторе S^*.

Равенства (8_1) и (10) можно рассматривать как нулевое приближение решения системы (5). На основе их легко получить оценку для Ω в (6)

$$\Omega = O\left(\frac{1}{y}\right). \tag{11}$$

В силу оценки (11) первое уравнение системы (5) можно записать в виде

$$dx = \left(\frac{1}{y} + O\left(\frac{\operatorname{Ln} y + C}{y^2} \right) \right) dy. \tag{12}$$

Интегрируя это равенство по пути $L(\infty, y) \in S^*$, найдем первое приближение для x

$$x = (\operatorname{Ln} y + C) \left(1 + O\left(\frac{1}{y} \right) \right). \tag{13}$$

Подставляя (11) и (13) во второе уравнение системы (5), получим

$$dz = \frac{1}{y^2(\operatorname{Ln} y + C)} \left(1 + O\left(\frac{1}{y} \right) \right) dy. \tag{14}$$

Равенства (12), (14) и позволяют развертывать ряды по методу Н. П. Еругина.

Интегрируя теперь (14) по пути $L(\infty, y) \in S^*$, получим первое приближение и для $z - z_0$

$$z - z_0 = \frac{1}{y} \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} (\operatorname{Ln} y + C)^{-j-1} + O\left(\frac{1}{y^2(\operatorname{Ln} y + C)} \right). \tag{15}$$

В силу первого приближения решения системы (5) получим новую оценку для Ω в (6), а используя эту оценку, найдем следующее приближение решения. Продолжая же процесс неограниченно, установим, что функции

$$x=(\operatorname{Ln} y+C)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} B_{nj}(\operatorname{Ln} y+C)^{-j}\right)y^{-n}\right],$$
$$z-z_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(\operatorname{Ln} y+C)^{-j}\right)y^{-n} \tag{16}$$

формально удовлетворяют системе (5).

В ходе построения рядов (16) все коэффициенты B_{nj} и A_{nj} определяются единственным образом. Для доказательства сходимости рядов (16) введем новые функции

$$x=\frac{1}{\omega}\left[1+u(\omega,\eta)\right],\quad z-z_0=v(\omega,\eta) \tag{17}$$

и новые независимые переменные

$$\eta=\frac{1}{y},\quad \omega=\frac{1}{\operatorname{Ln} y+C}. \tag{18}$$

В новых переменных формальное решение x, $z-z_0$ системы (5) имеет вид

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\omega)\eta^n,\quad v=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\omega)\eta^n, \tag{19}$$

а функции u и v удовлетворяют системе уравнений в частных производных

$$\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+\omega^2\frac{\partial u}{\partial\omega}=\omega u+\eta F^{(1)},$$
$$\eta\frac{\partial v}{\partial\eta}+\omega^2\frac{\partial v}{\partial\omega}=\omega\eta F^{(2)}, \tag{20}$$

где функции $F^{(j)}(\omega,\eta,u,v)$ $(j=1,2)$ голоморфные в области

$$|\omega|\leqslant r_1,\quad |\eta|\leqslant r_1,\quad |u|\leqslant r_1,\quad |v|\leqslant r_1. \tag{21}$$

Для определения $u_n(\omega)$, $v_n(\omega)$ подставим (19) в (20) и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η, образуем линейные уравнения

$$\omega^2\frac{du_n}{d\omega}=(\omega-n)u_n+F^{(1)}_{n-1},$$
$$\omega^2\frac{dv_n}{d\omega}=-nv_n+\omega F^{(2)}_{n-1}, \tag{22}$$

где $F^{(j)}_{n-1}=F^{(j)}_{n-1}(\omega,u_\lambda,v_\lambda)$ $(\lambda<n-1,\ j=1,2)$ — полиномы от u_λ, v_λ с голоморфными по ω коэффициентами.

В силу леммы (34.1) из [7] при каждом фиксированном n существуют частные решения уравнений (22), которые асимптотически разложимы при $\omega\to0$ в степенные ряды по ω

$$u_n\sim\sum_{j=0}^{\infty} u_{nj}\omega^j,\quad v_n\sim\sum_{j=0}^{\infty} v_{nj}\omega^j \tag{23}$$

в каждом замкнутом секторе $\bar S$ с вершиной в точке $\omega=0$ и центральным углом, не превосходящим π:

$$\bar S\subset S=\{0<|\omega|\leqslant\rho,\ \alpha<\alpha_0\leqslant\arg\omega\leqslant\beta_0<\alpha+\pi\}. \tag{24}$$

Непосредственной проверкой несложно убедиться, что коэффициенты u_{nj}, v_{nj} рядов (23) совпадают с коэффициентами рядов (16), но оценки, полученные в [7], отмеченных выше частных решений уравнений (22) для нас мало пригодны, поэтому представим эти решения в интегральной форме и оценим по модулю, тогда легко установим, что

$$|u_n| \leqslant |\omega| \exp\left(\frac{n \cos \arg \omega}{|\omega|}\right) \int_0^{|\omega|} \frac{1}{|\omega|^3} \exp\left(-\frac{n \cos \arg \omega}{|\omega|}\right) |F^{(1)}_{n-1}| d|\omega|,$$

$$|v_n| \leqslant \exp\left(\frac{n \cos \arg \omega}{|\omega|}\right) \int_0^{|\omega|} \frac{1}{|\omega|} \exp\left(-\frac{n \cos \arg \omega}{|\omega|}\right) |F^{(2)}_{n-1}| d|\omega| \tag{25}$$

для каждого $\arg \omega = \mathrm{const}$ из S.

Функции $F^{(1)}_0$, $F^{(2)}_0$ ограничены по модулю как голоморфные по ω; функции $F^{(1)}_n$, $F^{(2)}_n$ при $n > 0$ вновь ограничены как полиномы относительно ограниченных же асимптотически представимых функций $u_\lambda(\omega)$, $v_\lambda(\omega)$ с голоморфными по ω коэффициентами, поэтому из (25) получим

$$|u_n| \leqslant \frac{(1+\rho) \sup |F^{(1)}_{n-1}|}{n \cos^2 \arg \omega}, \quad |v_n| \leqslant \frac{\rho \sup |F^{(2)}_{n-1}|}{n \cos \arg \omega}. \tag{26}$$

Возьмем для каждой из функций $F^{(j)}$ $(j=1, 2)$ из (20) в качестве мажоранты функцию

$$\theta = \frac{M}{1 - \dfrac{2U+\eta}{r}}, \tag{27}$$

где $r = \min(r_1, \rho)$, $M = \max(\sup |F^{(1)}|, \sup |F^{(2)}|)$.

Введя обозначения

$$A_1 = \sup_{\arg \omega \in S} \frac{1+\rho}{\cos^2 \arg \omega}, \quad A_2 = \sup_{\arg \omega \in S} \frac{\rho}{\cos \arg \omega}, \tag{28}$$

легко найдем такое голоморфное решение

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \eta^n \tag{29}$$

уравнения

$$\frac{dU}{d\eta} = A\theta, \quad A = \max(A_1, A_2), \tag{30}$$

что $|u_n| \leqslant U_n$, $|v_n| \leqslant V_n$, откуда следует сходимость рядов (19) при достаточно малых η по крайней мере вдоль лучей $\arg \omega = \mathrm{const}$ из S в (24).

Итак, уравнение (1) имеет решение в параметрической форме

$$w = y(\mathrm{Ln}\, y + C)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} B_{nj} (\mathrm{Ln}\, y + C)^{-j}\right) y^{-n}\right],$$

$$z - z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} (\mathrm{Ln}\, y + C)^{-j}\right) y^{-n}, \tag{31}$$

обладающее свойством

$$w \to \infty, \ w' \to \infty, \ z - z_0 \to 0 \text{ при } y \to \infty \tag{32}$$

по пути $L(\infty, y) \in S^*$, и область S^* естественным образом связана с сектором S.

Литература

1. Bureau F. J. // Ann. mat. pura ed appe. 1964. Vol. 64. P. 229—364.
2. Iwano M. // Publications of the research institute for Mathematical sciences. 1966. S. A. Vol. 2, N 1. P. 17—115.
3. Еругин Н. П. // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, № 4. С. 465—486.
4. Еругин Н. П. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 4. С. 579—598.
5. Богословский Б. П. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 9. С. 1539—1547.
6. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1978.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.

Вологодский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 18 февраля 1991 г.