УДК 517.51

С. Б. Козырев

О МНОЖЕСТВАХ УРОВНЯ ТИПИЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА МЕТРИЧЕСКИХ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Эта работа посвящена изучению непрерывных функций на метрических пространствах E с точки зрения их множеств уровня. Для произвольной функции $f \in C(E)$ примем следующие обозначения: $S_\alpha = \{x \mid f(x) = \alpha\}$ — горизонтальные сечения ее графика, $M_f = \sup\limits_E f$, $m_f = \inf\limits_E f$. В работе [1] доказана

Теорема А. *Остаточное множество (дополнение до множества 1 категории Бэра) в $C[0, 1]$ образуют функции f, горизонтальные сечения которых имеют вид*

$$S_\alpha = \begin{cases} \{x_\alpha\} & \text{при} \quad \alpha = m_f,\ M_f, \\ P_\alpha & \text{при} \quad \alpha \in (m_f,\ M_f) \setminus D, \\ P_\alpha \cup \{x_\alpha\} & \text{при} \quad \alpha \in D \subset (m_f,\ M_f), \end{cases} \tag{1}$$

где $\{x_\alpha\}$ — изолированная точка, P_α — совершенное нигде неплотное множество. D не более чем счетно.

В [2] этот результат усилен.

Теорема Б. *Остаточное в $C[0, 1]$ множество образуют функции f, сечения которых имеют вид (1) и, кроме того, все точки x_α являются строгими локальными экстремумами для f.*

Естественно возникает аналогичный вопрос о горизонтальных сечениях, типичных в смысле категории непрерывных функций от нескольких переменных. В настоящей заметке изучаются сечения непрерывных функций на более общих метрических пространствах, чем замкнутая область n-мерного линейного пространства.

Теорема 1. *Пусть E — метрическое сепарабельное компактное пространство без изолированных точек. Тогда в $C(E)$ остаточное множество $F = F(E)$ образуют функции, удовлетворяющие следующим трем свойствам:*

1) не существует нестрогих локальных экстремумов;

2) множество локально экстремальных точек плотно в E, а значения локальных экстремумов плотны в образе E;

3) значения локальных экстремумов попарно различны.

Доказательство. На E есть счетная база $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, причем можно считать, что $\beta_k = V_{r_k}(b_k)$ — открытые шары с центром в b_k и радиусом r_k. Через X'_{km} обозначим (k и m — натуральные) множества функций $f \in C(E)$, для которых $\operatorname{diam}(S_\alpha \cap \beta_k) > \frac{r_k}{m}$ при $\alpha = \sup\limits_{\beta_k} f$; через X''_{km} — множества функций f, для которых $\operatorname{diam}(S_\alpha \cap \beta_k) > \frac{r_k}{m}$ при $\alpha = \inf\limits_k f$; через Y_k — множества функций, которые на β_k не имеют ни одной локально-экстремальной (хотя бы нестрого) точки; через Z_m — множества функций f, для которых существуют две точки a_1 и a_2 такие, что a_1 и a_2 экстремальны на $V_{1/m}(a_1)$ и $V_{1/m}(a_2)$ соответственно,

$\rho(a_1, a_2) > 2/m$ и $f(a_1) = f(a_2)$. Нетрудно убедиться, что все функции из множества

$$F = C(E) \setminus \left(\left(\bigcup_{k,m=1}^{\infty} X'_{km} \right) \cup \left(\bigcup_{k,m=1}^{\infty} X''_{km} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m \right) \right)$$

удовлетворяют требованиям теоремы. Проверим для $f \in F$ выполнение пункта 2). Пусть I — некоторый интервал на числовой оси. Поскольку $f \in C(E) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, то прообраз $f^{-1}(I)$ открыт и, если только он непуст, найдется шар $\beta_k \subset f^{-1}(I)$, в котором есть экстремальные точки со значениями в I. Пункты 1) и 3) проверяются непосредственно. Чтобы доказать теорему, надо убедиться, что все множества X'_{km}, X''_{km}, Y_k и Z_m нигде неплотны.

Зафиксируем произвольно $f \in C(E)$ $\varepsilon > 0$, m и k. Подберем точку $a \in \beta_k$ так, чтобы $f(a) > \sup\limits_{\beta_k} f - \frac{\varepsilon}{8}$; затем число $c \in \left(0, \frac{r_k}{2m}\right)$ так, чтобы $\overline{V_c(a)} \subset \beta_k$. Определим непрерывную функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin V_c(a), \\ \frac{\varepsilon}{2c}(c - \rho(x, a)), & \text{если } x \in V_c(a). \end{cases}$$

Очевидно, $V_{\varepsilon/8}(f+g) \subset V_\varepsilon(f)$. Для любой функции $\tilde{f} \in V_{\varepsilon/8}(f+g)$ имеем: $\tilde{f}(a) > f(a) + \frac{3}{8}\varepsilon$ и $\tilde{f}(x) < f(a) + \frac{\varepsilon}{4}$, если $x \in \beta_k \setminus \overline{V_c(a)}$. Иначе говоря, на $\overline{V_c(a)}$ функция $\tilde{f}$ достигает максимума $\alpha = \max\limits_{\beta_k} \tilde{f}$, а ее сечение S_α таково, что $\operatorname{diam}(S_\alpha \cap \beta_k) \leqslant \frac{r_k}{m}$. Следовательно, множества X'_{km} и Y_k нигде неплотны. Аналогично можно показать неплотность множества X''_{km}. Чтобы доказать неплотность множества Z_m, определим для f модуль непрерывности $\omega(\delta) = \sup\limits_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x') - f(x'')|$ — неубывающую числовую функцию, определенную на $(0, +\infty)$. Ясно, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, поэтому можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \frac{1}{m}$ и $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$. Построим на E конечную δ-сеть $\{x_i\}_{i=1}^n$, такую, что $\rho(x_i, x_j) \geqslant \delta$ при $i \neq j$. Подберем теперь число $s \geqslant 2$ так, чтобы выполнялось $\left(1 + \frac{1}{s}\right)\delta < \frac{1}{m}$. Ясно, что шары $V_{\delta/s}(x_i)$ попарно не пересекаются и в каждом из них можно выбрать по два непересекающихся шара $V_c(d_i)$ и $V_c(d_{i+n})$ с достаточно малым радиусом $c > 0$. На отрезке $[0, c]$ возьмем непрерывную возрастающую функцию h, такую, что $h(0) = 0$, $h(c) = 1$, $h(t) > \frac{2}{\varepsilon}\omega(t)$. Такая функция найдется, поскольку $\frac{2}{\varepsilon}\omega(c) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\omega\left(\frac{\delta}{s}\right) < \frac{1}{2}$. Определим теперь функцию

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_i(1 - h(\rho(d_i, x))), & \text{если } x \in V_c(d_i), \\ -\frac{3}{4}\varepsilon\lambda_{i+n}(1 - h(\rho(d_{i+n}, x))), & \text{если } x \in V_c(d_{i+n}), \\ 0, & \text{если } x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{2n} V_c(d_j); \end{cases}$$

здесь $1 \leqslant i \leqslant n$, а числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ из интервала $\left(1, 1\frac{1}{5}\right)$ мы выберем чуть позже. Положим $\hat{f}=f+g$. При $x \in V_c(d_i)$, $i \leqslant n$, имеем

$$\hat{f}(d_i)-\hat{f}(x) = g(d_i)+f(d_i)-f(x)-g(x) > \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_i-\omega(\rho(d_i, x))-\frac{3}{4}\varepsilon\lambda_i+$$

$$+\frac{3}{4}\varepsilon\lambda_i h(\rho(d_i, x)) > 0,$$

то есть d_i — точка максимума $\hat{f}$ на $V_c(d_i)$. Аналогично можно показать, что d_{i+n} при $i \leqslant n$ есть точка минимума на $V_c(d_{i+n})$. Подберем теперь числа $\lambda_j \in \left(1, 1\frac{1}{5}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, так, чтобы значения $\hat{f}(d_j)$ были попарно-различными. Затем подберем число $\gamma \in \left(0, \frac{\varepsilon}{10}\right)$ так, чтобы интервалы $J_j=(\hat{f}(d_j)-\gamma, \hat{f}(d_j)+\gamma)$ попарно не пересекались на числовой оси. Ясно, что $V_\gamma(\hat{f}) \subset V_\varepsilon(f)$. Возьмем какую-нибудь функцию $\tilde{f} \in V_\gamma(\hat{f})$. Какой бы ни была точка $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_c(d_i)$, в ее δ-окрестность попадет некоторая точка x_i, а в $\frac{1}{m}$-окрестность целиком попадет шар $V_{\delta/s}(x_i)$, содержащий шары $V_c(d_i)$ и $V_c(d_{i+n})$. Поэтому можно написать

$$\tilde{f}(d_i)-\tilde{f}(x) > \hat{f}(d_i)-\hat{f}(x)-\frac{\varepsilon}{5} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{4}\varepsilon\lambda_i+f(d_i)-f(x_i)+f(x_i)-f(x)-\frac{\varepsilon}{5} > \frac{3}{4}\varepsilon-2\omega(\delta)-\frac{\varepsilon}{5} > 0.$$

Аналогично доказывается, что в $\frac{1}{m}$- окрестности точки $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_c(d_{i+n})$ найдется точка d_{i+n}, такая, что $\tilde{f}(d_{i+n})-\tilde{f}(x) < 0$. Таким образом, у функции $\tilde{f}$ все точки, экстремальные в радиусе $\frac{1}{m}$, могут быть лишь в шарах $V_c(d_j)$, а $\tilde{f}$ принимает в этих точках значения из J_j. Легко убедиться, что $\tilde{f} \notin Z_m$, то есть Z_m нигде неплотно и доказательство закончено.

Следствие. *Сечения функций из множества $F(E)$ имеют вид*

$$S_\alpha=\begin{cases} P_\alpha, \\ P_\alpha \cup \{x_\alpha\}, \end{cases} \tag{2}$$

где P_α нигде неплотны (быть может, пусты) и не содержат локально-экстремальных точек, а x_α — строгие локальные экстремумы, и их лишь счетное число.

Доказательство. Надо лишь показать, что если функция f принадлежит $F(E)$, то все ее сечения S_α нигде неплотны. Действительно, если бы это было не так, то на некотором шаре β_k функция f была бы постоянной. Поскольку $\operatorname{diam}\beta_k > 0$, функция f не могла бы принадлежать $F(E)$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 существует остаточное множество функций $W=W(E) \subset F(E)$, у которых множества P_α, участвующие в представлении (2) сечений S_α, таковы, что для любой точ-*

ки $x \in P_\alpha$ и любой ее окрестности $U(x_0)$ во множестве $E \setminus P_\alpha$ найдется связная компонента, целиком принадлежащая $U(x_0)$.

Замечание 1. Ясно, что тогда множество $U(x_0) \setminus P_\alpha$ состоит из бесконечного числа связных компонент, если только $P_\alpha \neq \varnothing$.

Замечание 2. В случае $E = [0, 1]$ теорема Б следует из теорем 1 и 2.

Доказательство. Обозначим через Q_k (k — натуральное) множество функций, у которых при каком-либо значении α существует не экстремальная локально точка $x_0 \in S_\alpha$, такая, что в шаре $V_{1/k}(x_0)$ не лежит целиком ни одна компонента связности множества $E \setminus S_\alpha$. Мы докажем, что все Q_k нигде неплотны, и тогда нетрудно будет убедиться, что множество $W = F \cap (C(E) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k)$ удовлетворяет теореме.

Итак, пусть заданы $f \in C(E)$, $\varepsilon > 0$ и k. Выберем $\delta \in (0, 1/k)$ так, чтобы выполнялось $\omega(\delta) < \varepsilon/8$ (здесь $\omega(\delta)$ — определенный выше модуль непрерывности для f). Затем построим на E $\frac{3}{4}\delta$-сеть $\{x_i\}_{i=1}^n$, такую, что $\rho(x_i, x_j) \geqslant \frac{3}{4}\delta$ при $i \neq j$. Поскольку шары $V_{\delta/4}(x_i)$ попарно не пересекаются, можно положить

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) + \frac{3}{4}\varepsilon\left(1 - \frac{16}{\delta}\rho(x, x_i)\right), & \text{если } \rho(x, x_i) < \frac{\delta}{8}, \\ f(x) + \frac{3}{4}\varepsilon\left(-2 + \frac{8}{\delta}\rho(x, x_i)\right), & \text{если } \rho(x, x_i) \in \left[\frac{\delta}{8}, \frac{\delta}{4}\right), \\ f(x), & \text{если } x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_{\delta/4}(x_i). \end{cases}$$

Очевидно, $V_{\varepsilon/8}(\tilde{f}) \subset V_\varepsilon(f)$. Возьмем некоторую функцию $\tilde{f} \in V_{\varepsilon/8}(\tilde{f})$ и некоторую точку $x_0 \in E$, не являющуюся локально-экстремальной для $\tilde{f}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть при некотором i выполняется $\rho(x_0, x_i) < \frac{3\delta}{32}$. Тогда найдется точка $y \in V_{\delta/8}(x_i)$, такая, что $\tilde{f}(y) > \tilde{f}(x_0) = \alpha$. Какую бы точку из $E \setminus V_{\delta/8}(x_i)$ ни соединить связным путем с точкой y, этот путь должен пройти через границу шара $V_{\delta/8}(x_i)$ в некоторой точке z, для которой имеем

$$\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x_0) < f(z) - f(x_0) - \frac{\varepsilon}{8} \leqslant \omega\left(\frac{\delta}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{8} < 0,$$

то есть путь, соединяющий y и z, должен пересечь множество S_α. Следовательно, связная компонента множества $E \setminus S_\alpha$, содержащая точку y, целиком лежит в $V_{\delta/8}(x_i) \subset V_{1/k}(x_0)$.

2. Пусть при некотором i имеет место $\frac{3\delta}{32} \leqslant \rho(x_0, x_i) < \frac{3\delta}{16}$. В шаре $V_{\delta/4}(x_i)$ найдется точка y, такая, что $\tilde{f}(y) < \tilde{f}(x_0)$. Но для всякой точки z на границе шара $V_{\delta/4}(x_i)$

$$\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x_0) > f(z) - f(x_0) + \frac{\varepsilon}{8} \geqslant \frac{\varepsilon}{8} - \omega\left(\frac{\delta}{2}\right) > 0.$$

Аналогично заключаем, что связная компонента множества $E \setminus S_\alpha$, содержащая y, целиком лежит в $V_{\delta/4}(x_i) \subset V_{1/k}(x_0)$.

3. Пусть $x_0 \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_{3\delta/16}(x_i)$. Найдется хотя бы одно такое i, что $V_{\delta/4}(x_i) \subset V_\delta(x_0) \subset V_{1/k}(x_0)$. Для любой точки z с условием $\rho(z, x_i) = \frac{\delta}{8}$

$$\widehat{f}(z) - \widetilde{f}(x_0) < f(z) - \frac{5}{8}\varepsilon - f(x_0) + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{3}{8}\varepsilon \leqslant \omega(\delta) - \frac{\varepsilon}{8} < 0,$$

но

$$\widetilde{f}(x_i) - \widetilde{f}(x_0) > f(x_i) + \frac{5}{8}\varepsilon - f(x_0) - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{3}{8}\varepsilon \geqslant \frac{\varepsilon}{8} - \omega\left(\frac{3}{4}\delta\right) > 0,$$

то есть связная компонента множества $E \setminus S_\alpha$, содержащая точку x_i, целиком лежит в $V_{\delta/8}(x_i) \subset V_{1/k}(x_0)$.

Во всех трех случаях $\widetilde{f} \in Q_k$, то есть Q_k нигде неплотно.

Теорема 3. *Если E — метрическое сепарабельное локально-компактное пространство без изолированных точек, то в $C(E)$ существуют остаточные множества $F(E)$ и $W(E)$, удовлетворяющие теоремам 1 и 2.*

Доказательство. В условиях теоремы существует последовательность компактных множеств T_n, таких, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ и $T_n \subset \subset \operatorname{int} T_{n+1}$ (см. [3], т. 2, с. 51). Очевидно, T_n можно выбрать совершенными. Обозначим через F_n и W_n множества из $C(E)$, сужения функций которых на T_n удовлетворяют теоремам 1 и 2 соответственно. В силу теоремы Титце ([3], т. 1, с. 134) любую функцию из $C(T_n)$ можно непрерывно продолжить на T_{n+1}, T_{n+2} и так далее на все E без увеличения максимума модуля, поэтому F_n и W_n — остаточные множества в $C(E)$. Множества $F(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ и $W(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ удовлетворяют теоремам 1 и 2 соответственно. Теорема доказана. Результаты, полученные для горизонтальных сечений, сохраняют силу и для сечений, параллельных произвольной непрерывной функции.

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 для любой последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in C(E)$, существует остаточное множество $H \subset \subset C(E)$, такое, что для любой $f \in H$ и любого n функция $f - g_n$ принадлежит $W \subset F$.*

Замечание 3. Идея доказательства заимствована из работы [4, теорема 3.4], в которой теорема А получает более сильное обобщение, но лишь для случая линейных сечений.

Доказательство. Множество W, как и всякое остаточное множество, содержит всюду плотное G_δ-множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где U_i открыты и всюду плотны в $C(E)$. Ясно, что множества $g_n + U_i$ тоже открыты и всюду плотны в $C(E)$, поэтому множество $H = \bigcap_{n,i=1}^{\infty} (g_n + U_i)$ остаточное. Если $f \in H$, то $f - g_n \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subset W$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruckner A. M. Differentiation of real functions. — Lect. Notes Math., 1978, 659, p. 216.

2. Козырев С. Б. О топологической густоте извивающихся функций. — Матем. заметки, 1983, 33, № 1, 71—76.
3. Куратовский К. Топология. Т. 1. М., 1966; т. 2. М., 1969.
4. Bruckner A. M., Garg K. M. The level structure of a residual set of continuous functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 232, N 9, 307—321.

Поступила в редакцию
09.07.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1986, № 4

УДК 517.9+517.5

Ю. С. Ильяшенко

СЕПАРАТРИСНЫЕ ДВУУГОЛЬНИКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

В предлагаемой статье теоремы о секториальной нормализации резонансных векторных полей и отображений применяются к исследованию окрестности сепаратрисного двуугольника. Напомним, что особая точка векторного поля на плоскости называется элементарной, если оператор линеаризации поля в этой точке имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение.

Теорема 1. *Пусть аналитическое векторное поле на вещественной плоскости имеет сложный цикл, состоящий из двух элементарных особых точек и двух сепаратрис — сепаратрисный двуугольник. Тогда в некоторой окрестности этого сложного цикла нет предельных.*

Из этой теоремы можно вывести следующую.

Теорема 2. *Полиномиальное векторное поле с компонентами второй степени (квадратичное векторное поле) на плоскости имеет лишь конечное число предельных циклов.*

Р. Бамон [1] недавно получил доказательство этой теоремы; он независимо доказывает частный случай теоремы 1 для квадратичных векторных полей. Другое доказательство теоремы 2, в небольшой своей части использующее соображения Бамона, получено М. Г. Голицыной, А. Котовой и О. Мартьяновой; это доказательство будет опубликовано отдельно; здесь доказывается теорема 1.

В случае, когда хотя бы одна особая точка на сложном цикле невырождена, теорема 1 следует из известных результатов [2, 3]. Поэтому ниже рассматривается только случай, когда обе особые точки — вырожденные элементарные: одно собственное значение линеаризации равно, а другое не равно нулю.

§ 1. Подготовительные результаты. В этом параграфе описаны отображения соответствия для вырожденных элементарных особых точек (п. 1.4); в пп. 1.1—1.3 собраны известные результаты, необходимые для дальнейшего (см., например, [4], гл. 5).

1.1. Включаемые и нормализующие отображения. Определение. *Росток биголоморфного отображения*

$$g:(\mathbf{C},0)\to(\mathbf{C},0),\quad z\mapsto z+\alpha z^2+\ldots$$

называется включаемым, если он представим в виде сдвига за единичное время по фазовым кривым голоморфного векторного поля $v(z)$ с особой точкой 0 и линейной частью 0: $v(0)=v'(0)=0$; обозначение: $g=g_v{}^1$.

Теорема (см., например, [5, 6]). *Всякое отображение*

$$g:z\mapsto z+\alpha z^k+\ldots,\quad \alpha\neq 0 \tag{1}$$