Л. А. ГУСАРОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В предлагаемой статье выводятся оценки роста решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, с помощью которых затем получаются критерии для ограниченности решений и стремления их к нулю.

Теорема 1. *Если* $\psi(x)$ *— линейная функция, положительная для всех рассматриваемых значений* x, $\bar{y}(x)$ *есть решение уравнения*

$$y'' + \psi(x) y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям $\bar{y}(x_1) = 0$, $\bar{y}'(x_1) \neq 0$, x_2 *— нуль этого решения, непосредственно следующий за нулем* x_1, *то* $x_2 - x_1 \leqslant \frac{\pi}{c}$, *где* $c > 0$ *и* $c^2 = \frac{\psi(x_1) + \psi(x_2)}{2}$.

Проведем доказательство только для случая, когда в выражении функции $\psi(x) = kx + b$ $k \geqslant 0$, так как доказательство при $k < 0$ совершенно аналогично.

Величина $\frac{\pi}{c}$ равна расстоянию между двумя соседними нулями любого нетривиального решения $\bar{z}(x)$ уравнения

$$z'' + c^2 z = 0, \tag{2}$$

поэтому в качестве $\bar{z}(x)$ можно взять решение, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{z}(x_2) = 0$, $\bar{z}'(x_2) = \bar{y}'(x_2)$.

Предположим для определенности, что $\bar{y}'(x_1) > 0$ (случай $\bar{y}'(x_1) < 0$ рассматривается аналогично).

Допустим, что расстояние между нулями $\bar{z}(x)$ меньше $x_2 - x_1$. Тогда из (1) и (2) получим тождество

$$\bar{z}''(x)\bar{y}(x) - \bar{y}''(x)\bar{z}(x) = [\psi(x) - c^2]\bar{y}(x)\bar{z}(x).$$

Проинтегрировав обе части этого тождества в пределах от x_1 до x_2, находим:

$$\bar{z}'(x)\bar{y}(x) - \bar{y}'(x)\bar{z}(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [\psi(x) - c^2]\bar{y}(x)\bar{z}(x)\,dx. \tag{3}$$

Выражение, стоящее в (3) слева, равно $\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1)$ и отрицательно, ибо $\bar{y}'(x_1) > 0$ по предположению, а $\bar{z}(x_1) < 0$, так как $\bar{z}(x_2) = 0$, $\bar{z}'(x_2) < 0$,

расстояние между нулями $\bar{z}(x)$ больше $\frac{x_2-x_1}{2}$ $\left(\text{поскольку } c^2 \leqslant \psi(x) \text{ при } \frac{x_1+x_2}{2} \leqslant x \leqslant x_2\right)$ и меньше x_2-x_1 по допущению.

Докажем теперь, что правая часть равенства (3) не отрицательна. Обозначим через $\bar{x}_1$ нуль $\bar{z}(x)$, непосредственно предшествующий нулю x_2. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} [\psi(x)-c^2]\bar{y}\bar{z}\,dx = \int_{x_1}^{\bar{x}_2} [\psi(x)-c^2]\bar{y}\bar{z}\,dx + \int_{\bar{x}_1}^{x_2} [\psi(x)-c^2]\bar{y}\bar{z}\,dx. \qquad (3')$$

Первый интеграл, стоящий в (3′) справа, имеет неотрицательное значение, так как для $x_1 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1$ $\psi(x)-c^2 \leqslant 0$, $\bar{z}(x) \leqslant 0$, $\bar{y}(x) \geqslant 0$.

Второй интеграл в правой части (3′) тоже имеет неотрицательное значение. Действительно, обозначим через $\bar{x}_2$ точку, симметричную с $\bar{x}_1$ относительно середины $\frac{x_1+x_2}{2}$ отрезка $[x_1, x_2]$. Точка $\bar{x}_2$, очевидно, будет расположена внутри интервала $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$.

$$\int_{\bar{x}_1}^{x_2} [\psi(x)-c^2]\bar{y}\bar{z}\,dx = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} [\psi(x)-c^2]\bar{y}\bar{z}\,dx + \int_{\bar{x}_2}^{x_2} [\psi(x)-c^2]\bar{y}\bar{z}\,dx. \qquad (3'')$$

Так как при $\bar{x}_2 \leqslant x \leqslant x_2$ $\psi(x)-c^2 \geqslant 0$ и $\bar{y}\bar{z} \geqslant 0$, то второй интеграл в правой части выражения (3″) неотрицательный. Неотрицательным будет также и первый интеграл в правой части (3″) в силу того, что в точках отрезка $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$, равноудаленных от его середины $\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}$, имеем:

а) значения выражения $\psi(x)-c^2$ равны по абсолютной величине и положительны для точек его правой половины; б) значения $\bar{z}(x) \geqslant 0$ и будут бóльшими для точек его правой половины, ибо

$$\bar{z}(x) = -\frac{\bar{y}'(x_2)}{c}\sin c(x-x_1);$$

b) значения $\bar{y}(x) \geqslant 0$ и будут бóльшими или равными для точек его правой половины.

Докажем пункт b).

Если $k=0$, то это очевидно. Если $k>0$, то $\psi(x)$ строго возрастает; поэтому из теоремы сравнения следует, что точка, в которой $\bar{y}(x)$ достигает максимума в отрезке $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$, расположена правее середины отрезка. Но тогда $\bar{y}'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$. Рассмотрим при $\frac{x_1+x_2}{2} \leqslant x \leqslant x_2$ решение $\bar{y}(x)$ уравнения (1) и решение $\bar{v}(x)$ уравнения $v''+\psi_1(x)v=0$, где

$$\psi_1(x) = \psi_1\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] = \psi\left[\frac{x_1+x_2}{2}-\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right],$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\bar{v}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \bar{y}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad \text{и} \quad \bar{v}'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = -\bar{y}'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \qquad (3''')$$

Очевидно, что

$$\bar{v}\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] = \bar{y}\left[\frac{x_1+x_2}{2}-\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]$$

и потому

$$\bar{v}(x_2) = \bar{y}(x_1) = 0.$$

Кривая $\bar{v}(x)$ не может иметь общих точек с кривой $\bar{y}(x)$ при $\frac{x_1+x_2}{2} < x < x_2$, в противном случае в самой левой из таких точек выполнялось бы неравенство $\bar{v}'(x) \geqslant \bar{y}'(x)$ $\left(\text{ибо } \bar{v}'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \bar{y}'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ и } \bar{v}'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0\right)$, откуда следовало бы $\left(\text{в силу того, что при } \frac{x_1+x_2}{2} < x < x_2 \quad \psi_1(x) < \psi(x) \right.$ $\left.\text{и } \bar{v}(x_2) = 0\right)$, что $\bar{y}(x)$ должно обратиться в нуль при значении, бо́льшем $\frac{x_1+x_2}{2}$ и меньшем x_2, что противоречило бы условию $\bar{y}(x_2) = 0$.

Отсюда, в силу начальных условий (3‴), получаем, что при $\frac{x_1+x_2}{2} < x < x_2$

$$\bar{v}(x) = \bar{y}\left[\frac{x_1+x_2}{2} - \left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] < \bar{y}(x).$$

Таким образом, пункт b), а вместе с ним неотрицательность правой части выражения (3) доказаны, что противоречит отрицательности левой части (3), и теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) $\psi(x) = kx + b$, $k \geqslant 0$, $\psi(x) \geqslant a^2 > 0$ *для всех рассматриваемых значений* x, x_1 *и* x_2, $x_2 > x_1$, *— два последовательных нуля какого-нибудь нетривиального решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *то для* $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

$$|y(x)| \leqslant \frac{|y'(x_2)|}{q} \sin q(x_2 - x) = \bar{z}(x), \tag{4}$$

где q *— положительная постоянная, такая, что решение уравнения*

$$y'' + q^2 y = 0 \tag{4'}$$

имеет расстояние между нулями, равное $x_2 - x_1$.

Доказательство. Достаточно провести доказательство только для случая $y'(x_1) > 0$, так как с изменением знака у производной в начальных условиях решение уравнения (1) изменит только знак.

Заметим, что $\bar{z}(x)$ является решением уравнения (4′), удовлетворяющим начальным условиям $\bar{z}(x_2) = y(x_2) = 0$, $\bar{z}'(x_2) = y'(x_2)$. Если $k = 0$, то теорема очевидна, ибо тогда $\psi(x) = b = q^2$, поэтому $y(x) = \bar{z}(x)$. Пусть теперь $k > 0$; обозначим через x_1^* точку отрезка $[x_1, x_2]$, в которой $\psi(x_1^*) = q^2$. Для $x_1^* < x < x_2$ из теоремы сравнения следует, что $\bar{z}(x) > y(x)$, поскольку для этих значений x $\psi(x) > q^2$. Для $x_1 < x \leqslant x_1^*$ $\bar{z}(x) > y(x)$. Действительно, предположив, что в некоторых точках полуинтервала $(x_1, x_1^*]$ $\bar{z}(x)$ и $y(x)$ равны и обозначив через x_3 самую правую из таких точек этого полуинтервала, мы получим, что $\bar{z}'(x_3) \geqslant y'(x_3)$, так как при $x_3 < x < x_2$ $\bar{z}(x) > y(x)$. Из неравенств же $\bar{z}'(x_3) \geqslant y'(x_3)$ и $\psi(x) < q^2$ при $x_1 < x < x_3$ следует (см. [1]), что $\bar{y}(x)$ обратится в нуль при значении x, удовлетворяющем неравенству $x_1 < x < x_2$, чего не может быть в силу теоремы 1.

Точно таким же путем может быть доказана

Теорема (3). *Если в уравнении* (1) $\psi(x) = kx + b$, $k < 0$ *для всех рассматриваемых значений* x, x_1 *и* x_2, $x_2 > x_1$, *— два последовательных нуля какого-нибудь нетривиального решения* $y(x)$ *этого уравнения, то для* $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

$$|y(x)| \geqslant \frac{|y'(x_2)|}{q} \sin q(x_2 - x). \tag{5}$$

Замечание 1. Из теоремы 1 непосредственно следует, что $q^2 \geqslant \frac{\psi(x_1)+\psi(x_2)}{2}$. С другой стороны, из теоремы сравнения Штурма очевидно, что $q^2 \leqslant d^2$, где d^2 равно наибольшему из значений $\psi(x_1)$ и $\psi(x_2)$.

Теорема 4. *Если в уравнении* (1) $\psi(x) = kx + b$, $\psi(x) \geqslant a^2$, x_1 *и* x_2, $x_2 > x_1$, — *два последовательных нуля какого-нибудь его нетривиального решения* $y(x)$, *то*

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \cdot l, \tag{6}$$

где $l = \left\{1 + \frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{2q^2 - [\psi(x_2) - \psi(x_1)]}\right\}$, *а величина* q *имеет прежнее значение.*

Доказательство. Подставляя в уравнение (1) его решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям теоремы, и умножая результат на $y'(x)$, получим тождество:

$$y''y' + \psi(x)yy' = 0. \tag{7}$$

Интегрируя его в пределах от x_1 до x_2, находим:

$$[y'(x_2)]^2 = [y'(x_1)]^2 + \int_{x_1}^{x_2} \psi'(x) y^2 \, dx. \tag{8}$$

Если $k \geqslant 0$, то, подставляя в (8) вместо $y^2(x)$ правую часть неравенства (4), получим:

$$[y'(x_2)^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 + \frac{k[y'(x_2)]^2}{q^2} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 q(x - x_2)\, dx =$$

$$= [y'(x_1)]^2 + \frac{[y'(x_2)]^2 (\psi(x_2) - \psi(x_1))}{2q^2}$$

или

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left\{1 + \frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{2q^2 - [\psi(x_2) - \psi(x_1)]}\right\},$$

что и требовалось доказать.

Если $k < 0$, то неравенство (6) получается точно таким же путем из (7) и (5) и теорема полностью доказана.

Теорема 5. *Пусть в уравнении*

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{9}$$

$p(x) \geqslant a^2 > 0$, $p'(x)$ *непрерывна для всех рассматриваемых значений* x, x_1 *и* x_2, $x_2 > x_1$, — *два последовательных нуля некоторого нетривиального решения* $y(x)$ *этого уравнения. Тогда*

1) *если в отрезке* $[x_1, x_2]$ *есть нуль* $p'(x)$, *то*

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left\{1 + \frac{\pi}{a_1^3}(M - m)\right\}, \tag{10}$$

где M — *наибольшее,* m — *наименьшее значение* $p'(x)$ *в отрезке* $[x_1, x_2]$, $a_1 > 0$ *и* a_1^2 — *наименьшее значение* $p(x)$ *в том же отрезке;*

2) *если в отрезке* $[x_1, x_2]$ $p'(x) > 0$, *то*

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \frac{p(x_2) + p(x_1)}{2p(x_1)} \left\{1 + \frac{\pi}{2a_1^3}(M - m)\right\}; \tag{11}$$

3) *если в отрезке* $[x_1, x_2]$ $p'(x) < 0$, *то*

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left\{1 + \frac{\pi}{a_1^3}(M - m)\right\} \cdot \left\{1 + \frac{p(x_2) - p(x_1)}{3p(x_1) - p(x_2) + \frac{\pi}{a_1}(M - m)}\right\}. \tag{12}$$

Доказательство. Если выполнено условие 1), то

$$[y'(x_2)]^2=[y'(x_1)]^2+\int_{x_1}^{x_2} p'(x)\,y^2(x)\,dx^* \leqslant [y'(x_1)]^2+\int_{x_1}^{x_2}(M-m)\,y^2(x)\,dx. \quad (10{,}1)$$

Известно, что при $p(x)\geqslant a_1^2>0$ справедливы неравенства: $|y(x)|\leqslant\frac{|y'(x_1)|}{a_1}$ в отрезке $[x_1, x_2]$ и $\frac{\pi}{a_1}\geqslant x_2-x_1$ (см. [2]), поэтому из (10,1) непосредственно выводим (10).

Если выполнено условие 2), то для $x\geqslant x_1$ рассмотрим, наряду с решением $y(x)$ уравнения (9), решение $u(x)$ уравнения

$$u''(x)+r(x)\,u=0, \quad (13^*)$$

где $r(x)=p(x_1)+m(x-x_1)$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x_1)=y(x_1)$, $u'(x_1)=y'(x_1)$.

Обозначив через x_2^* первый нуль $u(x)$, непосредственно следующий за нулем x_1, из (6) и замечания 1 находим:

$$[u'(x_2^*)]^2\leqslant[u'(x_1)]^2\,\frac{r(x_2^*)+r(x_1)}{2r(x_1)}=[y'(x_1)]^2\,\frac{r(x_2^*)+p(x_1)}{2p(x_1)}. \quad (13{,}0)$$

Далее,

$$[y'(x_2)]^2-[y'(x_1)]^2=\int_{x_1}^{x_2} p'(x)\,y^2(x)\,dx, \quad (13{,}1)$$

$$[u'(x_2^*)]^2-[u'(x_1)]^2=[u'(x_2)]^2-[y'(x_1)]^2=\int_{x_1}^{x_2^*} r'(x)\,u^2(x)\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2^*} m u^2(x)\,dx. \quad (13{,}2)$$

При $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ $p(x)\geqslant r(x)\geqslant a_1^2=p(x_1)$, поэтому из теорем сравнения Штурма следует, что на этом отрезке $|u(x)|\geqslant|y(x)|$ $x_2^*\geqslant x_2$, $x_2^*-x_1<\frac{\pi}{a_1}$. Заметив это, из (13,1) и (13,2) получаем:

$$[y'(x_2)]^2-[u'(x_2^*)]^2\leqslant\int_{x_1}^{x_2^*}(M-m)\,u^2(x)\,dx. \quad (13{,}3)$$

Так как $r(x)$ — линейная функция и $m>0$, то для $|u(x)|$ справедлива оценка (4), если в ней $y(x)$ заменить на $u(x)$, x_2 на x_2^* и $\psi(x)$ на $r(x)$. С помощью этой оценки преобразуем (13,3) к виду:

$$[y'(x_2)]^2-[u'(x_2^*)]^2\leqslant(M-m)\,\frac{[u'(x_2^*)]^2}{2q^2}(x_2^*-x_1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M-m}{r(x_2^*)+r(x_1)}\,[u'(x_2^*)]^2\cdot\frac{\pi}{a_1}. \quad (13{,}4)$$

Отсюда и из неравенства (13,0) имеем:

$$[y'(x_2)]^2\leqslant[y'(x_1)]^2\,\frac{r(x_2^*)+p(x_1)}{2p(x_1)}\left\{1+\frac{M-m}{2a_1^3}\cdot\pi\right\}. \quad (13{,}5)$$

* Это равенство получается так же, как и соотношение (8).

Заметим, что $r(x_2^*) \leqslant p(x_2)$. Действительно, допустив противное и обозначив $\alpha = x_2^* - x_2$, $r_1(x) = r(x+\alpha)$, мы получили бы, во-первых, что $\alpha > 0$, так как тогда $r(x_2^*) - r(x_1) = m(x_2^* - x_1) > p(x_2) - p(x_1) = p'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant m(x_2 - x_1) > 0$; во-вторых, что при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ $r_1(x) = r(x+\alpha) = p(x_1) + m(x + x_2^* - x_2 - x_1) = p(x_1) + m(x_2^* - x) - m(x_2 - x) = r(x_2^*) - m(x_2 - x) > p(x_2) - p(x_2) + p(x) = p(x)$, откуда в силу теоремы сравнения для решения $v(x)$ уравнения $v''(x) + r_1(x)v(x) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $v(x_2) = u(x_2^*) = u(x_2 + \alpha) = 0$, $v'(x_2) = u'(x_2^*) = u'(x_2 + \alpha)$, нуль x_{1v}, первый слева от нуля x_2, должен был бы удовлетворять условию $x_{1v} \geqslant x_1$, что невозможно, ибо для $x \leqslant x_2$ $v(x) = u(x+\alpha)$, а у решения $u(x+\alpha)$ первый нуль, лежащий слева от x_2^*, есть x_1, поэтому $x_{1v} = x_1 - \alpha < x_1$. Неравенство $r(x_2^*) \leqslant p(x_2)$, а с ним и неравенство (11), которое получается из (13,5) заменой $r(x_2^*)$ на $p(x_2)$, доказаны.

Пусть, наконец, выполнено условие 3) теоремы. Тогда $p'(x) < 0$ в отрезке $[x_1, x_2]$ и $M < 0$. Рассмотрим для $x \leqslant x_2$ решение $w(x)$ уравнения

$$w''(x) + S(x)w(x) = 0, \tag{14*}$$

где $S(x) = p(x_2) + m(x - x_2)$, удовлетворяющее начальным условиям $w(x_2) = y(x_2) = 0$, $w'(x_2) = y'(x_2)$.

Обозначив через x_1^* первый нуль $w(x)$, непосредственно предшествующий нулю x_2, получим равенства, аналогичные (8):

$$[w'(x_1^*)]^2 - [w'(x_2)]^2 = \int_{x_2}^{x_1} S'(x)w^2(x)\,dx = -m\int_{x_1^*}^{x_2} w^2(x)\,dx, \tag{14,1}$$

$$[y'(x_1)]^2 - [y'(x_2)]^2 = \int_{x_2}^{x_1} p'(x)y^2(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} p'(x)y^2(x)\,dx, \tag{14,2}$$

из которых, учитывая, что при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $a_1^2 = p(x_2) \leqslant p(x) \leqslant S(x)$ и потому $x_1^* \geqslant x_1$, $x_2 - x_1 < \frac{\pi}{a_1}$, $|w(x)| \leqslant |y(x)|$ на отрезке $[x_1^*, x_2]$, $[y(x)]^2 \leqslant \frac{[y'(x_2)]^2}{a_1^2}$ на отрезке $[x_1, x_2]$, находим:

$$[w'(x_1^*)]^2 - [y'(x_1)]^2 \leqslant \int_{x_1}^{x} [p'(x) - m]\,y^2(x)\,dx \leqslant \frac{(M-m)[y'(x_2)]^2\pi}{a_1^3}. \tag{14,3}$$

Из (14,3) непосредственно выводим, что

$$[y'(x_1)]^2 - [y'(x_2)]^2 \geqslant [w'(x_1^*)]^2 - [w'(x_2)]^2 - (M-m)\frac{[y'(x_2)]^2 \cdot \pi}{a_1^3}$$

или

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2\left\{1 + (M-m)\frac{\pi}{a_1^3}\right\} - \{[w'(x_1^*)]^2 - [w'(x_2)]^2\} \tag{14,4}$$

(при выводе (14,4) нужно воспользоваться неравенством $[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2$, очевидным из (14,2)); $S(x)$ — линейная функция и $m < 0$, следовательно, для оценки разности $[w'(x_1^*)]^2 - [w'(x_2)]^2$, которая неотрицательна [см. (14,1)],

мы можем воспользоваться неравенством (6), если в нем заменить $\psi(x)$ на $S(x)$, $y(x)$ на $w(x)$, а x_1 на x_1^*.

Из этой оценки после очевидных преобразований находим:

$$[w'(x_1^*)]^2-[w'(x_2)]^2 \geqslant \frac{S(x_1^*)-S(x_2)}{2q^2}\cdot[w'(x_2)]^2 = \frac{S(x_1^*)-S(x_2)}{2q^2}[y'(x_2)]^2, \quad (14{,}5)$$

где $S(x_1^*) \geqslant q^2 \geqslant \frac{S(x_1^*)+S(x_2)}{2}$ (см. замечание 1).

Точно так же, как было показано, что $r(x_2^*) \leqslant p(x_2)$, можно показать, что $S(x_1^*) \geqslant p(x_1)$. Так как дробь $\frac{S(x_1^*)-S(x_2)}{2q^2} = \frac{S(x_1^*)-p(x_2)}{2q^2}$ правильная, то

$$\frac{S(x_1^*)-p(x_2)}{2q^2} \geqslant \frac{S(x_1^*)-p(x_2)}{2S(x_1^*)} \geqslant \frac{S(x_1^*)-[S(x_1^*)-p(x_1)]-p(x_2)}{2S(x_1^*)-[S(x_1^*)-p(x_1)]} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{p(x_1)-p(x_2)}{S(x_1^*)+p(x_1)} \geqslant \frac{p(x_1)-p(x_2)}{2p(x_1)+(M-m)(x_2-x_1)} \geqslant \frac{p(x_1)-p(x_2)}{2p(x_1)+(M-m)\frac{\pi}{a}} \quad (14{,}6)$$

(последнее неравенство мы получим, замечая, что $S(x_1^*)-p(x_1)=p(x)_2 - -m(x_2-x_1^*)-[p(x_2)-p'(\xi)(x_2-x_1)] \leqslant (M-m)(x_2-x_1) \leqslant (M-m)\cdot\frac{\pi}{a_1}$, $x_1<\xi<x_2$).

Из (14,4) (14,5) и (14,6) непосредственно получаем (12) и теорема 5 полностью доказана.

Из (10), (11), (12) выведем оценки менее точные, но более удобные для дальнейшего.

Так как $1+\frac{\pi}{a_1^3}(M-m) \leqslant \exp\left\{\frac{\pi}{a_1^3}(M-m)\right\} \leqslant \exp\left[\frac{\pi}{a_1^3}V_{x_1}^{x_2}p'(x)\right]$, где $V_{x_1}^{x_2}f(x)$ — вариация $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, и при выполнении условий 1) теоремы 5

$$\left[\frac{p(x_1)}{p(x_2)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left\{1+\frac{p(x_1)-p(x_2)}{p(x_2)}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{1+\frac{M-m}{a_1^3}\cdot\pi\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \exp\left\{\frac{\pi(M-m)}{2a_1^3}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{\pi}{2a_1^3}V_{x_1}^{x_2}p'(x)\right\},$$

то вместо (10) имеем:

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2\left[\frac{p(x_2)}{p(x_1)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{3\pi}{2a_1^3}V_{x_1}^{x_2}p'(x)\right]. \quad (10')$$

Далее,

$$\left\{1+\frac{\pi}{2a_1^3}(M-m)\right\} \leqslant \exp\left[\frac{\pi(M-m)}{2a_1^3}\right] \leqslant \exp\left[\frac{1}{2a_1^3}V_{x_1}^{x_2}p'(x)\right],$$

$$\frac{p(x_2)+p(x_1)}{2p(x_1)} = 1+\frac{p(x_2)-p(x_1)}{2p(x_1)} = 1+\int_{x_1}^{x_2}\frac{p'(x)}{2p(x_1)}dx \leqslant 1+$$

$$+\frac{p(x_1)+M\cdot\frac{\pi}{a_1}}{2p(x_1)}\int_{x_1}^{x_2}\frac{p'(x)}{p(x)}dx \leqslant 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{M\pi}{2a_1^3}\right)\ln\frac{p(x_2)}{p(x_1)} \leqslant \left[\frac{p(x_2)}{p(x_1)}\right]^{\left(\frac{1}{2}+\frac{M\pi}{2a_1^3}\right)},$$

поэтому из (11) находим:

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left[\frac{p(x_2)}{p(x_1)}\right]^{\left(\frac{1}{2}+\frac{M\pi}{2a_1^3}\right)} \exp\left[\frac{\pi}{2a_1^3} V_{x_1}^{x_2} p'(x)\right]. \qquad (11')$$

Затем, если выполнены условия 3) теоремы 5, то $p'(x) < 0$ в отрезке $[x_1, x_2]$, $p(x_2) < p(x_1)$,

$$-M(x_2 - x_1) < p(x_1) - p(x_2) < -m(x_2 - x_1),$$

$$\frac{p(x_2) - p(x_1)}{3p(x_1) - p(x_2) + (M-m)\frac{\pi}{a_1}} \leqslant \frac{p(x_2)}{2p(x_1) + (M-2m)\frac{\pi}{a_1}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx =$$

$$= \left\{\frac{1}{2} + \frac{2p(x_2) - 2p(x_1) - (M-2m)\frac{\pi}{a_1}}{2\left[2p(x_1) + (M-2m)\cdot\frac{\pi}{a_1}\right]}\right\} \ln\frac{p(x_2)}{p(x_1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2} + \frac{2m\frac{\pi}{a_1} - (M-m)\frac{\pi}{a_1}}{4p(x_1)}\right] \ln\frac{p(x_2)}{p(x_1)} \leqslant \left[\frac{1}{2} + \frac{m\pi}{a_1^3}\right] \ln\frac{p(x_2)}{p(x_1)},$$

и вместо (12) можно написать

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \cdot \left[\frac{p(x_2)}{p(x_1)}\right]^{\left(\frac{1}{2}+\frac{m\pi}{a_1^3}\right)} \exp\left[\frac{\pi}{a_1^3} V_{x_1}^{x_2} p'(x)\right]. \qquad (12')$$

Наконец, при выполнении любого из трех условий 1), 2), 3) теоремы 5 справедливо неравенство, непосредственно следующее из (10'), (11') и (12')

$$[y'(x_2)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \cdot \left[\frac{p(x_2)}{p(x_1)}\right]^{\left(\frac{1}{2}+\mu_1\frac{\pi}{a_1^3}\right)} \exp\left[\frac{3\pi}{2a_1^3} V_{x_1}^{x_2} p'(x)\right], \qquad (12'')$$

где соответственно тому, какое из условий 1), 2) или 3) выполняется, μ_1 равно нулю, наибольшему или наименьшему значению $p'(x)$ в отрезке $[x_1, x_2]$.

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (9) *для* $x \geqslant x_0$

$i_1)$ $p(x) \geqslant a^2 > 0$

$i_2)$ $p'(x)$ *непрерывна.*

Тогда для решения $\bar{y}(x)$ *уравнения* (9), *удовлетворяющего начальным условиям* $\bar{y}(x_1) = 0$, $\bar{y}'(x_1) \neq 0$, *где* $x_1 \geqslant x_0$, *и для его производной* $\bar{y}'(x)$ *при любом* $x \geqslant x_1$ *справедливы следующие оценки:*

$e_1)$ *если* $p'(x)$ *имеет нули при* $x \geqslant x_1$, *то*

$$[\bar{y}(x)]^2 \leqslant \frac{A}{b}\left[\exp\frac{3\pi}{2a^3} V_{x_1}^{x} p'(x)\right]\left(K + \frac{\pi L_1}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1} V_{x_1}^{x} p'(x)} \left(1 + \frac{\pi}{a^3} L_1\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(I)}$$

$$[\bar{y}'(x)]^2 \leqslant A\left[\exp\frac{3\pi}{2a^3} V_{x_1}^{x+\frac{\pi}{a}} p'(x)\right]\left(K + \frac{\pi L_1}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1} V_{x_1}^{x+\frac{\pi}{a}} p'(x)} \left(p(x) + \frac{\pi}{a} L_1\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(II)}$$

где $A=\frac{[\bar{y}'(x_1)]^2}{[p(x_1)]^{1/2}}$, K — *любое число, большее* 1, b^2 *равно большему из чисел* a^2 и $\left(p(x)-\frac{\pi}{a}L_1\right)$, *а* L_1 *равно наибольшему значению* $|p'(\xi)|$ *в отрезке* $x_1\leqslant\xi\leqslant x+\frac{\pi}{a}$;

e_2) *если* $p'(x)>0$ *при* $x\geqslant x_1$, *то*

$$[\bar{y}(x)]^2\leqslant\frac{A}{b}\left(K+\frac{\pi L_1}{[p(x_1)]^{3/2}}\right)^{\frac{\pi L_1}{2[p(x_1)]^{3/2}}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}}\exp\left[\frac{\pi}{2[p(x_1)]^{3/2}}V_{x_1}^{x}p'(x)\right], \quad \text{(III)}$$

$$[\bar{y}'(x)]^2\leqslant A\left[\exp\frac{\pi}{2[p(x_1)]^{3/2}}V_{x_1}^{x+\frac{\pi}{a}}p'(x)\right]\times$$

$$\times\left(K+\frac{\pi L_1}{[p(x_1)]^{3/2}}\right)^{\frac{\pi L_1}{2[p(x_1)]^{3/2}}\frac{K^{3/2}}{(K^{3/2}-1)}}\left(p(x)+\frac{\pi}{a}L_1\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{(IV)}$$

e_3) *если* $p'(x)<0$ *при* $x\geqslant x_1$, *то*

$$[\bar{y}(x)]^2\leqslant\frac{[\bar{y}'(x_1)]^2}{p\left(x+\frac{\pi}{a}\right)}. \quad \text{(V)}$$

Доказательство. Перенумеровав все нули $\bar{y}(x)$, бо́льшие или равные x_1 в порядке возрастания, получим последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ \ldots \quad (13)$$

Докажем e_1). В этом случае для производной $\bar{y}'(x)$ в точках последовательности (13) с помощью (12″) непосредственно получаем

$$[\bar{y}'(x_n)]^2\leqslant[\bar{y}'(x_1)]^2\left[\exp\frac{3\pi}{2a^3}V_{x_1}^{x_n}p'(x)\right]\left[\frac{p(x_n)}{p(x_1)}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\pi}{a_i^3}\mu_i}, \quad (14)$$

где μ_i и a_i имеют такое же значение в отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$, какое μ_1 и a_1 имели в отрезке $[x_1,\ x_2]$. Опустив в выражении, стоящем в (14) под знаком произведения, члены, в которых $\mu_1=0$ (они в случае e_1) обязательно имеются), можно преобразовать это произведение к виду:

$$\prod_{j=1}^{m}\left\{\prod_{i=k_{1j}}^{i=k_{2j}}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\mu_i\pi}{a_i^3}}\right\}; \quad (15)$$

здесь $k_{11}=1$, $k_{2m}=n-1$.

Отрезки $[x_{k_{1j}},\ x_{k_{2j}}]$ не пересекаются. В каждом из них $p(x)$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Так как значения μ_i для отрезков, входящих в $[x_{k_{1j}},\ x_{k_{2j}}]$ при $j\neq m$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i\leqslant V_{x_{k_{1j}}}^{x^*_{k_{2j}}}p'(x)$, где $x^*_{k_{2j}}$ ближайшая справа от $x_{k_{2j}}$ точка, в которой $p'(x)$ равна нулю (такая точка в отрезке $[x_{k_{2j}},\ x_{k_{1,\,j+1}}]$, при $j\neq m$ непременно есть, ибо в нем $p'(x)$ имеет нуль), а значения μ_i для отрезков, содержащихся в $[x_{k_{1m}},\ x_{k_{2m}}]$, удовлетворяют неравенствам $\mu_i\leqslant V_{x^*_{k_{1m}}}^{x^{(k_{2m}+1)}}p'(x)$, где $x^*_{k_{1m}}$ —ближайшая слева от $x_{k_{1m}}$

точка, в которой $p'(x)$ равна нулю, то справедливо неравенство

$$\prod_{j=1}^{m}\left\{\prod_{i=k_{1j}}^{i=k_{2j}}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\mu_i\pi}{a_i^3}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{j=1}^{m-1}\left\{\prod_{i=k_{1j}}^{i=k_{2j}}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\pi}{a_i^3}V_{x_{k_{1j}}}^{x^*_{k_{2j}}}p'(x)}\right\}\right)\prod_{i=k_{1m}}^{i=k_{2m}}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\pi}{a_i^3}V_{x^*_{k_{1m}}}^{x_{(k_{2m}+1)}}p'(x)} \qquad (16)$$

(очевидно, что отрезки $[x_{k_{1j}}, x_{k_{2j}}]$ при $j\neq m-1$ не пересекаются между собой, а отрезок $[x_{k_{1,\,m-1}}, x^*_{k_{2,\,m-1}}]$ может иметь с отрезком $[x^*_{k_{1m}}, x_{k_{2m}}]$ только одну общую точку).

Разобьем область изменения $p(x)$ на отрезки

$$a^2\leqslant p(x)\leqslant Ka^2;\ Ka^2\leqslant p(x)\leqslant K^2a^2,\ \ldots,\ K^{l-1}a^2\leqslant p(x)\leqslant K^la^2,$$

где K — любое число, большее единицы, l — целое число $\geqslant 1$. Тогда для каждого из произведений, стоящих справа в (16) в фигурных скобках, можно написать неравенство:

$$\prod_{i=k_{1j}}^{i=k_{2j}}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\pi}{a_i^3}V_{x_{k_{1j}}}^{x^*_{k_{2j}}}p'(x)}\leqslant\left(K+\frac{\pi L}{K^{n-1}a^3}\right)^{\left[1+\frac{1}{K^{3/2}}+\left(\frac{1}{K^{3/2}}\right)^2+\ldots\right]\frac{\pi}{a^3}V_{x_{k_{1j}}}^{x^*_{k_{2j}}}p'(x)}\leqslant$$

$$\leqslant\left(K+\frac{\pi L}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}V_{x_{k_{1j}}}^{x^*_{k_{2j}}}p'(x)}.$$

Здесь L равно наибольшему значению $|p'(x)|$ при $x_1\leqslant x\leqslant x_n+\frac{\pi}{a}$. Это неравенство получается путем объединения тех сомножителей, у которых меньшее из чисел $p(x_i)$ и $p(x_{i+1})$ находится в отрезке $[K^{l-1}a^2,\ K^la^2]$, при этом большее не превзойдет $K^la^2+\frac{\pi}{a}L$, так как $x_{i+1}-x_i<\frac{\pi}{a}$ для любого i, и заменой показателя у каждого из этих сомножителей на число $\frac{\pi}{(K^{l-1}a^2)^{3/2}}V_{x_{k_{1j}}}^{x^*_{k_{2j}}}p'(x)$, не меньшее этого показателя. Точно таким же путем найдем, что

$$\prod_{i=k_{1m}}^{i=k_{2m}}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\pi}{a_i^3}V_{x^*_{k_{1m}}}^{x_{k_{2m}}}p'(x)}\leqslant\left(K+\frac{\pi L}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}V_{x^*_{k_{1m}}}^{x_{(k_{2m}+1)}}p'(x)},$$

и окончательно получим:

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{\pi}{a_i^3}\mu_i}\leqslant\left(K+\frac{\pi L}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3}\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}V_{x_1}^{x_n}p'(x)}. \qquad (17)$$

Теперь вместо (14) будем иметь неравенство

$$[\bar{y}'(x_n)]^2 \leqslant [\bar{y}'(x_1)]^2 \left[\exp \frac{3\pi}{2a^3} V_{x_1}^{x_n} p'(x)\right] \times$$

$$\times \left(K + \frac{\pi L}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3} \frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}} V_{x_1}^{x_n} p'(x) \left[\frac{p(x_n)}{p(x_1)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Положив h^2 равным наименьшему значению $p(x)$ в отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, мы можем написать, что

$$[p(x_n)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[h^2 + \frac{\pi}{a} L_1\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

$$\max [\bar{y}(x)]^2 \leqslant \frac{[\bar{y}'(x_n)]^2}{h^2} \tag{19'}$$

при $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$ и, следовательно,

$$[y(x)]^2 \leqslant \frac{c}{h^2}, \tag{20}$$

где c обозначает правую часть (18), в которой x_n есть нуль $\bar{y}(x)$, ближайший слева от x. Так как $x \geqslant x_n$, то

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\geqslant L, \\ V_{x_1}^{x_n} p'(x) &\leqslant V_{x_1}^{x} p'(x). \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

Кроме того, $h^2 \geqslant bh$,
и

$$\frac{[p(x_n)]^{\frac{1}{2}}}{h} \leqslant \left[1 + \frac{\pi}{ah^2} L_1\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[1 + \frac{\pi}{a^3} L_1\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{20''}$$

Из (20), (18), (20') и (20'') непосредственно получаем неравенство (I).

Далее, непрерывная функция $[\bar{y}'(x)]^2$ имеет максимум в нулях $\bar{y}(x)$, поэтому значение $[\bar{y}'(x)]^2$ не превзойдет наибольшего из значений $[y'(x_1)]^2$, $[y'(x_2)]^2, \ldots, [y'(x_n)]^2$, где x_n — нуль $\bar{y}(x)$, ближайший справа от x. Но наибольшее из этих значений, в силу монотонного возрастания вариации $p'(x)$, не больше правой части неравенства (18). Так как, кроме того, $x_n < x + \frac{\pi}{a}$

и

$$[p(x_n)]^{\frac{1}{2}} \leqslant p(x) + \frac{\pi}{a} L, \tag{21}$$

то из (18) и (21) получаем неравенство (II) и часть e_1) теоремы 6 доказана.

Замечание 2. Оценки (I) и (II), очевидно, будут наилучшими при $K > 1$, которое дает минимум функции $(K+\gamma)^{\frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1}}$, где $\gamma = \frac{\pi L_1}{a^3}$. Такое K, как легко видеть, определяется из уравнения

$$\ln(K+\gamma) = \frac{2}{3} K \frac{K^{\frac{3}{2}} - 1}{K+\gamma}. \tag{22}$$

Если выполнено условие e_2), то для производной в точках последовательности (13) с помощью (11′) находим:

$$[y'(x_n)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left[\frac{p(x_n)}{p(x_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{\prod_{i=1}^{n-1} \left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{M_i \pi}{2[p(x_i)]^{3/2}}}\right\} \exp\left[\frac{\pi}{2[p(x_1)]^{\frac{3}{2}}} V_{x_1}^{x_n} p'(x)\right], \qquad (23)$$

где M_i — наибольшее значение $p'(x)$ в отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Очевидно, что $M_i < L$. Остальная часть доказательства e_2) вполне аналогична доказательству e_1), а именно:

Разобьем область изменения $p(x)$ на отрезки

$$p(x_1) \leqslant p(x) \leqslant Kp(x_1),$$

$$Kp(x_1) \leqslant p(x) \leqslant K^2 p(x_1), \ \ldots, \ K^{l-1} p(x_1) \leqslant p(x) \leqslant K^l p(x), \ \ldots,$$

где $K > 1$.

Объединим в произведении, стоящем в (23) в фигурных скобках, те из сомножителей, у которых меньшее из чисел $p(x_i)$ находится в отрезке $[K^{l-1} p(x_1), \ K^l p(x_1)]$. Тогда большее из чисел $p(x_{i+1})$ не превзойдет $K^l p(x_1) + \frac{\pi}{[p(x_1)]^{\frac{3}{2}}} L$ и мы можем написать неравенство

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\frac{M_i \pi}{2[p(x_i)]^{3/2}}} \leqslant \left(K + \frac{\pi L}{[p(x_1)]^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{\pi L}{2[p(x_1)]^{3/2}} \frac{K^{3/2}}{(K^{3/2}-1)}}. \qquad (24)$$

Из (23) и (24) выводим:

$$[y'(x_n)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left[\frac{p(x_n)}{p(x_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(K + \frac{\pi L}{[p(x_1)]^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{\pi L}{2[p(x_1)]^{3/2}} \frac{K^{3/2}}{(K^{3/2}-1)}} \exp\left[\frac{\pi}{2[p(x_1)]^{\frac{3}{2}}} V_{x_1}^{x_n} p'(x)\right]. \qquad (25)$$

Пусть x_n есть нуль $\bar{y}(x)$, ближайший слева от x. Тогда, пользуясь (19) и (19′), с заменой в них h^2 на $p(x_n)$, получим:

$$[\bar{y}(x)]^2 \leqslant \frac{c_1}{p(x_n)}, \qquad (26)$$

где c_1 означает правую часть (25).

С помощью неравенства $[p(x_n)]^{\frac{1}{2}} \geqslant b$ и неравенств (20′), которые справедливы и для данного случая, из (26) и (25) непосредственно находим (III).

Неравенство (IV) получается из (25) (если в нем за x_n принять нуль $\bar{y}(x)$, ближайший справа от x) точно так же, как неравенство (II) было получено из (18).

Часть e_2) теоремы 6 доказана.

Замечание 3. Оценки (III) и (IV) будут наилучшими при $K > 1$, получаемом из уравнения (22), в котором $\gamma = \dfrac{\pi L_1}{[p(x_1)]^{\frac{3}{2}}}$. Если выполнено условие e_3), то для точек последовательности (13) будем иметь:

$$[\bar{y}'(x_n)]^2 = [\bar{y}'(x_1)]^2 + \int_{x_1}^{x_n} p'(x)\,[\bar{y}(x)]^2\,dx \leqslant [\bar{y}'(x_1)]^2, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Возьмем теперь какое-либо значение $x > x_1$. Оно попадет в некоторый отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, где x_i и x_{i+1} — два последовательных нуля $\bar{y}(x)$.

Следовательно,

$$[\bar{y}(x)]^2 \leqslant \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} [\bar{y}(x)]^2 \leqslant \frac{[y'(x_i)]^2}{p(x_{i+1})} \leqslant \frac{[\bar{y}'(x_1)]}{p\left(x + \dfrac{\pi}{a}\right)}.$$

Таким образом, неравенство (V) и теорема 6 полностью доказаны.

Следствие. Если 1) в уравнении (9) $p(x)$ удовлетворяет условиям i_1) и i_2) теоремы 6 и $p'(x)$ ограниченной вариации для $x \geqslant x_0$, то все решения (9) ограничены при $x \geqslant x_0$.

Если, кроме того, 2) $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \infty$, то все решения (9) стремятся к нулю при $x \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное нетривиальное решение $\bar{y}(x)$ уравнения (9). Обозначим через x_1 первый нуль $\bar{y}(x)$, не меньший x_0. Тогда достаточно доказать следствие для $x \geqslant x_1$, ибо в отрезке $[x_0, x_1]$ $\bar{y}(x)$, очевидно, ограничено. Так как $p'(x)$ ограниченной вариации при $x \geqslant x_0$, то она ограничена, т. е. при $x \geqslant x_0$ $|p'(x)| \leqslant R$, где R — постоянная, $V_{x_1}^{\infty} p'(x) \leqslant V_{x_0}^{\infty} p'(x) = B$. Поэтому из оценок (I), (III) и (V) теоремы 6 получим, что $[\bar{y}(x)]^2$ при $x \geqslant x_1$ будет удовлетворять одному из трех неравенств:

$$[\bar{y}(x)]^2 \leqslant \frac{A}{b}\left[\exp \frac{3\pi}{2a^3} B\right]\left(K + \frac{\pi R}{a^3}\right)^{\frac{\pi}{a^3} \frac{K^{3/2}}{K^{3/2}-1} B}\left(1 + \frac{\pi R}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{I'}$$

$$[\bar{y}(x)^2 \leqslant \frac{A}{b}\left(K + \frac{\pi R}{[p(x_1)]}\right)^{\frac{\pi R}{2[p(x_1)]^{3/2}} \frac{K^{3/2}}{(K^{3/2}-1)}} \exp\left[\frac{\pi}{2[p(x_1)]^{3/2}} B\right], \tag{III'}$$

$$[\bar{y}(x)]^2 \leqslant \frac{[\bar{y}'(x_1)]}{a^2}, \tag{V'}$$

соответственно тому, имеет ли $p'(x)$ нули при $x \geqslant x_1$ или $p'(x) > 0$ при $x \geqslant x_1$ или, наконец, $p'(x) < 0$ при $x \geqslant x_1$. Ввиду того, что $b \geqslant a > 0$ и A, B, K и R — постоянные, из этих оценок заключаем, что $\bar{y}(x)$ ограничено при $x \geqslant x_1$.

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} b \geqslant \lim\limits_{x\to\infty}\left(p(x) - \frac{\pi R}{a}\right) = \infty$ и $p'(x)$ при всех $x \geqslant x_1$ не может быть меньше нуля. Следовательно, в этом случае, для $[\bar{y}(x)]^2$ будет справедлива одна из оценок (I′) или (III′), из которых, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} b = \infty$, сразу получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty} [\bar{y}(x)]^2 = 0$.

Следствие доказано.

Принимая во внимание теорему, доказанную Белманом [3], вместо следствия получим более общую теорему.

Теорема 7. *Если для непрерывного при $x \geqslant x_0$ коэффициента $q(x)$ уравнения*

$$y'' + q(x)\,y = 0 \tag{28}$$

можно подобрать такую функцию $p(x)$, которая удовлетворяет условию 1) следствия и условию $\int\limits_{x_0}^{\infty} |q(x) - p(x)|\,dx < \infty$, то все решения уравнения (28) ограничены. Если, кроме того, $p(x)$ удовлетворяет и условию 2) следствия, то все решения (28) стремятся к нулю при $x \to \infty$.

Доказательство. Первая часть теоремы об ограниченности решений (28) является непосредственным следствием из теоремы Белмана. Для доказательства стремления всех решений к нулю в случае, когда $p(x)$ удовлетворяет еще и условию 2), заметим, что для решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (28), удовлетворяющих начальным условиям:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 0, \quad y_1'(x_0) = 1, \\ y_2(x_0) &= 1, \quad y_2'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

справедливы соотношения, которые можно проверить непосредственно подстановкой в (28)

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= z_1(x) + \int\limits_{x_0}^{x} [p(t) - q(t)]\,y_1(t)\,[z_1(t)\,z_2(x) - z_2(t)\,z_1(x)]\,dt, \\ y_2(x) &= z_2(x) + \int\limits_{x_0}^{x} [p(t) - q(t)]\,y_2(t)\,[z_1(t)\,z_2(x) - z_2(t)\,z_1(x)]\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где $z_1(x)$ и $z_2(x)$ — два решения уравнения

$$z'' + p(x)\,z = 0, \tag{30}$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} z_1(x_0) &= 0, \quad z_1'(x_0) = 1, \\ z_2(x_0) &= 1, \quad z_2'(x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ограничены, а $z_1(x)$ и $z_2(x)$ стремятся к нулю при $x \to \infty$, то из формул (29) получаем:

$$|y_1(x)| \leqslant |z_1(x)| + M_1 |z_1(x)| \int\limits_{x_0}^{x} |q(t) - p(t)|\,dt + M_2 |z_2(x)| \int\limits_{x}^{x} |q(t) - p(t)|\,dt,$$

$$|y_2(x)| \leqslant |z_2(x)| + M_3 |z_1(x)| \int\limits_{x}^{x} |q(t) - p(t)|\,dt + M_4 |z_2(x)| \int\limits_{x}^{x} |q(t) - p(t)|\,dt,$$

где M_1, M_2, M_3 и M_4 — постоянные.

По условию теоремы $\int_{x_0}^{x} |q(t)-p(t)|\,dt < \infty$, следовательно, при $x \to \infty$ $y_1(x)$ и $(y_2 x)$ стремятся к нулю, а значит и любое решение (28) будет стремиться к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Wiman. Uber eine Stabilitätsfrage.., Acta mathematica, 1936, **66**.
2. В. М. Шепелев. К вопросу об устойчивости движения. Прикладная математика и механика, т. III, вып. I, 1936.
3. R. Bellman. Fourier integrals. Duke Mathematical Journal, **10**, 1943.