



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. Ya. Kirpichnikova, A. S. Kirpichnikova, Surface layer method for far filed diffractions of SV surface waves, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2010, Volume 380, 53–89

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

February 19, 2025, 04:23:15



Н. Я. Кирпичникова, А. С. Кирпичникова

## МЕТОД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ ДАЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ SV-ВОЛН

### 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Экспериментально замечено, что волновые функции, типа волн со-скальзывания или волн шепчущей галереи, сосредоточенные в при-поверхностном слое, регистрируются на расстояниях порядка мно-гих тысяч километров от места их возникновения, [1, 2]. Использо-вание точных методов определения интерференционных волновых по-лей возможно только для однородных сред. Однако асимптотические методы позволяют исследовать неоднородные модели сред и различ-ные интерференционные волновые явления.

Областью рассмотрения назначим двумерный аналог задачи о рас-пространении волн в упругих средах в слое  $\Omega_1$  и в полупространстве  $\Omega_2$ , находящимся под слоем  $\Omega_1$ , на границе  $\Gamma_{01}$  которого расположен источник  $Q^*$ . Поверхность слоя  $\Gamma_{01}$ , содержащую источник, будем считать свободной от напряжений, а на границе  $\Gamma_{12}$  между слоем и упругим полупространством заданы условия жесткого контакта. В данной работе асимптотическим методом пограничного слоя [3–5], построим решение задачи дальнего распространения упругих поверх-ностных волн вертикальной поляризации (SV-волн), образованных точечным источником  $Q^*$ . Под дальним распространением понимаем нахождение интерференционного поля волн в слое вдали от источ-ника. Полученное решение согласуется с данными экспериментов, [1, 6]. Поведение волнового поля в дальней зоне не зависит в главном при-ближении от того, является ли поперечная (для волн SV поляризации) скорость распространения в слое  $\Omega_1$  выше или ниже скоростей рас-пространения в полупространстве  $\Omega_2$ . В случае, если скорость выше

---

*Ключевые слова:* пограничный слой, асимптотика, распространение волн, упругие среды, функции Эйри.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фунда-ментальных исследований (РФФИ), (грант 08-01-00511) и частичной поддержке гранта EPSRC: EP/D065771/1.

в слое, слой называется соответственно высокоскоростным ( $h$  – от английского high), в противном случае, слой низкоскоростной ( $l$  – от английского low).

В настоящей работе мы рассмотрим три типа слоев постоянной толщины  $H$  (см. рис. 1, 2, 3). Слой первого типа представляет собой слой  $\Omega_1$  с градиентным поведением поперечной скорости упругих волн, с прямолинейными границами  $\Gamma_{01}$ ,  $\Gamma_{12}$  и лежащий на полупространстве  $\Omega_2$ . Обозначим этот слой через  $\mathcal{A}$  (“ $\mathcal{A}$ -слой”), (см. рис. 1). Слой двух других типов являются криволинейными слоями, расположенными в нормальном сечении к образующей двух концентрических круговых цилиндров. Слой типа  $\mathcal{B}$  (“ $\mathcal{B}$ -слой”) (см. рис. 2) имеет наибольший радиус кривизны границы  $\Gamma_{01}$ , на которой расположен источник  $Q^*$  и заданы условия свободного напряжения. На границе  $\Gamma_{12}$  с наименьшим радиусом кривизны заданы условия сопряжения типа условий жесткого контакта. Слой типа  $\mathcal{C}$  (“ $\mathcal{C}$ -слой”) имеет наименьший радиус кривизны границы, на которой расположен источник  $Q^*$ , (см. рис. 3). На границе с наибольшим радиусом кривизны заданы условия сопряжения типа условий жесткого контакта. Схема получения дифракционных поверхностных SV-волн полностью применима для произвольной упругой трехмерной области, ограниченной достаточно гладкой поверхностью, (см. статьи [7–11]). Плоскость  $(x, z)$  является плоскостью наших исследований. Обозначим продольные скорости распространения волн в слое  $\Omega_1$  через  $a(z)$  в полупространстве  $\Omega_2$  через  $a_2(z)$ , а поперечные скорости через  $b(z)$ ,  $b_2(z)$  соответственно. Упругий слой  $\Omega_1$  описывается параметрами Ламе  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\mu_1 = \mu$  и плотностью среды  $\rho_1 = \rho$ , достаточно плавно зависящими от координаты  $z$ . Упругий слой  $\Omega_1$  лежит на упругом полупространстве  $\Omega_2$  с параметрами Ламе  $\lambda_2, \mu_2$  и плотностью среды  $\rho_2$ .

В областях  $\Omega_i, i = 1, 2$  волновые поля  $\mathbf{u}_i(x, z) = (u_i(x, z), v_i(x, z), w_i(x, z))$ ,  $i = 1, 2$  есть решения уравнений изотропной теории упругости

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu u_{zz} + (\lambda + \mu)w_{xz} + \rho\omega^2 u + \mu_z(w_x + u_z) = 0, \quad (1.1)$$

$$(\lambda + \mu)u_{xz} + \mu w_{xx} + (\lambda + 2\mu)w_{zz} + \rho\omega^2 w + \lambda_z(u_x + w_z) + 2\mu_z w_z = 0, \quad (1.2)$$

с учетом граничных условий и вида излучения на бесконечности. Мы ищем решения уравнений теории упругости (1.1)–(1.2) в слое  $\Omega_1$ , лежащем на упругом полупространстве  $\Omega_2$ . Решения эти суть волны, распространяющиеся с фазовой скоростью, близкой к поперечной

скорости  $b(z)|_{z=0}$ . Это так называемые волны SV поляризации (SV-волны). В отличие от волн Лява (SH-волн), обладающих перечисленными свойствами, смещение частиц внутри областей для SV-волн происходит параллельно плоскости  $(x, z)$  в направлении нормали к границе  $\Gamma_{01}$ . У волн Лява смещение частиц в главном происходит ортогонально плоскости  $(x, z)$ . Заметим, что вторая компонента волнового поля всегда  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  в связи с выбранной поляризацией волнового вектора смещений. Для SH-волн, напротив, компоненты волнового поля  $u_i$  и  $w_i$  равны нулю, а вектор содержит одну компоненту ( $u_i = 0, v_i \neq 0, w_i = 0$ ),  $i = 1, 2$ .

### 1.1. Поведение волн SV поляризации в неограниченном полупространстве

Вектор смещений SV-волны  $\mathbf{u}(x, z) = (u(x, z), 0, w(x, z))$  был найден в виде суммы продольной  $\mathbf{u}_a$  и поперечной  $\mathbf{u}_b$  волн (см. статьи [7–9],[11]). Продольная SV-волна в полупространстве без слоя сразу убывает при удалении от свободной от напряжений границы подобно волнам Релея. Поперечная волна сосредоточена в некотором приповерхностном волноводе. Поведение ее в приповерхностном слое зависит от поведения скорости поперечной волны вблизи поверхности. Так при скорости  $b(z)$ , имеющей минимум на границе, соответствующие решения подобны собственным функциям типа шепчущей галереи. Если скорость  $b(z)$  имеет максимум на границе, то вблизи границы поведение волн подобно волнам соскальзывания. Внутри упругой среды  $z > 0$  асимптотически определяющими являются поперечные волны  $\mathbf{u}_b = (u_b, 0, w_b)$ , а именно, их вертикальная составляющая  $w_b$ . Выделение вектора  $\mathbf{u}_b$  из общего решения на свободной от напряжений границе  $z = 0$  является условным, так как вертикальная составляющая  $|w_b|$  имеет тот же порядок малости, что и  $|\mathbf{u}_a|$ . Для SV-волн типа шепчущей галереи построен набор высокочастотных установившихся приповерхностных волн, зависящих от целочисленного параметра  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Каждая волна состоит из продольной  $\mathbf{u}_a$  и поперечной  $\mathbf{u}_b$  компонент, распространяющихся по границе с одной и той же фазовой скоростью

$$v_p = b(0) \left( 1 + \frac{\zeta_p \psi^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} - \frac{4\psi^3 \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{k} + O(k^{-4/3}) \right).$$

Здесь величина  $\omega$  есть угловая частота, а величины  $\psi$ ,  $k$  и  $\gamma_0$  равны

$$\psi^3 = \frac{b'_z(0)}{b(0)}, \quad \psi > 0, \quad k = \frac{\omega}{b(0)}, \quad \gamma_0 = \frac{b(0)}{a(0)}.$$

Параметр  $\zeta_p$  есть корень функции  $v(-\zeta_p) = 0$ ,  $\zeta_p > 0$ , Продольная компонента  $\mathbf{u}_a$  с возрастанием  $z$  затухает по закону  $e^{-kz\sqrt{1-\gamma_0^2}}$ , то есть как волна Релея. Глубина проникновения поперечной волны значительно больше глубины проникновения продольной волны и равна

$$h_p = \frac{\zeta_p}{k^{2/3}\psi^{1/3}}, \quad v(-\zeta_p) = 0, \quad p = 1, 2, \dots$$

При  $z > h_p$  затухание поперечной волны происходит по экспоненциальному закону

$$v(x) \sim \frac{1}{2}x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Для волн вертикальной поляризации типа волн шепчущей галереи вектор поперечных смещений  $\mathbf{u}_b$  определяет сосредоточенные вблизи границы волны. Они осциллируют в слое  $O(\omega^{-2/3})$  по  $z$  подобно волнам Лява. Однако смещение частиц внутри полупространства для  $SV$  волн происходит параллельно плоскости  $(x, z)$ .

## 1.2. Поведение упругих $SV$ -волн в слое $\Omega_1$ и полупространстве $\Omega_2$

Поведение упругих  $SV$  волн в слое, лежащем на упругом полупространстве, несколько иное. Основные свойства  $SV$  поляризованных волн остаются неизменными. Смещение частиц происходит в плоскости  $(x, z)$ . Вертикальная составляющая  $w_b$  вектора поперечных смещений в слое является асимптотически определяющей. В зависимости от поведения скорости поперечной волны на свободной от напряжений поверхности слоя (т.е. минимальна или максимальна эта скорость) решение будет подобно либо собственным функциям типа волн шепчущей галереи либо подобно волнам соскальзывания. Отличие заключается в следующем. Продольная составляющая в слое не просто экспоненциально убывает при удалении от границы  $\Gamma_{01}$  по закону  $\exp(-kz\sqrt{1-\gamma_0^2})$ , как волна Релея, а является линейной комбинацией функций  $\exp(\pm k(z-H)\sqrt{1-\gamma_0^2})$ . Вертикальная составляющая поперечной волны в слое будет линейной комбинацией вещественнозначных функций Эйри  $v(t)$  и  $u(t)$ , либо функций Эйри  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ . Для  $\mathcal{A}$ -слоя это зависит от знака производной поперечной скорости  $b(z)$  на границе слоя  $\Gamma_{01}$ . Поведение составляющих этого вектора в слое и всего решения существенно зависит от значений аргумента

функций Эйри ( $\zeta \pm k^{2/3} 2^{1/3} \psi H$ ). Вид решения в зоне вне слоя зависит от того, является ли фазовая скорость больше или меньше продольной и поперечной скоростей в полупространстве  $\Omega_2$ . Однако соотношение скоростей в слое и полупространстве существенного влияния на распространяющиеся в слое (как в волноводе) интерференционные волны (типа волн шепчущей галереи или волн соскальзывания) не оказывает.

## 2. УПРУГИЕ SV-ВОЛНЫ В СЛОЕ $\mathcal{A}$

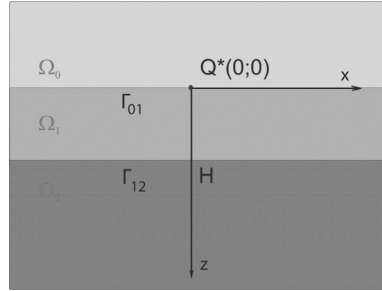


Рис. 1. Слой  $\mathcal{A}$ .

Напомним, что  $\mathcal{A}$ -слой занимает область  $\Omega_1$ , для которой  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq z \leq H$ . Полуплоскость  $-\infty < x < \infty$ ,  $z \leq 0$  есть область  $\Omega_0$ , волновые процессы в которой мы не рассматриваем. Слой  $\Omega_1$  с точечным источником  $Q^*$  на границе  $\Gamma_{01} = \{-\infty < x < \infty, z = 0\}$  лежит на полуплоскости  $-\infty < x < \infty$ ,  $H \leq z < \infty$ .

### 2.1. Постановка задачи

Мы рассматриваем двумерное полупространство  $-\infty < x < \infty$ ,  $z \geq 0$ , состоящее из двух упругих сред  $\Omega_i$  с различными скоростями  $b_i = b_i(z)$ ,  $a_i = a_i(z)$ ,  $i = 1, 2$ , ( $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ) распространения поперечных и продольных волн. Область  $\Omega_1$ , для которой  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq z \leq H$ , есть упругий слой с параметрами Ламе  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\mu_1 = \mu$  и плотностью среды  $\rho_1 = \rho$ , достаточно плавно зависящими от координаты  $z$ . Граница  $z = 0$  считается свободной от напряжений. Точечный источник  $Q^*$  находится в среде  $\Omega_1$  на границе полупространства  $\Gamma_{01}$ . Ось  $z$  направлена вертикально вниз, см. рис. 1. Будем считать, что в области  $\Omega_1$  скорость поперечных волн в слое  $b(z) = \sqrt{(\mu)/\rho}$  строго возрастает (убывает):  $\frac{\partial b}{\partial z} > 0$ , ( $\frac{\partial b}{\partial z} < 0$ ) при  $z > 0$ . Скорость

продольных волн в слое  $a(z) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  может меняться произвольно. Обозначим упругий слой  $\Omega_1$  через  $\mathcal{A}$ -слой и будем рассматривать области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  при  $z \geq 0$ ,  $x > 0$ .

В областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  волновое поле  $\mathbf{u}_i = (u_i, 0, w_i)$ ,  $i = 1, 2$  есть решение следующей задачи при  $z \geq 0$ ,  $x > 0$

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu u_{zz} + (\lambda + \mu)w_{xz} + \rho\omega^2 u + \mu_z(w_x + u_z) = 0, \quad (2.1)$$

$$(\lambda + \mu)u_{xz} + \mu w_{xx} + (\lambda + 2\mu)w_{zz} + \rho\omega^2 w + \lambda_z(u_x + w_z) + 2\mu_z w_z = 0, \quad (2.2)$$

с граничными условиями для слоя на  $\Gamma_{01}$ :

$$\mu(u_z + w_x)|_{z=0} = -\delta(x), \quad (\lambda + 2\mu)w_z + \lambda u_x|_{z=0} = 0. \quad (2.3)$$

На границе раздела упругих сред  $\Gamma_{12} = \{-\infty < x < \infty, z = H\}$  выполняются условия жесткого контакта

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]|_{z=H} = 0, \quad [\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)w_z + \lambda u_x]|_{z=H} = 0, \\ [\sigma_{xz} = \mu(u_z + w_x)]|_{z=H} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где через  $[\cdot]$  обозначен скачок функции на границе раздела  $\Gamma_{12}$ .

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (2.1)–(2.4) следует добавить условие излучения  $\mathbf{u}$  при  $r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - i \frac{\omega}{b(0)} \mathbf{u} \right) = 0. \quad (2.5)$$

## 2.2. Решение задачи

Решение  $\mathbf{u}$  задачи (2.1)–(2.5) будет в каждой области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  различным. Так в слое  $\Omega_1$  вектор смещений  $\mathbf{u}_1$  имеет следующее выражение

$$\mathbf{u}_1 = e^{ikx} \begin{pmatrix} U_b + U_a e^{-kz\alpha_0} \\ W_b + W_a e^{-kz\alpha_0} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $k = \omega/b(0)$ , а параметр  $\alpha_0$  является искомым. В области  $\Omega_2$  вектор смещений  $\mathbf{u}_2$  ищется в виде

$$\mathbf{u}_2 = e^{ikx} \begin{pmatrix} U_{a,2} e^{ikz\alpha_a} + U_{b,2} e^{ikz\alpha_b} \\ W_{a,2} e^{ikz\alpha_a} + W_{b,2} e^{ikz\alpha_b} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

причем, если слой высокоскоростной (h) и среда является поглощающей, т.е.  $\text{Im } k > 0$ , то параметры  $\alpha_a = \alpha_a^h$  и  $\alpha_b = \alpha_b^h$  будут вещественными и положительными. В случае низкоскоростного слоя (l) параметры  $\alpha_a = \alpha_a^l$  и  $\alpha_b = \alpha_b^l$  являются чисто мнимыми величинами. Выражения для  $\alpha_a^{h(l)}$  и  $\alpha_b^{h(l)}$  приведем позже. Найдем лишь главные компоненты в асимптотическом разложении векторов смещений (2.6)–(2.7)

$$U = \sum_{l=0} \frac{U^l}{k^{l/3}}, \quad W = \sum_{l=0} \frac{W^l}{k^{l/3}}. \quad (2.8)$$

Поле в областях интерференции поверхностных волн описывается в рамках метода пограничного слоя [5] при нахождении следующих приближений. Следуя приемам метода пограничного слоя, введем растянутые координаты:

$$\nu = \psi_{\mathcal{A}} k^{2/3} 2^{1/3} z, \quad \sigma = \psi_{\mathcal{A}}^2 k^{1/3} 2^{-1/3} x, \quad \nu_2 = k z. \quad (2.9)$$

В упругом слое величина  $\psi_{\mathcal{A}}$  определена

$$\psi_{\mathcal{A}}^3 = \left( \pm \frac{b'_z(0)}{b(0)} \right), \quad \psi_{\mathcal{A}} > 0. \quad (2.10)$$

Для  $SV$ -волн в слое из уравнений (2.1)–(2.2) имеем серию соотношений, связывающих компоненты вектора смещений (2.6) друг с другом:

$$W_b^0 \neq 0; \quad U_b^0 = 0; \quad U_a^0 = W_a^0 = 0; \quad U_b = ik^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial z} = i \frac{\psi_{\mathcal{A}} 2^{1/3}}{k^{1/3}} \frac{\partial W_b}{\partial \nu};$$

$$W_a = -i\alpha_0 U_a; \quad \frac{\partial U_a^j}{\partial \nu} = \frac{\partial W_a^j}{\partial \nu} = 0; \quad j = 0, 1. \quad (2.11)$$

Параметр  $\alpha_0$  равен  $\alpha_0^2 = 1 - \gamma_0^2$ ,  $\gamma_0 = b(0)/a(0)$ . Из граничных условий (2.3) для этих же компонент получим

$$W_b^0 \Big|_{z=0} = i \frac{\delta(x)}{\mu k}; \quad U_a^1 \Big|_{z=0} = -2U_b^1 \Big|_{z=0} = -2ik^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial z};$$

$$W_b^1 \Big|_{z=0} = -2W_a^1 \Big|_{z=0} = 2i\alpha_0 U_a^1 \Big|_{z=0} = 4k^{-1} \alpha_0 \frac{\partial W_b^0}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2.12)$$



Итак, искомые составляющие  $U_a, W_a, U_b, W_b$  вектора смещений  $\mathbf{u}_1$  в слое (см. формулу (2.6)) определяются с помощью компоненты  $W_b^0$  и ее производной по  $z$ . Функция  $W_b^0(\sigma, \nu)$  удовлетворяет следующей задаче

$$\begin{cases} \left( i \frac{\partial W_b^0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W_b^0}{\partial \nu^2} + \varkappa \nu W_b^0 \right) + O(k^{-2/3}) = 0, & \sigma > 0, \quad \nu > 0; \\ W_b^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma) \frac{\psi_A^2}{\mu k^{2/3} 2^{1/3}}. \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\varkappa = \begin{cases} -1, & \text{в среде с min скорости } b(0) \\ 1, & \text{в среде с max скорости } b(0). \end{cases}$$

Здесь коэффициент  $\varkappa$  принимает два значения в соответствии с вариантами изменения поперечной скорости в среде. Так для сред с минимумом скорости поперечных волн на поверхности  $z = 0$  значение  $\varkappa = -1$ , а в средах, соответствующих скоростям с отрицательным градиентом, коэффициент  $\varkappa = 1$ . Зная выражение поперечной составляющей вектора смещений  $W_b^0 \neq 0$  для  $z > 0$  в разложении (2.6), получим остальные компоненты вектора  $\mathbf{u}_1$  по формулам (2.11)–(2.12). Окончательно выпишем вектор смещений падающей SV-волны с учетом граничных условий (2.12) в случае распространения волн шепчущей галереи вблизи свободной от напряжений поверхности  $\Gamma_{01}$ , ( $\varkappa = -1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \partial\zeta \\ &\times \left( \begin{array}{c} \left( \frac{i\beta}{k} [Av'(\nu + \zeta) + Bu'(\nu + \zeta)] \right) \\ Av(\nu + \zeta) + Bu(\nu + \zeta) + \left( \frac{4\alpha_0\beta}{k} [Av'(\nu + \zeta) + Bu'(\nu + \zeta)] \right) \end{array} \right) \\ &+ \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \left( \begin{array}{c} [Ce^{-kz\alpha_0} + De^{kz\alpha_0}] \\ i\alpha_0 [Ce^{-kz\alpha_0} - De^{kz\alpha_0}] \end{array} \right) \partial\zeta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь искомые коэффициенты  $A, B, C, D$  есть функции параметра интегрирования  $\zeta$ . Функции  $v(\nu + \zeta)$  и  $u(\nu + \zeta)$  являются линейно независимыми вещественнозначными функциями Эйри. Вронскиан  $[u'(t)v(t) - v'(t)u(t)]$  этих решений равен единице,

$$[u'(t)v(t) - v'(t)u(t)] = 1, \quad \beta = \psi_A k^{2/3} 2^{1/3}, \quad \nu = \beta z.$$

Относительно вида решения (2.14) следует добавить, что в каждом конкретном случае (будь то волны шепчущей галереи или волны со-скальзывания) контур интегрирования от  $-\infty$  до  $\infty$  на плоскости комплексного переменного  $\zeta$  следует проводить с учетом поведения функций Эйри. В упругой среде  $\Omega_2$  вектор смещений волнового процесса  $\mathbf{u}_2$  равен

$$\mathbf{u}_2 = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \left( \begin{bmatrix} Ee^{ikz\alpha_a} - \frac{\alpha_b}{p} F e^{ikz\alpha_b} \\ \frac{\alpha_a}{p} E e^{ikz\alpha_a} + F e^{ikz\alpha_b} \end{bmatrix} \right) \partial\zeta, \quad (2.15)$$

где неизвестные коэффициенты  $E, F$  являются функциями  $\zeta$ . Величины  $\alpha_a, \alpha_b$  определены следующими равенствами

$$\begin{aligned} \alpha_a^h &= \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; & \alpha_b^h &= \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}; \\ \alpha_a^l &= i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; & \alpha_b^l &= i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Соотношение скоростей в слое и полупространстве дает нам возможность исследовать три случая поведения волнового поля  $\mathbf{u}_2$  в области  $z > H$ :

$$(*) \quad p < \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)}; \quad (**) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < p < \frac{b(0)}{b_2(H)};$$

$$(***) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)} < p.$$

Тогда соотношение  $(*)$  дает осциллирующий характер поведения продольной и поперечной составляющей вектора смещений  $\mathbf{u}_2$ . Для неравенств  $(**)$  продольная составляющая  $\mathbf{u}_2$  экспоненциально убывает подобно функции  $e^{-kz\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}$ , а поперечная составляющая ведет себя как  $e^{ikz\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}$ . В случае  $(***)$  обе составляющие вектора  $\mathbf{u}_2$  являются экспоненциально убывающими функциями при  $z > H$ . Параметр  $p$  в эйконе приближенно равен  $p = 1 + [\psi_A^2 \zeta] / [2^{1/3} k^{2/3}] + O(1/k)$ .

Экспоненциальный множитель  $ikxp$  равен тоже приближенно выражению

$$ikxp = ikx \left( 1 + \frac{\sigma\zeta}{kx} + \dots \right) = ikx \left( 1 + \frac{\psi_A^2 \zeta}{k^{2/3} 2^{1/3}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right).$$

Тогда фазовая скорость волнового процесса приближенно имеет вид

$$v_{ph} = \frac{b(0)}{p} = b(0) \left[ 1 - \zeta \frac{\psi_A^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad p = 1 + \zeta \frac{\psi_A^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Используя следующие приближения к решению, найдем фазовую скорость, дополненную слагаемым при  $O(k^{-1})$ :

$$v_p = b(0) \left( 1 + \frac{\zeta_p \psi_A^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} - \frac{4\psi_A^3 \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{k} + O(k^{-4/3}) \right).$$

### 2.3. Дисперсионное уравнение

Граничные условия на  $\Gamma_{01}$  и  $\Gamma_{12}$  дают нам возможность найти неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  для продольной и поперечной составляющих вектора смещений в средах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . С учетом главного приближения выпишем уравнения, которым они удовлетворяют в случаях (h) или (l) слоев. Параметр  $p$  заменим на приближенную величину, т.е.  $p \doteq 1$ . Система шестого порядка относительно коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  в главном асимптотическом приближении распадается на две: систему второго порядка относительно коэффициентов  $A$ ,  $B$ :

$$Av(\zeta) + Bu(\zeta) = i \frac{\psi_A^2}{\mu(0) 2^{1/3} k^{2/3}};$$

$$Av(\beta H + \zeta) + Bu(\beta H + \zeta) = 0;$$

и систему четвертого порядка относительно коэффициентов  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , соответствующих (h) или (l) слою:

$$i\alpha_0(\tilde{C} - \tilde{D}) - \lambda_a \tilde{E} - \tilde{F} = i \frac{4\alpha_0 \psi_A^3}{\mu(0) k^{2/3} \Delta_1};$$

$$\tilde{C} + \tilde{D} - \tilde{E} + \alpha_b \tilde{F} = -\frac{\psi_A^3}{\mu(0) k^{2/3} \Delta_1};$$

$$2i\alpha_0(\tilde{C} - \tilde{D}) - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \left\{ 2\alpha_a \tilde{E} + (1 - \alpha_b^2) \tilde{F} \right\} = i \frac{4\alpha_0 \psi_A^3}{\mu(0)k^{2/3} \Delta_1};$$

$$\begin{aligned} \left[ \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} - 2 \right] (\tilde{C} + \tilde{D}) + \left[ \frac{2\mu_2(H)}{\mu(H)} - \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} \right] \tilde{E} - \frac{2\mu_2(H)}{\mu(H)} \alpha_b \tilde{F} \\ = \frac{2\psi_A^3}{k^{2/3} \mu(0) \Delta_1}. \end{aligned}$$

В этих формулах вместо величин  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  в случаях высоко- и низкоскоростного слоев следует подставлять  $\alpha_a^{h(l)}$  и  $\alpha_b^{h(l)}$  соответственно определению (2.16). Здесь имеют место равенства  $\tilde{E} = \tilde{E}^h = E e^{ik\alpha_a^h H}$ ,  $\tilde{F} = \tilde{F}^h = F e^{ik\alpha_b^h H}$ , причем следует подставить в коэффициенты  $\tilde{E}^l = E e^{ik\alpha_a^l H}$  и  $\tilde{F}^l = F e^{ik\alpha_b^l H}$  вместо величин  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  величины  $\alpha_a^l$  и  $\alpha_b^l$ . Аналогично, величины  $\tilde{C}$  и  $\tilde{D}$  равны  $\tilde{C} = C e^{ik\alpha_0 H}$  и  $\tilde{D} = D e^{-ik\alpha_0 H}$ ,  $\beta = \psi_A k^{2/3} 2^{1/3}$ ,  $\alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{b^2(0)}{a^2(0)}}$ . Найдем эти коэффициенты из системы, полученной из граничных условий. Асимптотически главная составляющая вектора смещений  $\mathbf{u}_1$  (см. формулу (2.14)) состоит из линейной комбинации функций Эйри  $v(\beta z + \zeta)$  и  $u(\beta z + \zeta)$  и коэффициентов  $A$ ,  $B$ , которые равны

$$\begin{aligned} A &= \frac{i\psi_A^2}{\mu(0)k^{2/3}2^{1/3}} \frac{u(\zeta + \beta H)}{[v(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u(\zeta)u(\zeta + \beta H)]} \\ &= \frac{\beta_1 u(\zeta + \beta H)}{\Delta_1}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} B &= -\frac{i\psi_A^2}{\mu(0)k^{2/3}2^{1/3}} \frac{v(\zeta + \beta H)}{[v(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u(\zeta)u(\zeta + \beta H)]} \\ &= -\frac{\beta_1 v(\zeta + \beta H)}{\Delta_1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь определитель  $[v(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u(\zeta)u(\zeta + \beta H)]$  обозначен через  $\Delta_1$ . Проведя громоздкие вычисления, выпишем неизвестные коэффициенты  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{E}$  и  $\tilde{F}$ . Коэффициент  $\tilde{C}$  равен

$$\tilde{C} = \frac{\psi_A^3 \Delta_C}{\mu(0)k^{2/3} \Delta_1 \Delta_2},$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= [v(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u(\zeta)u(\zeta + \beta H)]; \\
\Delta_2 &= -2i\alpha_0 \left\{ 2\alpha_a \alpha_b \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \left[ 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right]^2 - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] \right\}; \\
\Delta_C &= 2i\alpha_0 \alpha_a \alpha_b \left\{ 3 \left[ \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} - 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] + \left[ \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} - 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] \right. \\
&\quad \times 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) + \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \left. \right\} + i\alpha_0 \left\{ 8\gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] - 7 \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - 4 \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \right] \right\} \\
&\quad + \gamma_0^2 \alpha_a \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 4(1 - \gamma_0^2) \alpha_b \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)}.
\end{aligned}$$

Следующий коэффициент  $\tilde{D}$ , как и  $\tilde{C}$ , оказался достаточно громоздким:

$$\tilde{D} = \frac{\psi_A^3 \Delta_D}{\mu(0)k^{2/3} \Delta_1 \Delta_2},$$

здесь определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  найдены выше, а определитель  $\Delta_D$  равен

$$\begin{aligned}
\Delta_D &= 2i\alpha_0 \alpha_a \alpha_b \left\{ \left[ 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \right] \left( 3 - 5 \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right\} + i\alpha_0 \left\{ 5 \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \right] \right. \\
&\quad \left. + 4\gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} + \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] \right\} - \\
&\quad - 8(1 - \gamma_0^2) \alpha_b \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \alpha_a \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)}.
\end{aligned}$$

Далее найдены коэффициент  $\tilde{E}$ :

$$\tilde{E} = \frac{\psi_A^3 \Delta_E}{\mu(0)k^{2/3}\Delta_1\Delta_2},$$

где

$$\Delta_E = 2i\alpha_0 \left\{ \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \right] - \right. \\ \left. - 8(1 - \gamma_0^2)\alpha_b \left[ 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \right] \right\},$$

и  $\tilde{F}$ :

$$\tilde{F} = \frac{\psi_A^3 \Delta_F}{\mu(0)k^{2/3}\Delta_1\Delta_2},$$

причем

$$\Delta_F = -4i\alpha_0\alpha_a \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} - \\ - 8(1 - \gamma_0^2) \left[ \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} + 2 \left( 1 - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \right) - \gamma_0^2 \frac{a^2(H)}{b^2(H)} \right].$$

Отметим, что коэффициенты  $\tilde{E}$  и  $\tilde{F}$  определены для слоев  $h$  и  $l$ . Для этого необходимо в случае слоя  $h$  найти коэффициенты  $E^h$  и  $F^h$ , подставив вместо  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  величины  $\alpha_a^h$  и  $\alpha_b^h$  в  $\Delta_2$  и в последние формулы. Соответственно, для слоя  $l$  коэффициенты  $E^l$  и  $F^l$  получены заменой  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  величинами  $\alpha_a^l$  и  $\alpha_b^l$  в  $\Delta_2$  и в формулах (2.14)–(2.16). Дисперсионное уравнение данной задачи в главном приближении определено равенством

$$\Delta_1 \equiv [v(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u(\zeta)u(\zeta + \beta H)] = 0.$$

#### 2.4. Корни дисперсионного уравнения при $\zeta + \beta H \gg 1$

Найдем теперь корни дисперсионного уравнения  $\Delta_1 = 0$ , т.е. корни уравнения

$$u(\zeta + \beta H) \left[ v(\zeta) - u(\zeta) \frac{v(\zeta + \beta H)}{u(\zeta + \beta H)} \right] = 0. \quad (2.19)$$

При нахождении корней уравнения  $\Delta_1 = 0$  следует различать некоторые соотношения аргументов функций, которые составляют само дисперсионное уравнение. Так неравенство

$$\zeta + \beta H = \zeta + k^{2/3} \psi_A 2^{1/3} H \gg 1$$

эквивалентно требованию большого удаления точки поворота лучей  $z^*\beta = -\zeta$  от нижней границы слоя, выраженному в длинах волн. Глубина проникновения  $m$ -ой волны шепчущей галереи, т.е. глубина осцилляций этой волны, есть величина  $h_m$  равная

$$h_m = \frac{\zeta_m}{k^{2/3}\psi_{\mathcal{A}}2^{1/3}}, \quad v(-\zeta_m) = 0.$$

Точка поворота лучей  $m$ -ой волны шепчущей галереи  $z^* = h_m$  есть точка  $z^*$ , в которой аргумент функции Эйри обращается в нуль. При выполнении неравенства  $\zeta + \beta H \gg 1$  второе слагаемое в (2.19) экспоненциально мало по сравнению с первым  $v(\zeta)$ . В этом случае уравнение  $\Delta_1 = 0$  эквивалентно уравнению  $v(\zeta) = 0$ , если контур интегрирования  $L_{\mathcal{A}}$  провести в виде линии, идущей от  $\infty e^{-i2\pi/3}$  до 0 и от 0 до  $\infty e^{i\pi/3}$ . Контур интегрирования в окрестности вещественной оси комплексной переменной  $\zeta$  петлей охватывает корни  $\zeta = -\zeta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  уравнения  $v(\zeta) = 0$ , лежащие на отрицательной части вещественной оси. Следовательно, вычисляя интегралы (2.14)–(2.15) по вычетам, получаем серию корней дисперсионного уравнения  $\zeta = -\zeta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , которые являются корнями функции Эйри  $v(\zeta)$ .

## 2.5. Корни дисперсионного уравнения для параметра $\zeta + \beta H \sim O(1)$

Для конечных значений аргумента  $\zeta + \beta H$  функций Эйри дисперсионное уравнение

$$\Delta_1 \equiv [v(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u(\zeta)v(\zeta + \beta H)] = 0;$$

выполняется при достаточно малой ширине слоя  $H = O(k^{-2/3+\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$  и возникает вопрос о том, сколько собственных функций может распространяться в этом слое. Дисперсионное уравнение  $\Delta_1 = 0$  в этом случае решается численно и корни этого уравнения  $\zeta = \zeta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  подставляются в производную по  $\zeta$  от дисперсионной функции  $\Delta_1$ :

$$\begin{aligned} (\Delta_1)'_{\zeta} |_{\zeta=\zeta_n} &= v'(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u'(\zeta)v(\zeta + \beta H) + \frac{v(\zeta)}{v(\zeta + \beta H)} |_{\zeta=\zeta_n} \\ &= \left[ \frac{v(\zeta)}{v(\zeta + \beta H)} - \frac{u(\zeta + \beta H)}{u(\zeta)} \right] \Big|_{\zeta=\zeta_n}. \end{aligned}$$

В случае, когда  $\zeta + \beta H = 0$  точка поворота лежит на границе  $z = H$ . Если  $\zeta + \beta H \leq 0$ , то волна падает на границу под конечным углом, если же  $\zeta + \beta H \geq 0$ , точка поворота находится выше границы перехода. Контур интегрирования выбирается с учетом расположения корней дисперсионного уравнения  $\Delta_1 = 0$ .

## 2.6. Окончательный вид SV-волны в A-слое в случае $\zeta + \beta H \gg 1$

Главное приближение решения задачи распространения в слое вдали от источника SV волн типа волн шепчущей галереи ( $b'(0) > 0$ ) в случае  $\zeta + \beta H \gg 1$  запишется следующими выражениями. Основной составляющей в слое является вертикально поляризованная поперечная компонента  $w_b$  вектора смещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{u}_{1a}$ . Эта составляющая, как и поперечный вектор смещений, никоим образом не зависят от того, является ли слой высоко- или низкоскоростным. В главном приближении вектор  $\mathbf{u}_{1b}$  не зависит от соотношения скоростей в слое и полупространстве. Волна SV поляризации в (l) и в (h) слоях имеет поперечную волну вида:

$$\mathbf{u}_{1b} = \frac{-e^{ikx} \psi_A^2}{\mu(0) k^{2/3} 2^{1/3}} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i\sigma(-\zeta_m)}}{v'(-\zeta_m)} \times \left( \begin{array}{c} \frac{\psi_A 2^{1/3}}{k^{1/3}} v'(\beta z - \zeta_m) \\ v(\beta z - \zeta_m) + \frac{4\alpha_0 \psi_A 2^{1/3}}{k^{1/3}} v'(\beta z - \zeta_m) \end{array} \right). \quad (2.20)$$

Продольная волна SV поляризации в слое равна

$$\mathbf{u}_{1a} = \frac{ie^{ikx} \psi_A^3}{\mu(0) k \Delta_2} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i\sigma(-\zeta_m)} e^{-2/3(\beta H - \zeta_m)^{3/2}} (\beta H - \zeta_m)^{1/4}}{v'(-\zeta_m)} \times \left( \begin{array}{c} \Delta_C e^{k\alpha_0(H-z)} + \Delta_D e^{-k\alpha_0(H-z)} \\ i\alpha_0 (\Delta_C e^{k\alpha_0(H-z)} - \Delta_D e^{-k\alpha_0(H-z)}) \end{array} \right). \quad (2.21)$$

Здесь величины  $\Delta_C$ ,  $\Delta_D$ ,  $\Delta_2$  есть функции от параметров Ламе в слое при  $z = 0$  и параметров Ламе в слое и полупространстве при  $z = H$ . Эти определители зависят и от параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , которые различны для слоев  $h$  и  $l$ , и от параметра  $\alpha_0 = \sqrt{1 - \gamma_0^2}$ . Соотношение скоростей в слое и полупространстве дает нам возможность исследовать три случая поведения волнового поля  $\mathbf{u}_2$  в области  $z > H$ :

$$(*) \quad p < \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)}; \quad (**) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < p < \frac{b(0)}{b_2(H)};$$

$$(***) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)} < p.$$



Во всех этих случаях решение для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$  продольного и поперечного смещений в полупространстве  $z \geq H$  представляется следующими выражениями. Так высокоскоростной слой (h) относительно продольной и поперечной скоростей дает следующее выражение для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{ie^{ikx}\psi_A^3}{\mu(0)k} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i\sigma(-\zeta_m)} e^{-2/3(\beta H - \zeta_m)^{3/2}} (\beta H - \zeta_m)^{1/4}}{v'(-\zeta_m)} \times \left( \begin{array}{c} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(z-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \\ \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(z-H)} + \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \end{array} \right). \quad (2.22)$$

Здесь величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  есть функции от параметров Ламе в слое при  $z = 0$  и параметров Ламе в слое и полупространстве при  $z = H$ . Эти определители зависят от параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , которые для слоя  $h$  равны

$$\alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}.$$

Решение в полупространстве  $z > H$  носит осциллирующий характер, причем при  $k(z - H) \gg 1$  следует считать, что мнимая часть волнового числа  $k$  мала и равна  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ .

Случай (\*\*) определяет высокоскоростной слой по поперечной составляющей и низкоскоростной слой для продольной составляющей вектора смещений  $\mathbf{u}_2$ , для которого

$$\alpha_a = \alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b = \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

Тогда решение  $\mathbf{u}_2$  есть экспоненциально затухающие функции по  $z$  для продольных составляющих, а соответствующие составляющие поперечной волны являются осциллирующими функциями  $z$ , убывающие для  $k(z - H) \gg 1$ , если  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{ie^{ikx}\psi_A^3}{\mu(0)k} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i\sigma(-\zeta_m)} e^{-2/3(\beta H - \zeta_m)^{3/2}} (\beta H - \zeta_m)^{1/4}}{v'(-\zeta_m)} \times$$

$$\times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_E^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \\ \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_E^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \end{array} \right). \quad (2.23)$$

Наконец, низкоскоростной слой относительно продольной и поперечной скоростей в полупространстве определяет затухающие экспоненциально компоненты волнового вектора  $\mathbf{u}_2$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{ie^{ikx}\psi_A^3}{\mu(0)k} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i\sigma(-\zeta_m)} e^{-2/3(\beta H - \zeta_m)^{3/2}} (\beta H - \zeta_m)^{1/4}}{v'(-\zeta_m)} \times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} - \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(z-H)} \\ \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(z-H)} \end{array} \right). \quad (2.24)$$

Здесь следует в величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  подставить вместо параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  их значения в случае низкоскоростного слоя

$$\alpha_a^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; \quad \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

## 2.7. Главное приближение SV-волны в $\mathcal{A}$ -слое в случае $\zeta + \beta H \sim O(1)$

Решение задачи распространения в слое вдали от источника SV волн типа волн шепчущей галереи в главном приближении в случае  $\zeta + \beta H \sim O(1)$  запишется следующими выражениями. Основной составляющей в слое является вертикально поляризованная поперечная компонента  $w_b$  вектора смещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{u}_{1a}$ . Эта составляющая, как и поперечный вектор смещений, никоим образом не зависят от того, является ли слой высоко- или низко-скоростным, т.е. в главном приближении не зависят от соотношения скоростей в слое и полупространстве. Волна SV поляризации в (l) и в (h) слоях имеет поперечную волну вида:

$$\mathbf{u}_{1b} = \frac{-e^{ikx}\psi_A^2}{\mu(0)k^{2/3}2^{1/3}} \sum_{n=1}^N \frac{e^{i\sigma(\zeta_n)}}{(\Delta_1)_\zeta|_{\zeta=\zeta_n}}$$

$$\times \left( \frac{i\psi_A 2^{1/3}}{k^{1/3}} U(v', u') \right. \\ \left. U_0(v, u) + \frac{4\alpha_0 \psi_A 2^{1/3}}{k^{1/3}} U(v', u') \right). \quad (2.25)$$

Дисперсионное уравнение  $\Delta_1 = 0$  в этом случае решается численно и корни этого уравнения  $\zeta = \zeta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  подставляются в производную по  $\zeta$  от дисперсионной функции  $\Delta_1$ :

$$(\Delta_1)'_{\zeta}|_{\zeta=\zeta_n} = v'(\zeta)u(\zeta + \beta H) - u'(\zeta)v(\zeta + \beta H) + \frac{v(\zeta)}{v(\zeta + \beta H)}|_{\zeta=\zeta_n} \\ = \left[ \frac{v(\zeta)}{v(\zeta + \beta H)} - \frac{u(\zeta + \beta H)}{u(\zeta)} \right]_{\zeta=\zeta_n}.$$

В случае, когда  $\zeta + \beta H = 0$  точка поворота лежит на границе  $z = H$ . Если  $\zeta + \beta H \leq 0$ , то волна падает на границу под конечным углом, если же  $\zeta + \beta H \geq 0$ , точка поворота находится выше границы перехода. Здесь функции  $U_0(v, u)$  и  $U(v', u')$  равны

$$U_0(v, u) = \{v(\beta z + \zeta_n)u(\beta H + \zeta_n) - u(\beta z + \zeta_n)v(\beta H + \zeta_n)\},$$

$$U(v', u') = \{v'(\beta z + \zeta_n)u(\beta H + \zeta_n) - u'(\beta z + \zeta_n)v(\beta H + \zeta_n)\}.$$

Продольная волна SV поляризации в слое равна

$$\mathbf{u}_{1a} = \frac{ie^{ikx}\psi_A^3}{\mu(0)k} \sum_{n=1}^N \frac{e^{i\sigma(\zeta_n)}}{(\Delta_1)'_{\zeta}|_{\zeta=\zeta_n}} \\ \times \left( \frac{\Delta_c}{\Delta_2} e^{k\alpha_0(H-z)} + \frac{\Delta_p}{\Delta_2} e^{-k\alpha_0(H-z)} \right. \\ \left. i\alpha_0 \left( \frac{\Delta_c}{\Delta_2} e^{k\alpha_0(H-z)} - \frac{\Delta_p}{\Delta_2} e^{-k\alpha_0(H-z)} \right) \right). \quad (2.26)$$

Во всех этих случаях решение для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$  продольного и поперечного смещений в полупространстве  $z \geq H$  представляется следующими выражениями. Так высокоскоростной слой ( $h$ ) относительно продольной и поперечной скоростей дает для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$  выражение вида

$$\mathbf{u}_2 = \frac{ie^{ikx}\psi_A^3}{\mu(0)k} \sum_{n=1}^N \frac{e^{i\sigma(\zeta_n)}}{(\Delta_1)'_{\zeta}|_{\zeta=\zeta_n}} \\ \times \left( \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(z-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(z-H)} + \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \right). \quad (2.27)$$

Здесь величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  есть функции от параметров Ламе в слое при  $z = 0$  и параметров Ламе в слое и полупространстве при  $z = H$ . Эти определители зависят и от параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , которые для слоя  $h$  равны

$$\alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}.$$

Решение в полупространстве  $z > H$  носит осциллирующий характер. Отметим, что при  $k(z - H) \gg 1$  следует считать, что  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ . Случай (\*\*) определяет высокоскоростной слой по поперечной составляющей и низкоскоростной слой для продольной составляющей вектора смещений  $\mathbf{u}_2$ , для которого

$$\alpha_a = \alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b = \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

Тогда решение  $\mathbf{u}_2$  есть экспоненциально затухающие функции по  $z$  для продольных составляющих, а соответствующие составляющие поперечной волны являются осциллирующими функциями  $z$ , убывающие для  $k(z - H) \gg 1$ , если  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \frac{ie^{ikx}\psi_{\mathcal{A}}^3}{\mu(0)k} \sum_{n=1}^N \frac{e^{i\sigma(\zeta_n)}}{(\Delta_1)'_{\zeta} |_{\zeta=\zeta_n}} \\ &\times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \\ \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(z-H)} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Наконец, низкоскоростной слой относительно продольной и поперечной скоростей в полупространстве определяет затухающие экспоненциально компоненты волнового вектора  $\mathbf{u}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \frac{ie^{ikx}\psi_{\mathcal{A}}^3}{\mu(0)k} \sum_{n=1}^N \frac{e^{i\sigma(\zeta_n)}}{(\Delta_1)'_{\zeta} |_{\zeta=\zeta_n}} \\ &\times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} - \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(z-H)} \\ \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(z-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(z-H)} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь следует в величины  $\Delta_E, \Delta_F, \Delta_2$  подставить вместо параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  их значения в случае низкоскоростного слоя

$$\alpha_a^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; \quad \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

Величина  $\zeta = \zeta_n, n = 1, 2, \dots$  есть корень функции  $\Delta_1 = 0$ , величина  $\psi_{\mathcal{A}}^3 = b'(0)/b(0) > 0$  определена через производную скорости в слое, координата  $\sigma$  равна  $\sigma = s k^{1/3} 2^{-1/3} \psi_{\mathcal{A}}^2$ ,  $\gamma_0 = b(0)/a(0)$ , а  $p = 1 - \zeta_n \frac{\psi_{\mathcal{A}}^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} + \dots$ .

### 3. ПОЛЕ УПРУГИХ SV-ВОЛН, $\mathcal{B}$ -СЛОЙ

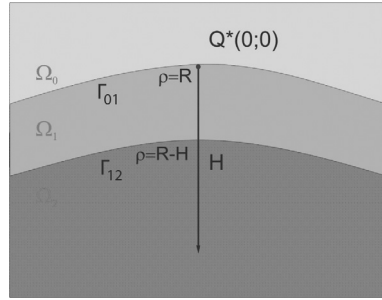


Рис. 2. Слой  $\mathcal{B}$ .

Криволинейный  $\mathcal{B}$ -слой расположен в нормальном сечении к образующей двух концентрических круговых цилиндров. Граница слоя “ $\mathcal{B}$ ” (см. рис. 2) имеет наибольший радиус кривизны  $R$ , на ней расположен источник  $Q^*$  и заданы граничные условия отсутствия свободного напряжения. На границе с наименьшим радиусом кривизны  $R - H$  заданы условия сопряжения типа условий жесткого контакта. Все рассмотрения проведем в плоскости  $(s, n)$  нормального сечения к образующей двух концентрических круговых цилиндров радиусов  $R$  и  $R - H$ .

#### 3.1. Постановка задачи

Пусть волновой вектор  $\mathbf{u}(s, n) = (u, 0, w)$  в  $\mathcal{B}$ -слое  $-\infty < s < \infty, 0 < n < H$  и в области  $\Omega_2$  удовлетворяет уравнениям теории упругости

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} + \rho \omega^2 G_{ss} u + G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} \left[ 3\mu \frac{1}{R_i} \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^{-1} \right]$$

$$+\frac{\partial\mu}{\partial n}] + \frac{\partial w}{\partial s} \left[ (\lambda + 3\mu) \frac{1}{R_i} \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^{-1} + \frac{\partial\mu}{\partial n} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} + \mu G^{ss} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \rho \omega^2 w \\ & + \frac{\partial u}{\partial s} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial n} - 2\mu \frac{1}{R_i} \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^{-1} \right] + \frac{\partial \lambda}{\partial n} w \frac{1}{R_i} \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^{-1} \\ & + \frac{\partial w}{\partial n} \left[ \frac{\partial(\lambda + 2\mu)}{\partial n} + 2(\lambda + \mu) \frac{1}{R_i} \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^{-1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

с граничными условиями для слоя на  $\Gamma_{01}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{sn}|_{n=0} &= \mu \left( G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \Big|_{n=0} = -\delta(s), \\ \sigma_{nn}|_{n=0} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{n=0} + \lambda w \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{n}{R} \right)^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь метрический тензор  $G_{ss}$  равен  $G_{ss} = \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^2$ , причем  $G^{ss}G_{ss} = 1$ , а радиусы для слоя и области  $\Omega_2$  равны соответственно  $R_1 = R$  и  $R_2 = R - H$ .

На границе  $\Gamma_{12}$  раздела упругих сред  $s > 0$ ,  $n = H$  выполняются условия жесткого контакта

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]|_{n=H} &= 0, \quad \left[ \sigma_{sn} \equiv \mu \left( G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \Big|_{n=H} = 0, \\ \left[ \sigma_{nn} \equiv (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u}{\partial s} \right] \Big|_{n=0} + \lambda w \frac{1}{R_i} \left( 1 + \frac{n}{R_i} \right)^{-1} \Big|_{n=H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (2.1)–(2.4) следует добавить условие убывания решения  $\mathbf{u}_2$  для  $n \gg H$ .

### 3.2. Вид решения задачи

Проведя вычисления, аналогичные нахождению решения для А-слоя, получим искомые составляющие вектора смещений  $\mathbf{u}_1$  в слое

$U_a, W_a, U_b, W_b$  (см. формулы (2.11)–(2.12)). Они определяются с помощью компоненты  $W_b^0$  и ее производной по  $n$ . Функция  $W_b^0(\sigma, \nu)$  удовлетворяет следующей задаче

$$\begin{cases} \left( i \frac{\partial W_b^0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W_b^0}{\partial \nu^2} + \varkappa \nu W_b^0 \right) + O(k^{-2/3}) = 0, & \sigma > 0, \quad \nu > 0; \\ W_b^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma) \frac{\psi_B^2}{\mu k^{2/3} 2^{1/3}}. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\varkappa = \begin{cases} -1, & \text{при } \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} > 0 \\ 1, & \text{для } -\left( \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} \right) > 0. \end{cases}$$

Здесь коэффициент  $\varkappa$  принимает два значения в соответствии со знаком эффективного радиуса кривизны границы  $n = 0$  в нормальном сечении к образующей цилиндра

$$\pm \left( \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} \right) > 0.$$

Так для сред с положительным эффективным радиусом кривизны границы  $n = 0$  значение  $\varkappa = -1$ , а в средах, соответствующих отрицательным значениям эффективного радиуса кривизны границы, коэффициент  $\varkappa = 1$ . Зная выражение для поперечной составляющей вектора смещений  $W_b^0 \neq 0$  для  $n > 0$  в разложении (2.6), получим остальные компоненты вектора  $\mathbf{u}_1$  по формулам (2.11)–(2.12), лишь заменяя всюду  $\psi_A = \frac{b'(0)}{b(0)} > 0$  на величину  $\psi_B = \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} > 0$  для волн шепчущей галереи. Следуя приемам метода пограничного слоя, введем растянутые координаты в слое и полупространстве  $n > H$ :

$$\begin{aligned} \nu &= \psi_B k^{2/3} 2^{1/3} n = \beta n, & \sigma &= \psi_B^2 k^{1/3} 2^{-1/3} s, \\ \nu_2 &= kn, & k &= \frac{\omega}{b(0)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где величина  $\psi_B$  определена следующим выражением

$$\psi_B^3 = \pm \left( \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} \right), \quad \psi_B > 0. \quad (3.7)$$

Для  $\mathcal{B}$ -слоя, как и для  $\mathcal{A}$ -слоя, рассмотрим волны шепчущей галереи, т.е.  $\psi_{\mathcal{B}}^3 = \left( \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} \right) > 0$ . Окончательно выпишем вектор смещений падающей SV-волны с учетом граничных условий (3.3) в случае распространения волн шепчущей галереи вблизи свободной от напряжений поверхности  $n = 0$ , ( $\varkappa = -1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = & \frac{e^{iks}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \partial\zeta \\ & \times \left( Av(\nu + \zeta) + Bu(\nu + \zeta) + \frac{i\beta}{k} [Av'(\nu + \zeta) + Bu'(\nu + \zeta)] \right. \\ & \left. + \frac{e^{iks}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \begin{pmatrix} Ce^{-kn\alpha_0} + De^{kn\alpha_0} \\ i\alpha_0 [Ce^{-kn\alpha_0} - De^{kn\alpha_0}] \end{pmatrix} \partial\zeta. \right. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Функции  $v(\nu + \zeta)$  и  $u(\nu + \zeta)$  являются линейно независимыми вещественнозначными функциями Эйри. Вронскиан  $[u'(t)v(t) - v'(t)u(t)]$  этих решений равен единице,

$$[u'(t)v(t) - v'(t)u(t)] = 1, \quad \beta = \psi_{\mathcal{B}} k^{2/3} 2^{1/3}, \quad \nu = \beta n.$$

Относительно вида решения следует добавить, что в каждом конкретном случае (будь то волны шепчущей галереи или волны соскальзывания) контур интегрирования от  $-\infty$  до  $\infty$  на плоскости комплексного переменного  $\zeta$  следует проводить с учетом поведения функций Эйри. В упругой среде  $\Omega_2$  вектор смещений волнового процесса  $\mathbf{u}_2$  равен

$$\mathbf{u}_2^h = \frac{e^{iks}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \begin{pmatrix} Ee^{ikn\alpha_a} - \frac{\alpha_b}{p} Fe^{ikn\alpha_b} \\ \frac{\alpha_a}{p} Ee^{ikn\alpha_a} + Fe^{ikn\alpha_b} \end{pmatrix} \partial\zeta. \quad (3.9)$$

Величины  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$  определены следующими равенствами

$$\begin{aligned} \alpha_a^h &= \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; & \alpha_b^h &= \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}; \\ \alpha_a^l &= i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; & \alpha_b^l &= i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$



Поведение решения  $W_b^0$  будет либо подобно волнам соскальзывания при  $\frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} < 0$ , либо волнам шепчущей галереи для значения  $\frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} > 0$ . Величину  $\psi_B$  будем рассматривать равной  $\frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} > 0$  при распространении волн шепчущей галереи в слое. Далее все подчиняется схеме разделов 2.3–2.7, с той лишь разницей, что в данном случае величина  $\psi_B$  определена соотношением

$$\psi_B^3 = \left( \frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)} \right), \quad \psi_B > 0,$$

вместо  $\psi_A$

$$\psi_A^3 = \left( \frac{b'(0)}{b(0)} \right), \quad \psi_A > 0.$$

#### 4. ПОЛЕ УПРУГИХ SV-ВОЛН В C-СЛОЕ

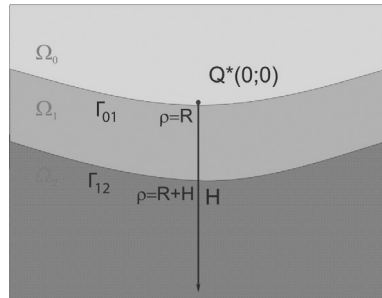


Рис. 3. Слой C.

Круговой C-слой расположен в нормальном сечении к образующей двух concentрических круговых цилиндров. Граница слоя типа “C” (см. рис. 3) имеет наименьший радиус кривизны  $R$  на ней расположен источник  $Q^*$  и заданы граничные условия отсутствия свободного напряжения. На границе с наибольшим радиусом кривизны  $R + H$  заданы условия сопряжения типа условий жесткого контакта.

##### 4.1. Постановка задачи

Пусть волновой вектор  $\mathbf{u}(s, n) = (u, 0, w)$  в C-слое  $-\infty < s < \infty, 0 < n < H$  и в области  $\Omega_2$  удовлетворяет уравнениям теории упругости

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial w}{\partial s} \left[ -(\lambda + 3\mu) \frac{1}{R_i} \left( 1 - \frac{n}{R_i} \right)^{-1} + \frac{\partial \mu}{\partial n} \right]$$

$$+(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} + \rho \omega^2 G_{ss} u + G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} \left[ -3\mu \frac{1}{R_i} \left(1 - \frac{n}{R_i}\right)^{-1} + \frac{\partial \mu}{\partial n} \right] = 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} + \mu G^{ss} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \rho \omega^2 w \\ & + \frac{\partial u}{\partial s} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial n} + 2\mu \frac{1}{R_i} \left(1 - \frac{n}{R_i}\right)^{-1} \right] - \frac{\partial \lambda}{\partial n} w \frac{1}{R_i} \left(1 - \frac{n}{R_i}\right)^{-1} \\ & + \frac{\partial w}{\partial n} \left[ \frac{\partial(\lambda + 2\mu)}{\partial n} - 2(\lambda + \mu) \frac{1}{R_i} \left(1 - \frac{n}{R_i}\right)^{-1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

с граничными условиями для слоя на  $\Gamma_{01}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{sn}|_{n=0} &= \mu \left( G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \Big|_{n=0} = -\delta(s), \\ \sigma_{nn}|_{n=0} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{n=0} - \lambda w \frac{1}{R} \left(1 - \frac{n}{R}\right)^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь метрический тензор  $G_{ss}$  равен  $G_{ss} = \left(1 - \frac{n}{R_i}\right)^2$ , причем  $G^{ss}G_{ss} = 1$ ,  $R_1 = R$ ,  $R_2 = R + H$ . На границе  $\Gamma_{12}$  раздела упругих сред  $s > 0$ ,  $n = H$  выполняются условия жесткого контакта

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]|_{n=H} &= 0, \quad \left[ \sigma_{sn} \equiv \mu \left( G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \Big|_{n=H} = 0, \\ \left[ \sigma_{nn} \equiv (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{n=0} - \lambda w \frac{1}{R_i} \left(1 - \frac{n}{R_i}\right)^{-1} \right] \Big|_{n=H} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (4.1)–(4.4) следует добавить условие излучения  $\mathbf{u}$  при  $n \gg H$ .

#### 4.2. Вид решения задачи

Проведя вычисления, аналогичные нахождению решения для  $\mathcal{A}$ -слоя, получим искомые составляющие вектора смещений  $\mathbf{u}_1$  в слое  $U_a$ ,  $W_a$ ,  $U_b$ ,  $W_b$  (см. формулу (2.6)). Они определяются с помощью компоненты  $W_b^0$  и ее производной по  $n$ . Функция  $W_b^0(\sigma, \nu)$  удовлетворяет следующей задаче

$$\begin{cases} \left( i \frac{\partial W_b^0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W_b^0}{\partial \nu^2} + \varkappa \nu W_b^0 \right) + O(k^{-2/3}) = 0, & \sigma > 0, \quad \nu > 0; \\ W_b^0|_{\nu=0} = i\delta(\sigma) \frac{\psi_c^2}{\mu k^{2/3} 2^{1/3}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\varkappa = \begin{cases} -1, & \text{при } \left(-\frac{1}{R} + \frac{b'(0)}{b(0)}\right) > 0 \\ 1, & \text{для } \left(\frac{1}{R} - \frac{b'(0)}{b(0)}\right) > 0. \end{cases}$$

Здесь коэффициент  $\varkappa$  принимает два значения в соответствии со знаком эффективного радиуса кривизны  $\left(\frac{1}{R} - \frac{b'(0)}{b(0)}\right)$  в нормальном сечении к образующей цилиндра. Зная выражение для поперечной составляющей вектора смещений  $W_b^0 \neq 0$  для  $n > 0$  в разложении (2.6), получим остальные компоненты вектора  $\mathbf{u}_1$  по формулам (2.11)–(2.12), лишь заменяя всюду  $\psi_A^3 = \frac{-b'(0)}{b(0)}$  на величину  $\psi_C^3 = \frac{1}{R} - \frac{b'(0)}{b(0)}$  для волн соскальзывания. Окончательно выпишем вектор смещений падающей SV-волны с учетом граничных условий (2.12) в случае распространения волн соскальзывания вблизи свободной от напряжений поверхности  $n = 0$ , ( $\varkappa = -1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{e^{iks}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \partial\zeta \\ &\times \left( \begin{array}{c} -\frac{i\beta}{k} [Aw_1'(\zeta - \nu) + Bw_2'(\zeta - \nu)] \\ Aw_1(\zeta - \nu) + Bw_2(\zeta - \nu) - \frac{4\alpha_0\beta}{k} [Aw_1'(\zeta - \nu) + Bw_2'(\zeta - \nu)] \end{array} \right) \\ &+ \frac{e^{iks}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \left( \begin{array}{c} Ce^{-kn\alpha_0} + De^{kn\alpha_0} \\ i\alpha_0 [Ce^{-kn\alpha_0} - De^{kn\alpha_0}] \end{array} \right) \partial\zeta. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Функции  $w_1(\zeta - \nu)$  и  $w_2(\zeta - \nu)$  являются линейно независимыми функциями Эйри. Вронскиан  $[w_2'(t)w_1(t) - w_1'(t)w_2(t)]$  этих решений равен  $2i$ ,

$$[w_2'(t)w_1(t) - w_1'(t)w_2(t)] = 2i, \quad \beta = \psi_C k^{2/3} 2^{1/3}, \quad \nu = \beta n.$$

Относительно вида решения следует добавить, что в каждом конкретном случае (будь то волны шепчущей галереи или волны соскальзывания) контур интегрирования от  $-\infty$  до  $\infty$  на плоскости комплексного переменного  $\zeta$  следует проводить с учетом поведения функций Эйри. В упругой среде  $\Omega_2$  вектор смещений волнового процесса  $\mathbf{u}_2$  равен

$$\mathbf{u}_2^h = \frac{e^{iks}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \left( \begin{array}{c} Ee^{ikn\alpha_a} - \frac{\alpha_b}{p} Fe^{ikn\alpha_b} \\ \frac{\alpha_a}{p} Ee^{ikn\alpha_a} + Fe^{ikn\alpha_b} \end{array} \right) \partial\zeta. \quad (4.7)$$

Величины  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$  определены следующими равенствами

$$\begin{aligned}\alpha_a^h &= \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; & \alpha_b^h &= \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}; \\ \alpha_a^l &= i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; & \alpha_b^l &= i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Соотношение скоростей в слое и полупространстве дает нам возможность исследовать три случая поведения волнового поля  $\mathbf{u}_2$  в области  $z > H$ :

$$(*) \quad p < \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)}; \quad (**) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < p < \frac{b(0)}{b_2(H)};$$

$$(***) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)} < p.$$

Тогда соотношение (\*) дает осциллирующий характер поведения продольной и поперечной составляющей вектора смещений  $\mathbf{u}_2$ . Для неравенств (\*\*) продольная составляющая  $\mathbf{u}_2$  экспоненциально убывает подобно функции  $e^{-kn\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}$ , а поперечная составляющая ведет себя как  $e^{ikn\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}$ . В случае (\*\*\*) обе составляющие вектора  $\mathbf{u}_2$  являются экспоненциально убывающими функциями при  $n > H$ . Параметр  $p$  в эйконале приближенно равен  $p = 1 + [\psi_c^2 \zeta] / [2^{1/3} k^{2/3}] + O(1/k)$ . Экспоненциальный множитель  $iksp$  равен тоже приближенно выражению

$$\begin{aligned}iksp &= iks \left( 1 + \frac{\sigma \zeta}{ks} + \dots \right) = iks \left( 1 + \frac{\psi_c^2 \zeta}{k^{2/3} 2^{1/3}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \\ \psi_c^3 &= \frac{1}{R} - \frac{b'(0)}{b(0)}, \quad \psi_c > 0.\end{aligned}$$

Тогда фазовая скорость волнового процесса приближенно имеет вид

$$v_p = b(0) \left( 1 + \frac{\zeta_p \psi_c^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} - \frac{4\psi_c^3 \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{k} + O(k^{-4/3}) \right).$$

### 4.3. Дисперсионное уравнение.

Граничные условия при  $n = 0$  и  $n = H$  дают нам возможность найти неизвестные коэффициенты  $A, B, C, D, E$  и  $F$  для продольной и поперечной составляющих вектора смещений в средах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . С учетом главного приближения выпишем уравнения, которым они удовлетворяют в случаях (h) или (l) слоев. Параметр  $p$  заменим на приближенную величину, т.е.  $p \doteq 1$ . Система шестого порядка относительно коэффициентов  $A, B, C, D, E$  и  $F$  распадается на две: систему второго порядка относительно коэффициентов  $A, B$ :

$$Aw_1(\zeta) + Bw_2(\zeta) = i \frac{\psi_C^2}{\mu(0)2^{1/3}k^{2/3}};$$

$$Aw_1(\zeta - \beta H) + Bw_2(\zeta - \beta H) = 0;$$

и систему четвертого порядка относительно коэффициентов  $C, D, E, F$ , соответствующих (h) или (l) слою:

$$i\alpha_0(\tilde{C} - \tilde{D}) - \lambda_a \tilde{E} - \tilde{F} = \frac{8\alpha_0\psi_C^3}{\mu(0)k^{2/3}\Delta_w};$$

$$\tilde{C} + \tilde{D} - \tilde{E} + \alpha_b \tilde{F} = \frac{2i\psi_C^3}{\mu(0)k^{2/3}\Delta_w};$$

$$2i\alpha_0(\tilde{C} - \tilde{D}) - \frac{\mu_2(H)}{\mu(H)} \left\{ 2\alpha_a \tilde{E} + (1 - \alpha_b^2) \tilde{F} \right\} = \frac{8\alpha_0\psi_C^3}{\mu(0)k^{2/3}\Delta_w};$$

$$\begin{aligned} \left[ \gamma_0^2 \frac{\alpha^2(H)}{b^2(H)} - 2 \right] (\tilde{C} + \tilde{D}) + \left[ \frac{2\mu_2(H)}{\mu(H)} - \frac{b^2(0)\rho_2(H)}{\mu(H)} \right] \tilde{E} - \frac{2\mu_2(H)}{\mu(H)} \alpha_b \tilde{F} \\ = \frac{-4i\psi_C^3}{k^{2/3}\mu(0)\Delta_w}. \end{aligned}$$

В этих формулах вместо величин  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  в случаях высоко- и низкоскоростного слоев следует подставлять  $\alpha_a^{h(l)}$  и  $\alpha_b^{h(l)}$  соответственно определению (2.16). Здесь имеют место равенства  $\tilde{E} = \tilde{E}^h = E e^{ik\alpha_a^h H}$ ,  $\tilde{F} = \tilde{F}^h = F e^{ik\alpha_b^h H}$ , причем следует подставить в коэффициенты  $\tilde{E}^l = E e^{ik\alpha_a^l H}$  и  $\tilde{F}^l = F e^{ik\alpha_b^l H}$  вместо величин  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  величины  $\alpha_a^l$  и  $\alpha_b^l$ . Аналогично, величины  $\tilde{C}$  и  $\tilde{D}$  равны  $\tilde{C} = C e^{ik\alpha_0 H}$  и  $\tilde{D} = D e^{-ik\alpha_0 H}$ ,

$\beta = \psi_C k^{2/3} 2^{1/3}$ ,  $\gamma_0^2 = 1 - \frac{b^2(0)}{a^2(0)}$ . Найдем эти коэффициенты из системы, полученной из граничных условий. Асимптотически главная составляющая вектора смещений  $\mathbf{u}_1$  (см. формулу (2.14)) состоит из линейной комбинации функций Эйри

$$w_1(-\beta n + \zeta), \quad w_2(-\beta n + \zeta)$$

и коэффициентов  $A, B$ , которые равны

$$A = \frac{i\psi_C^2}{\mu(0)k^{2/3}2^{1/3}} \frac{w_2(\zeta - \beta H)}{[w_1(\zeta)w_2(\zeta - \beta H) - w_2(\zeta)w_1(\zeta - \beta H)]}; \quad (4.9)$$

$$B = -\frac{i\psi_C^2}{\mu(0)k^{2/3}2^{1/3}} \frac{w_1(\zeta - \beta H)}{[w_1(\zeta)w_2(\zeta - \beta H) - w_2(\zeta)w_1(\zeta - \beta H)]}. \quad (4.10)$$

Здесь определитель  $[w_1(\zeta)w_2(\zeta - \beta H) - w_2(\zeta)w_1(\zeta - \beta H)]$  обозначен через  $\Delta_w$ . Проведя громоздкие вычисления, найдем, что неизвестные коэффициенты  $\tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}$  и  $\tilde{F}$  для волн соскальзывания отличаются от подобных коэффициентов, вычисленных в пункте 2.3 лишь множителем  $(-2i)$ . Например,  $\tilde{C}_w = -2i\tilde{C}_v$ . Дисперсионное уравнение данной задачи это уравнение

$$\Delta_w \equiv [w_1(\zeta)w_2(\zeta - \beta H) - w_2(\zeta)w_1(\zeta - \beta H)] = 0.$$

#### 4.4. Корни дисперсионного уравнения при $|\zeta - \beta H| \gg 1$

Найдем теперь корни дисперсионного уравнения  $\Delta_w = 0$ , т.е. корни уравнения

$$w_2(\zeta - \beta H) \left[ w_1(\zeta) - w_2(\zeta) \frac{w_1(\zeta - \beta H)}{w_2(\zeta - \beta H)} \right] = 0. \quad (4.11)$$

При нахождении корней уравнения  $\Delta_w = 0$  следует различать некоторые соотношения аргументов функций, которые составляют само дисперсионное уравнение. При выполнении неравенства  $|\zeta - \beta H| \gg 1$  второе слагаемое в (4.11) экспоненциально мало по сравнению с первым  $w_1(\zeta)$ . В этом случае уравнение  $\Delta_w = 0$  эквивалентно уравнению  $w_1(\zeta) = 0$ , если контур интегрирования  $L_C$  провести по лучу, идущему от  $\infty e^{i2\pi/3}$  до 0 и от 0 до  $\infty e^{-i\pi/3}$  на комплексной переменной  $\zeta$ . Следовательно, вычисляя интегралы (4.6)–(4.7) методом вычетов, корнями дисперсионного уравнения будут значения  $\zeta = \zeta_q$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , которые являются корнями уравнения  $w_1(\zeta) = 0$ . Аргумент этих корней равен  $\pi/3$ .

#### 4.5. Корни дисперсионного уравнения для параметра $|\zeta - \beta H| \sim O(1)$

Для конечных значений аргумента  $\zeta - \beta H$  функций Эйри дисперсионное уравнение

$$\Delta_w \equiv [w_1(\zeta)w_2(\zeta - \beta H) - w_2(\zeta)w_1(\zeta - \beta H)] = 0;$$

выполняется при достаточно малой ширине слоя  $H = O(k^{-2/3+\varepsilon}, \varepsilon > 0)$ . Дисперсионное уравнение  $\Delta_w = 0$  в этом случае решается численно и корни этого уравнения  $\zeta = \zeta_l, l = 1, 2, \dots$  подставляются в производную по  $\zeta$  от дисперсионной функции  $\Delta_w$ :

$$(\Delta_w)'_{\zeta}|_{\zeta=\zeta_l} = 2i \left[ \frac{w_1(\zeta)}{w_1(\zeta - \beta H)} - \frac{w_1(\zeta - \beta H)}{w_1(\zeta)} \right] \Big|_{\zeta=\zeta_l}.$$

Заметим, что для счета удобно перейти от функций Эйри  $w_1(t), w_2(t)$  к вещественнозначным функциям  $v, u$ , но уже другого аргумента. Контур интегрирования от  $-\infty$  до  $\infty$  следует проводить с учетом области расположения вычисленных корней дисперсионного уравнения  $\Delta_w = 0$ .

#### 4.6. Окончательный вид SV-волны в C-слое для $|\zeta - \beta H| \gg 1$

Главное приближение решения задачи распространения в слое SV волн типа волн соскальзывания ( $\psi_C^3 = \frac{1}{R} - \frac{b'(0)}{b(0)} > 0$ ) в случае  $|\zeta - \beta H| \gg 1$  запишется следующими выражениями. Основной составляющей в слое является вертикально поляризованная поперечная компонента вектора смещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{u}_{1a}$ . Эта составляющая как и поперечный вектор смещений никоим образом не зависят от того, является ли слой высоко- или низкоскоростным, т.е. в главном приближении не зависит от соотношения скоростей в слое и полупространстве. Волна SV поляризации имеет поперечную волну вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1b} &= \frac{-e^{iks} \psi_C^2}{\mu(0) k^{2/3} 2^{1/3}} \sum_{q=1}^Q \frac{e^{i\sigma \zeta_q}}{w_1'(\zeta_q)} \\ &\times \left( \begin{array}{c} -\frac{\psi_C 2^{1/3}}{k^{1/3}} w_1'(-\beta n + \zeta_q) \\ w_1(-\beta z + \zeta_q) - \frac{4\alpha_0 \psi_C 2^{1/3}}{k^{1/3}} w_1'(-\beta n + \zeta_q) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Продольная волна SV поляризации в слое равна

$$\mathbf{u}_{1a} = \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k\Delta_2} \sum_{q=1}^Q \frac{e^{i\sigma\zeta_q} e^{-2/3|\beta H - \zeta_q|^{3/2}} |-\beta H + \zeta_q|^{1/4}}{w'_1(\zeta_q)} \times \left( \begin{array}{l} \Delta_C e^{k\alpha_0(H-n)} + \Delta_D e^{-k\alpha_0(H-n)} \\ i\alpha_0(\Delta_C e^{k\alpha_0(H-n)} - \Delta_D e^{-k\alpha_0(H-n)}) \end{array} \right). \quad (4.13)$$

Здесь величины  $\Delta_C$ ,  $\Delta_D$ ,  $\Delta_2$  есть функции от параметров Ламе в слое при  $n = 0$  и параметров Ламе в слое и полупространстве при  $n = H$ . Эти определители зависят и от параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , которые различны для слоев  $h$  и  $l$ ,  $\alpha_0 = \sqrt{1 - \gamma_0^2}$ . Соотношение скоростей в слое и полупространстве дает нам возможность исследовать три случая поведения волнового поля  $\mathbf{u}_2$  в области  $z > H$ :

$$(*) \quad p < \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)}; \quad (**) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < p < \frac{b(0)}{b_2(H)};$$

$$(***) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)} < p.$$

Во всех этих случаях решение для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$  продольного и поперечного смещений в полупространстве  $n \geq H$  представляется следующими выражениями. Так высокоскоростной слой ( $h$ ) относительно продольной и поперечной скоростей дает для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k} \sum_{q=1}^Q \frac{e^{i\sigma\zeta_q} e^{-2/3|-\beta H + \zeta_q|^{3/2}} |-\beta H + \zeta_q|^{1/4}}{w'_1(\zeta_q)} \times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(n-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \\ \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(n-H)} + \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \end{array} \right). \quad (4.14)$$

Здесь величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  есть функции от параметров Ламе в слое при  $n = 0$  и параметров Ламе в слое и полупространстве при  $n = H$ . Эти определители зависят и от параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , которые для слоя  $h$  равны

$$\alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}.$$



Решение в полупространстве  $z > H$  носит осциллирующий характер, причем при  $k(z - H) \gg 1$  следует считать, что  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ . Случай (\*\*), определяет высокоскоростной слой по поперечной составляющей и низкоскоростной слой для продольной составляющей вектора смещений  $\mathbf{u}_2$ , для которого

$$\alpha_a = \alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b = \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

Тогда решение  $\mathbf{u}_2$  есть экспоненциально затухающие функции по  $z$  для продольных составляющих, а соответствующие составляющие поперечной волны являются осциллирующими функциями  $z$ , убывающие для  $k(n - H) \gg 1$ , если  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k} \sum_{q=1}^Q \frac{e^{i\sigma\zeta_q} e^{-2/3|\beta H + \zeta_q|^{3/2}} |-\beta H + \zeta_q|^{1/4}}{w_1'(\zeta_q)} \\ &\times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \\ i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Наконец, низкоскоростной слой относительно продольной и поперечной скоростей в полупространстве определяет затухающие экспоненциально компоненты волнового вектора  $\mathbf{u}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k} \sum_{q=1}^Q \frac{e^{i\sigma\zeta_q} e^{-2/3|\beta H + \zeta_q|^{3/2}} |-\beta H + \zeta_q|^{1/4}}{w_1'(\zeta_q)} \\ &\times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} - \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(n-H)} \\ \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(z-H)} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь следует в величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  подставить вместо параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  их значения в случае низкоскоростного слоя

$$\alpha_a^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; \quad \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

#### 4.7. Главное приближение SV-волны в C-слое в случае $|\zeta - \beta H| \sim O(1)$

Решение задачи распространения в слое SV волн типа волн соскальзывания в главном приближении в случае  $|\zeta - \beta H| \sim O(1)$  запишется следующими выражениями. Основной составляющей в слое является вертикально поляризованная поперечная компонента  $w_b$  вектора смещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{u}_{1a}$ . Эта составляющая как и поперечный вектор смещений никоим образом не зависят от того, является ли слой высоко- или низкоскоростным, т.е. в главном приближении не зависят от соотношения скоростей в слое и полупространстве. Волна SV поляризации имеет поперечную волну вида:

$$\mathbf{u}_{1b} = \frac{-e^{iks}\psi_C^2}{\mu(0)k^{2/3}2^{1/3}} \sum_{l=1}^L \frac{e^{i\sigma\zeta_l}}{(\Delta_w)'_{\zeta}|\zeta_l} \times \left( \begin{array}{c} -\frac{i\psi_C 2^{1/3}}{k^{1/3}} U(w'_1, w'_2) \\ U_0(w_1, w_2) - \frac{4\alpha_0\psi_C 2^{1/3}}{k^{1/3}} U(w'_1, w'_2) \end{array} \right). \quad (4.17)$$

Дисперсионное уравнение  $\Delta_w = 0$  в этом случае решается численно и корни этого уравнения  $\zeta = \zeta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  подставляются в производную по  $\zeta$  от дисперсионной функции  $\Delta_w$ :

$$(\Delta_w)'_{\zeta}|\zeta_l = 2i \left[ \frac{w_1(\zeta)}{w_1(\zeta - \beta H)} - \frac{w_1(\zeta - \beta H)}{w_1(\zeta)} \right] \Big|_{\zeta_l}.$$

Здесь функции  $U_0(w_1, w_2)$  и  $U(w'_1, w'_2)$  равны

$$U_0(w_1, w_2) = \{w_1(\zeta_l - \beta n)w_2(\zeta_l - \beta H) - w_2(\zeta_l - \beta n)w_1(\zeta_l - \beta H)\},$$

$$U(w'_1, w'_2) = \{w'_1(\zeta_l - \beta n)w'_2(\zeta_l - \beta H) - w'_2(\zeta_l - \beta n)w'_1(\zeta_l - \beta H)\}.$$

Продольная волна SV поляризации в слое равна

$$\mathbf{u}_{1a} = \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k} \sum_{l=1}^L \frac{e^{i\sigma\zeta_l}}{(\Delta_w)'_{\zeta}|\zeta_l} \times \left( \begin{array}{c} \frac{\Delta_C}{\Delta_2} e^{k\alpha_0(H-n)} + \frac{\Delta_D}{\Delta_2} e^{-k\alpha_0(H-n)} \\ i\alpha_0 \left( \frac{\Delta_C}{\Delta_2} e^{k\alpha_0(H-n)} - \frac{\Delta_D}{\Delta_2} e^{-k\alpha_0(H-n)} \right) \end{array} \right). \quad (4.18)$$

Соотношение скоростей в слое и полупространстве дает нам возможность исследовать три случая поведения волнового поля  $\mathbf{u}_2$  в области  $z > H$ :

$$(*) \quad p < \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)}; \quad (**) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < p < \frac{b(0)}{b_2(H)};$$

$$(***) \quad \frac{b(0)}{a_2(H)} < \frac{b(0)}{b_2(H)} < p.$$

Во всех этих случаях решение для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$  продольного и поперечного смещений в полупространстве  $z \geq H$  представляется следующими выражениями. Так высокоскоростной слой ( $h$ ) относительно продольной и поперечной скоростей дает для волнового вектора  $\mathbf{u}_2$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{2e^{iks}\psi_c^3}{\mu(0)k} \sum_{l=1}^L \frac{e^{i\sigma\zeta_l}}{(\Delta_w)'_{\zeta} |_{\zeta_l}} \times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(n-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \\ \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}(n-H)} + \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \end{array} \right). \quad (4.19)$$

Здесь величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  есть функции от параметров Ламе в слое при  $z = 0$  и параметров Ламе в слое и полупространстве при  $z = H$ . Эти определители зависят и от параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ , которые для слоя  $h$  равны

$$\alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}.$$

Решение в полупространстве  $n > H$  носит осциллирующий характер, причем при  $k(n - H) \gg 1$  следует считать, что  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ . Случай (\*\*\*) определяет высокоскоростной слой по поперечной составляющей и низкоскоростной слой для продольной составляющей вектора смещений  $\mathbf{u}_2$ , для которого

$$\alpha_a = \alpha_a^h = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_2^2(H)} - p^2}; \quad \alpha_b = \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

Тогда решение  $\mathbf{u}_2$  есть экспоненциально затухающие функции по  $n$  для продольных составляющих, а соответствующие составляющие поперечной волны являются осциллирующими функциями  $n$ , убывающие для  $k(n-H) \gg 1$ , если  $\text{Im } k = \varepsilon > 0$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k} \sum_{l=1}^L \frac{e^{i\sigma\zeta_l}}{(\Delta_w)_\zeta^l | \zeta_l} \times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_E^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} - \frac{\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}}{p} \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \\ i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}} \frac{\Delta_F^l}{\Delta_2^l} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{ik\sqrt{\frac{b^2(0)}{b_2^2(H)} - p^2}(n-H)} \end{array} \right). \quad (4.20)$$

Наконец, низкоскоростной слой относительно продольной и поперечной скоростей в полупространстве определяет затухающие экспоненциально компоненты волнового вектора  $\mathbf{u}_2$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{2e^{iks}\psi_C^3}{\mu(0)k} \sum_{l=1}^L \frac{e^{i\sigma\zeta_l}}{(\Delta_w)_\zeta^l | \zeta_l} \times \left( \begin{array}{l} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} - \frac{i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}}{p} \frac{\Delta_F}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(n-H)} \\ i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}} \frac{\Delta_E}{\Delta_2} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}(n-H)} + \frac{\Delta_F^h}{\Delta_2^h} e^{-k\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}(n-H)} \end{array} \right). \quad (4.21)$$

Здесь следует в величины  $\Delta_E$ ,  $\Delta_F$ ,  $\Delta_2$  подставить вместо параметров  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  их значения в случае низкоскоростного слоя

$$\alpha_a^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{a_2^2(H)}}; \quad \alpha_b^l = i\sqrt{p^2 - \frac{b^2(0)}{b_2^2(H)}}.$$

Здесь  $\zeta = \zeta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  есть корень функции  $\Delta_w = 0$ , величина  $\psi_C^3 = 1/R - b'(0)/b(0)$  определена через производную скорости в слое, координата  $\sigma$  равна  $\sigma = s k^{1/3} 2^{-1/3} \psi_C^2$ ,  $\gamma_0 = b(0)/a(0)$ , а  $p = 1 - \zeta_n \frac{\psi_C^2}{k^{2/3} 2^{1/3}} + \dots$ .

Полученные в работе формулы (2.20)–(2.29) и (4.13)–(4.22) для волновых полей, распространяющихся в слоях трех видов (см. рис. 1, 2 и

3) и в полупространстве ( $z > H$  либо  $n > H$ ) показывают, что вертикальная составляющая вектора поперечных смещений SV поляризации, распространяющаяся в слоях, слабо реагирует на соотношение фазовой скорости всего волнового процесса с продольной или поперечной скоростями в области  $\Omega_2$ . Это полностью согласуется с данными экспериментов (см. статьи [1, 6] и [2]), проведенных для волн SH поляризации. Детальное исследование требуется в случаях численного нахождения корней дисперсионных уравнений для слоев, удовлетворяющим соотношениям  $|\zeta \pm \psi 2^{1/3} k^{2/3} H| \sim O(1)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Christopher Stephens & Bryan L. Isacks, *Toward an understanding of Sn: normal modes of Love waves in an oceanic structure*. — Bull. Seism. Soc. Amer. **67**, No. 1 (1977), 69–78.
2. П. В. Крауклис, Н. В. Цепелев, Л. А. Крауклис, *Об асимптотическом подходе к задаче дальнего распространения волн*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **156** (1986), 125–135.
3. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения*. — Журн. эксперим. и теор. физики **16**, No. 7, (1946), 557–573.
4. R. N. Buchal, J. B. Keller, *Boundary layer problems in diffraction theory*. — J. Comm. Pure Appl. Math. **13**, No. 1 (1960), 85–114.
5. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. Изд-во Ленингр. ун-та, Л. (1974). *The anelasticity of the earth*. — J. Geophys. Res. **69** (1964), 2071–2084.
7. Л. М. Бреховских, *О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы*. — Акустический журнал АН СССР **12**, No. 3, (1966), 374–376.
8. И. В. Мухина, И. А. Молотков, *О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам*. — Изв. АН СССР. Физика Земли No. 4, (1967), 3–8.
9. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы*. — Труды Матем. института им. В. А. Стеклова **СХV**, No. 1 (1971), 114–130.
10. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 86–102.
11. Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция поверхностных SV-волн на линии разрыва упругих параметров*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2007), 77–105.

Kirpichnikova N. Ya., Kirpichnikova A. S. Surface layer method for far field diffractions of SV surface waves.

We investigate SV polarized wave field in the elastic gradient layer of constant width. A point source is situated at the boundary of the layer.

We assume the rigid contact conditions are valid at the boundary between the layer and elastic half-space. We show that the interference field in the main approximation far from the source does not depend on the relation between phase velocity and transversal and longitudinal velocities in the half-space.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
*E-mail*: nkirp@pdmi.ras.ru

Поступило 5 июля 2010 г.

School of Mathematics&Statistics  
University of Glasgow,  
Glasgow G12 8QW, UK  
*E-mail*: a.kirpichnikova@gmail.com