

УДК 519.615.5

НОВОЕ СЕМЕЙСТВО ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ ЕРМАКОВА–КАЛИТКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2015 г. Д. А. Будько*, А. Кордеро**, Х. Р. Торрегроса**

(* 224016 Брест, бул. Космонавтов 21, Брестский гос. ун-т, Беларусь;

** Ин-т мультидисциплинарной матем. Политехн. ун-та Валенсии

Камино де Вера с/н, 46022 Валенсия, Испания)

e-mail: dzmitry.budzko@gmail.com; acordero@mat.upv.es; jr Torre@mat.upv.es

Поступила в редакцию 16.06.2014 г.

В работе построено новое однопараметрическое семейство итерационных методов для решения нелинейных уравнений и систем. Доказано, что порядок сходимости итерационной схемы равен трем и для уравнения, и для системы. Анализ динамического поведения методов показал более широкую область сходимости у предложенного метода по сравнению с другими, ранее известными итерационными методами второго, третьего и четвертого порядков. По итогам численного эксперимента предложенный метод также оказался более предпочтительным ввиду его относительной устойчивости и требуемым меньшим количеством итераций. Кроме того, проведено сравнение метода с ранее известными на примере системы двух нелинейных уравнений. Данная система описывает динамику пассивно гравитирующей массы в Ньютоновой круговой ограниченной задаче четырех тел, сформулированной на основе треугольных решений Лагранжа задачи трех тел. Библ. 19. Фиг. 8. Табл. 2.

Ключевые слова: двухшаговая итерационная схема решения нелинейных уравнений, схема Ермакова–Калиткина, сходимость схемы, устойчивость.

DOI: 10.7868/S0044466915120042

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим проблему вычисления корней нелинейных уравнений и систем уравнений вида

$$f(x) = 0, \quad f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

итерационными методами. Проблема (1) является прототипом для огромного числа нелинейных задач, решаемых численными методами. В последнее десятилетие появилось множество многошаговых итерационных методов различных порядков (см., например, [1]–[4]) для решения самых разных задач. Вместе с тем наиболее распространенным и эффективным среди итерационных методов остается простой и универсальный метод Ньютона, обладающий квадратичной скоростью сходимости в достаточно близкой окрестности корня. Однако многие важные приложения из различных областей науки и техники описываются существенно нелинейными системами и часто требуют “хорошее” начальное приближение для того, чтобы метод Ньютона сошелся. В этом случае существенным является свойство метода сходиться с “неудачного” приближения, далекого от корня, когда, к примеру, метод Ньютона не работает. На пути решения этой проблемы значительный прогресс был достигнут усилиями представителей советской школы вычислительной математики.

В [5]–[7] были предложены различные эффективные способы регулировки длины шага метода Ньютона для расширения области сходимости. В общем случае модификация метода Ньютона с демпфирующим множителем имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k [f'(x_k)]^{-1} f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Европейской комиссии и Министерства науки и технологий Королевства Испании (код проекта MTM2011-28636-C02-02).

где β_k является последовательностью вещественных величин и определяется по некоторой формуле или алгоритму, а через $f'(x_k)$ обозначена производная в случае $n = 1$ или якобиан при $n > 1$. В частности, при $\beta_k = 1$ итерационная схема (2) переходит в классический метод Ньютона.

В работе Н.Н. Калиткина и В.В. Ермакова (см. [5]) множитель β_k выбирается по формуле

$$\beta_k = \frac{\|f(x_k)\|^2}{\|f(x_k)\|^2 + \|f(x_k - [f'(x_k)]^{-1}f(x_k))\|^2}, \quad (3)$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена любая норма. Итерационная схема (2) с коэффициентом β_k вида (3) образует достаточно эффективный метод, что будет показано ниже на некоторых примерах.

В настоящей работе предлагается однопараметрическое семейство двухшаговых итерационных методов для решения систем уравнений (1). На первом шаге используется демпфированный метод Ньютона (в качестве предиктора). Второй шаг (корректор) напоминает схему Ермакова–Калиткина (2), (3) и определен итерационной процедурой, использующей также три вычисления функций на каждой итерации. Для уравнений ($n = 1$) построена итерационная процедура

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)^2}{bf(x_k)^2 + cf(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где α, b, c являются параметрами. Для систем уравнений ($n > 1$) предложена следующая итерационная схема:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha [f'(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - \left[bI + c\alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha} I - [f'(x^{(k)})]^{-1} [y^{(k)}, x^{(k)}; f] \right)^2 \right]^{-1} [f'(x^{(k)})]^{-1} f(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (5)$$

где через $[y^{(k)}, x^{(k)}; f]$ обозначены разделенные разности оператора f по $y^{(k)}$ и $x^{(k)}$. Единичная матрица обозначена через I .

Ниже мы докажем третий порядок сходимости для предложенного метода (ПМ) как в одномерном случае, так и для систем уравнений при ограничениях на параметры α, b, c .

Для сравнения ПМ с известными методами выберем следующие итерационные процедуры второго порядка: метод Ньютона и метод Ермакова–Калиткина (2), (3). К сравнению добавим метод Трауба (см. [8]) третьего порядка, чья итерационная схема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k - [f'(x_k)]^{-1} (f(x_k) + f(y_k)), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

и метод Жарратта (см. [9]) четвертого порядка, имеющий итерационную процедуру

$$\begin{aligned} z_k &= x_k - \frac{2}{3} [f'(x_k)]^{-1} f(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2} [3f'(z_k) - f'(x_k)]^{-1} (3f'(z_k) + f'(x_k)) [f'(x_k)]^{-1} f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнение пяти методов проводится с построением областей притяжения в фазовой плоскости. Необходимые понятия и определения из теории голоморфных динамических систем даны в п. 2.2.

Основной материал статьи структурно выделен в два раздела. Первый посвящен уравнениям ($n = 1$), второй – системам уравнений ($n > 1$). Для тестирования методов в многомерном случае ($n > 1$) мы используем систему двух нелинейных уравнений, которая описывает движение тел в небесной механике. Данная система определяет равновесное положение тела с “нулевой” массой в гравитационном поле, генерируемом тремя массивными телами, образующими треугольную конфигурацию Лагранжа (см. [10], [11]). При этом система имеет два параметра, и в зависимости от их значений, может иметь от 8 до 10 решений. Поэтому исследование областей притя-

жения в фазовой плоскости для этой системы само по себе является актуальной задачей. Тем не менее, мы показываем, что предложенный метод (5) улучшает области притяжения, делая границы между ними более “равномерными” и “регулярными”, с меньшим количеством “шума” и “хаоса”.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕТОДА В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ

Вначале проанализируем локальный порядок сходимости семейства ПМ в скалярном случае. Затем, с точки зрения динамики, сравним методы на примере некоторых уравнений. В конце раздела приведем результаты численного эксперимента, отмечая такие характеристики вычислений как начальное приближение, число итераций и норма невязки. Также мы проверим численно, соответствует ли теоретический порядок сходимости методов практическому.

2.1. Анализ сходимости

Ниже покажем, какие значения должны принимать параметры b и c , зависящие от α , чтобы ПМ (4) имел третий порядок сходимости.

Теорема. Пусть $\xi \in I$ – простой корень достаточно дифференцируемой функции $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в открытом интервале I и x_0 является начальным приближением, близким к ξ . Тогда метод (4) имеет

третий порядок сходимости, если $b = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$ и $c = \frac{1 + \alpha}{2(\alpha - 1)\alpha^2}$, где $\alpha \notin \{0, 1\}$. При этом уравнение погрешностей метода имеет вид

$$e_{k+1} = \left(-\frac{1}{2}(-2 + 2\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)c_2^2 + 2(-1 + \alpha)c_3 \right) e_k^3 + O(e_k^4),$$

где $c_k = (1/k!) \frac{f^{(k)}(\xi)}{f'(\xi)}$, $k = 1, 2, \dots$, и $e_k = x_k - \xi$.

Доказательство основано на разложении в ряд Тейлора элементов, содержащихся в итерационном выражении (4).

Выполняя разложение Тейлора в окрестности корня ξ , будем иметь

$$f(x_k) = f'(\xi)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3] + O(e_k^4)$$

и

$$f'(x_k) = f'(\xi)[1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3] + O(e_k^4).$$

Подставляя эти выражения в первый шаг схемы (4), получаем

$$y_k - \xi = (1 - \alpha)e_k + \alpha c_2 e_k^2 + 2\alpha(-c_2^2 + c_3)e_k^3 + O(e_k^4).$$

Затем, раскладывая в ряд Тейлора $f(y_k)$ вокруг ξ , находим

$$f(y_k) = f'(\xi)[(1 - \alpha)e_k + (1 - \alpha + \alpha^2)c_2 e_k^2 - (2\alpha^2 c_2^2 + (-1 + \alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)c_3)e_k^3] + O(e_k^4).$$

Тогда, комбинируя эти выражения, находим

$$\begin{aligned} u &= \frac{f(x_k)^2}{bf(x_k)^2 + cf(y_k)^2} = \frac{1}{b + (-1 + \alpha)^2 c} + \frac{2c(-1 + \alpha)\alpha^2 c_2}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^2} e_k + \\ &+ \frac{\alpha^2 c((-6 + 6\alpha + \alpha^2)b + 3(-1 + \alpha)^2(2 - 2\alpha + \alpha^2)c)c_2^2}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^3} - \\ &- \frac{\alpha^2 c(2(3 - 4\alpha + \alpha^2)(b + (-1 + \alpha)^2 c)c_3)}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^3} e_k^2 + O(e_k^3). \end{aligned}$$

Поэтому погрешность на последней итерации имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} - \xi &= y_k - \xi - \frac{f(x_k)^2}{bf(x_k)^2 + cf(y_k)^2 f'(x_k)} = -\frac{(-1 + \alpha)(-1 + b + (-1 + \alpha)^2 c)}{b + (-1 + \alpha)^2 c} e_k + \\
 &+ \frac{(\alpha b^2 + (-1 + \alpha)^2 c(1 + \alpha^2(1 - 2c) + \alpha(-1 + c) + \alpha^3 c))}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^2} e_k^2 + \frac{b(1 + 2\alpha^3 c + \alpha(-1 + 2c) - \alpha^2(1 + 4c))}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^2} c_2 e_k^2 + \\
 &+ \left(-2\alpha - \frac{2(-1 + \alpha)\alpha^2(-1 + \alpha + \alpha^2)c}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^2} + \frac{(1 + \alpha)(-2 + 4\alpha)}{b + (-1 + \alpha)^2 c} + \right. \\
 &\left. + \frac{(-1 + \alpha)a^2 c((6 - 6\alpha - \alpha^2)b + 3(-1 + \alpha)^2(2 - 2\alpha + \alpha^2)c)}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^3} \right) c_2^2 e_k^3 + \\
 &+ \left(2\alpha - \frac{2(-1 + \alpha)\alpha^2(3 - 4\alpha + \alpha^2)c}{(b + (-1 + \alpha)^2 c)^2} + \frac{(1 + \alpha)(2 - 4\alpha + \alpha^2)}{b + (-1 + \alpha)^2 c} \right) c_3 e_k^3 + O(e_k^4).
 \end{aligned}$$

Теперь три коэффициента при e_k , e_k^2 , $c_2 e_k^2$ образуют систему, где роль неизвестных играют параметры b и c . Эта система может иметь два решения $\alpha = b = 1$ или $b = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$, $c = \frac{1 + \alpha}{2(\alpha - 1)\alpha^2}$.

Но первое решение не подходит, так как обнуляет некоторые знаменатели в разложении Тейлора. Тогда третий порядок сходимости семейства методов (4) достигнут и погрешность примет вид

$$e_{k+1} = \left(-\frac{1}{2}(-2 + 2\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)c_2^2 + 2(-1 + \alpha)c_3 \right) e_k^3 + O(e_k^4).$$

2.2. Динамическое поведение методов

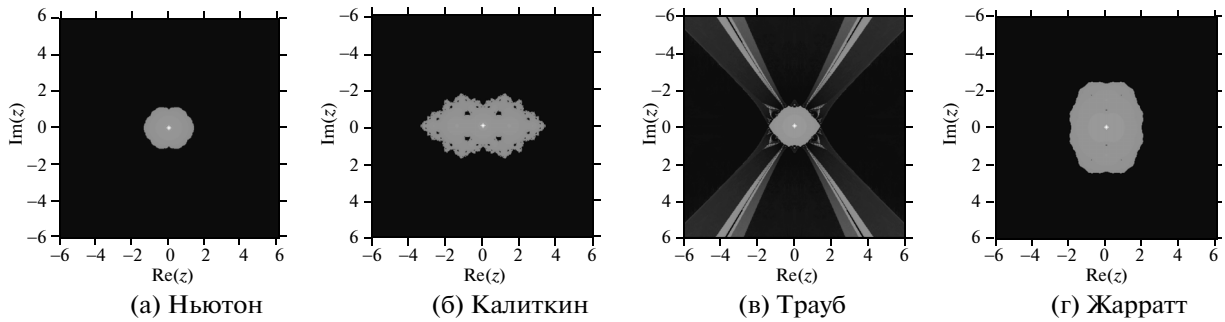
Ниже построим некоторые фазовые плоскости, соответствующие семейству методов (4) и некоторым классическим методам, для следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \operatorname{arctg}(x), \quad \xi = 0, \\
 f_2(x) &= \operatorname{arctg}(x) - \frac{2x}{1 + x^2}, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 \approx -1.3917, \quad \xi_3 \approx 1.3917, \\
 f_3(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + 1, \quad \xi = 0.
 \end{aligned}$$

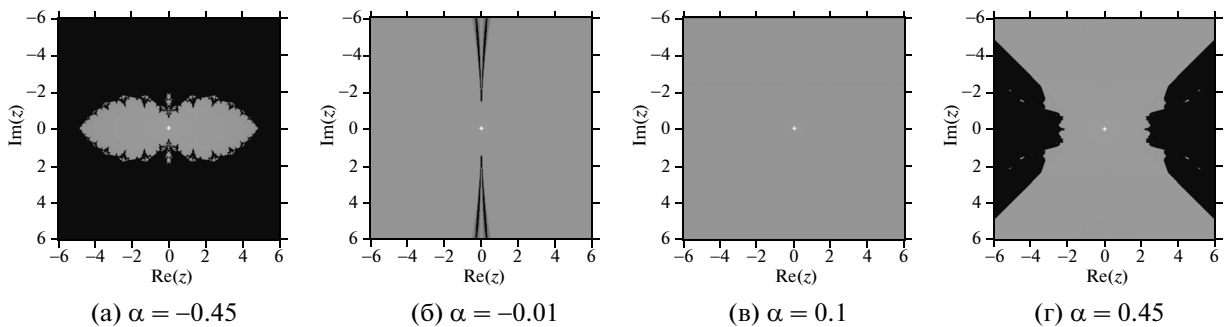
Для исследования динамического поведения итерационных методов приведем некоторые основные понятия и определения из теории голоморфных динамических систем (более подробно см., например, [12], [13]).

Пусть $R: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ — оператор, который определяет результат применения итерационного метода к конкретной функции, где \hat{C} — сфера Римана. Орбита точки $z_0 \in \hat{C}$ определяется как подмножество фазового пространства, состоящего из последовательных образов z_0 , к которым применен оператор R , и имеет вид $\{z_0, R(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$.

Динамическое поведение неподвижной точки оператора R на комплексной плоскости может быть классифицировано в зависимости от асимптотики. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является неподвижной точкой оператора R , если $R(z_0) = z_0$. Неподвижная точка является притягивающей, отталкивающей или нейтральной, если $|R'(z_0)|$ меньше чем, больше чем, или равно единице соответственно. Более того, если $|R'(z_0)| = 0$, то неподвижная точка является сверхпритягивающей.



Фиг. 1. Фазовые плоскости для ранее известных методов для уравнения $f_1(x)$.



Фиг. 2. Фазовые плоскости для семейства ПМ (4) для уравнения $f_1(x)$.

Если z_f^* – притягивающая неподвижная точка оператора R , то ее область притяжения $\mathcal{A}(z_f^*)$ определена как множество n -прообразов так, что

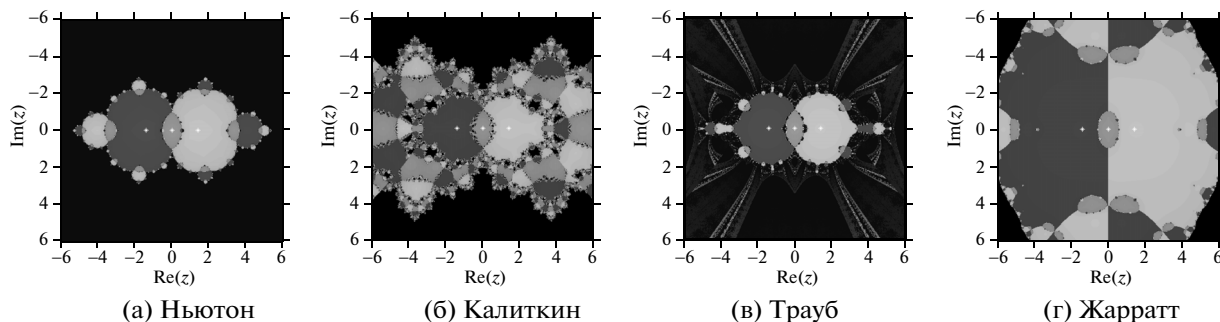
$$\mathcal{A}(z_f^*) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z_f^*, n \rightarrow \infty\}.$$

Объединение всех областей притяжения в фазовой плоскости образует множество Фату $\mathcal{F}(R)$. Множество Жулиа $\mathcal{J}(R)$ является дополнением к множеству Фату в $\hat{\mathbb{C}}$ и устанавливает границы между областями притяжения.

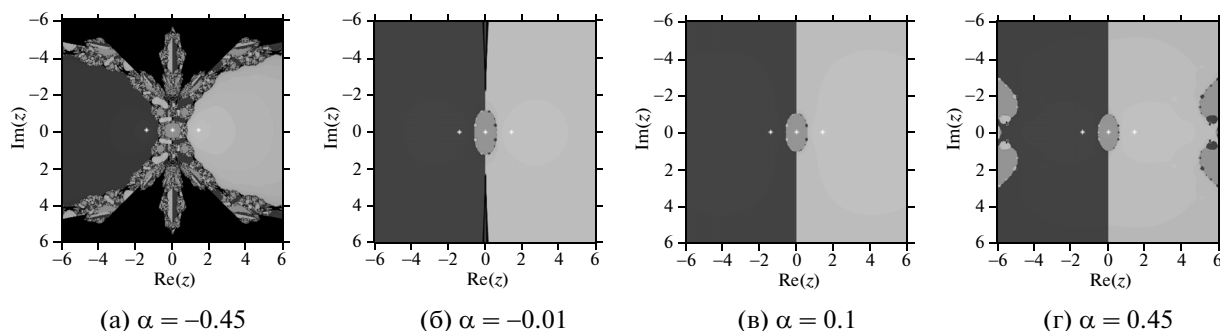
Для изображения областей притяжения ПМ и классических методов мы используем программное обеспечение, описанное в [14]. Для этого вводим сетку с шагом 400 точек на каждой оси; каждая точка сетки используется как различное начальное приближение для всех сравниваемых методов. В случае уравнений $f_1(x)$ и $f_3(x)$, которые имеют по единственному корню, точка отображает оранжевым цветом, если метод достигает решения менее, чем за 80 итераций. В случае $f_2(x)$, когда имеются три решения, вторая и третья области отображаются зеленым и синими цветами. Цвет тем интенсивнее, чем меньше требуется итераций для достижения корня. Если метод не сходится за 80 итераций, то точка отображается черным цветом.

Итак, сравним несколько представителей класса предложенных методов (при $\alpha = -0.45, -0.01, 0.1, 0.45$) с ранее известными итерационными процедурами различных порядков (методы Ньютона, Ермакова–Калиткина, Трауба и Жарратта). На фиг. 1 представлено области притяжения известных методов на примере уравнения $f_1(x)$. Заметим, что в комплексной плоскости наибольшие области принадлежат методам, соответствующим рисункам 1б и г. Если же принимать во внимание только вещественные числа, то метод Ермакова–Калиткина сходится на отрезке $[-3.5, 3.5]$ приблизительно. Итерационные схемы Трауба (6) и Ньютона сходятся примерно одинаково, а именно, со всех начальных приближений из промежутка $[-1.8, 1.8]$, тогда как метод Жарратта (7) обладает немного более широкой областью сходимости $[-2, 2]$.

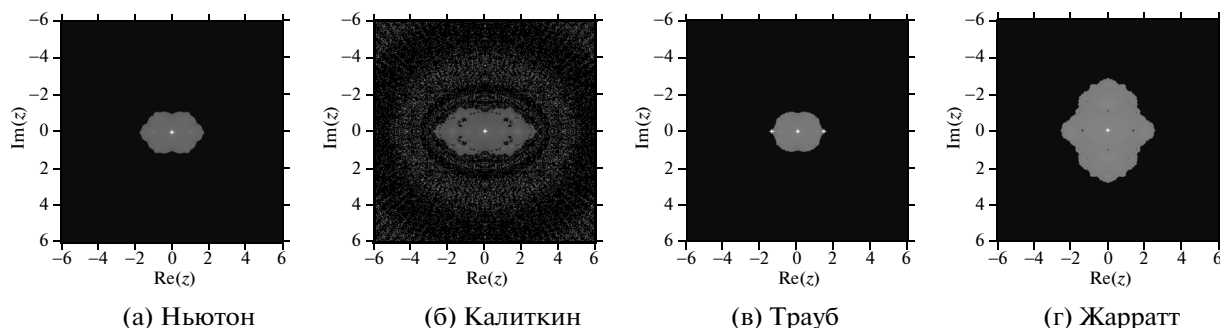
Исследуя динамическое поведение ПМ, легко заметить, что наиболее широкие области сходимости достигаются при значениях α , близких к нулю (рисунки 2б и в) с действительным промежутком сходимости более, чем $[-8, 8]$.



Фиг. 3. Фазовые плоскости для ранее известных методов для уравнения $f_2(x)$.



Фиг. 4. Фазовые плоскости для семейства ПМ (4) для уравнения $f_2(x)$.

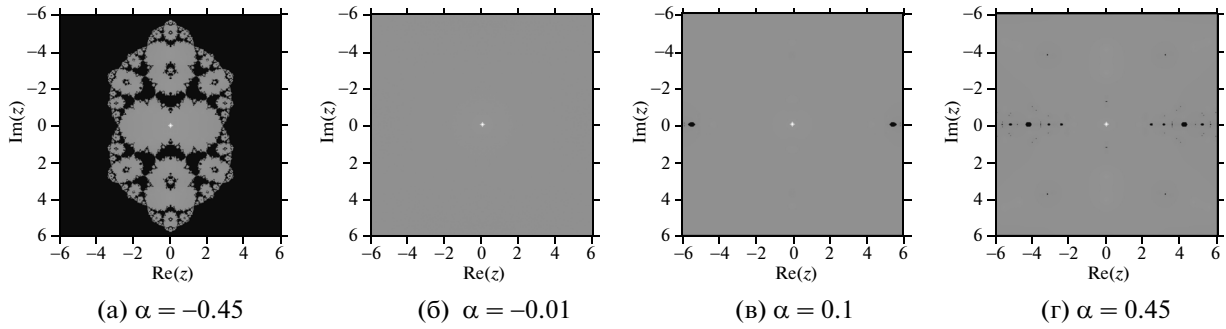


Фиг. 5. Фазовые плоскости для ранее известных методов для уравнения $f_3(x)$.

Динамическое поведение рассматриваемых методов для уравнения $f_2(x)$ представлено на фиг. 3 и 4. Опять методы Ньютона и Трауба обладают меньшей областью сходимости. Области притяжения на фазовой плоскости для итерационной процедуры Ермакова–Калиткина имеют довольно хаотичный и сложный вид, хотя сам метод и обладает более широкой областью сходимости. Динамика ПМ представлена на фиг. 4, где близких к нулю значений α , ПМ является наиболее устойчивым из всех рассматриваемых. При этом ПМ (при $\alpha = 0.1$, см. фиг. 4в) обладает сравнительно широкой областью сходимости для вещественных начальных приближений (не менее $[-26, 26]$) для уравнения $f_2(x)$.

Рассмотрим теперь функцию $f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + 1$ и исследуем динамику сравниваемых методов.

Области притяжения единственного корня $\xi = 0$ представлены для разных классических методов (см. фиг. 5) и для различных значений параметра α семейства ПМ (см. фиг. 6). Рассматриваемые классические методы едва сходятся на отрезке действительной оси $[-3, 3]$, в то время как при



Фиг. 6. Фазовые плоскости для семейства ПМ (4) для уравнения $f_3(x)$.

$\alpha = -0.01$ метод ПМ сходится для всех начальных приближений из отрезка $[-140, 140]$. Заметим, что снова лучшие результаты ПМ показывает при малых значениях параметра α (по абсолютной величине). Таким образом, динамика ПМ, показанная на фиг. 6б и 6в, соответствуют более устойчивым методам.

2.3. Численные тесты

Вычисления производились в системе компьютерной алгебры Mathematica 9, используя длинную арифметику и 10 000 значащих цифр. Во всех примерах мы останавливали итерационные процедуры, достигая точности по невязке функции 10^{-2000} .

Ниже представляем результаты численного эксперимента, проведенного для сравнения известных методов Ньютона, Ермакова–Калиткина, Трауба, Жарратта и предложенного метода со значением $\alpha = 0.1$. Мы использовали те же уравнения $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ что и в п. 2.2. Все полученные результаты сведены в табл. 1, где можно увидеть взаимосвязь между начальными приближениями, числом итерации и нормой невязки функции для различных уравнений. Также в табл. 1 приводится приближенный численный порядок сходимости (approximated computational order of convergence – ACOC), предложенный в [15]. Индекс ACOC служит вспомогательным средством

Таблица 1. Результаты численного эксперимента для уравнений

| Характеристики | Метод | Уравнение | | | | | | | | |
|----------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| | | $f_1(x)$ | | | $f_2(x)$ | | | $f_3(x)$ | | |
| | | $x_0 = 1.1$ | $x_0 = 3.2$ | $x_0 = 7.2$ | $x_0 = 2.8$ | $x_0 = 5.8$ | $x_0 = 24$ | $x_0 = 0.3$ | $x_0 = 1.6$ | $x_0 = 4.8$ |
| Итерация | Н | 9 | — | — | 12 | — | — | 3320 | 3322 | — |
| | Е–К | 7 | 10 | — | 10 | 8 | — | 3618 | 3617 | — |
| | пм | 7 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 2094 | 2096 | 2098 |
| | Т | 6 | — | — | 7 | — | — | 2346 | — | — |
| | Ж | 5 | — | — | 6 | 6 | — | 1660 | — | — |
| ACOC | Н | 3 | — | — | 2 | — | — | 1 | 1 | — |
| | Е–К | 3 | 3 | — | 2 | 3 | — | 1 | 1 | — |
| | пм | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| | Т | 5 | — | — | 3 | — | — | 1 | — | — |
| | Ж | 5 | — | — | 4 | 4 | — | 1 | — | — |
| $ f(x_k) $ | Н | 1e-4577 | — | — | 1e-2427 | — | — | 1e-2001 | 1e-2001 | — |
| | Е–К | 1e-2855 | 1e-5763 | — | 1e-2081 | 1e-4446 | — | 1e-2001 | 1e-2001 | — |
| | пм | 1e-2561 | 1e-5422 | 1e-4248 | 1e-3472 | 1e-2553 | 1e-3368 | 1e-2001 | 1e-2001 | 1e-2001 |
| | Т | 1e-3580 | — | — | 1e-2209 | — | — | 1e-2001 | — | — |
| | Ж | 1e-3163 | — | — | 1e-7888 | 1e-1889 | — | 1e-2001 | — | — |

для измерения практической скорости сходимости сравниваемых итерационных методов и задается следующей формулой:

$$p \approx \text{ACOC} = \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}|/|x_{k-1} - x_{k-2}|)}.$$

Поясним приведенные значения индекса ACOC в табл. 1. Уравнения погрешностей методов Ньютона (Н), Ермакова–Калиткина (Е–К), Трауба (Т) и Жарратта (Ж) зависят только от $c_2 = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$. Поэтому повышенный индекс ACOC для уравнения $f_1(x)$ обусловлен тем, что вторая производная этой функции принимает значение ноль в корне. Для рассматриваемой функции $f_2(x)$ вычисленный индекс ACOC соответствует теоретическому порядку сходимости метода (если метод сходится). Наконец, уравнение $f_3(x)$ имеет кратный корень и скорость сходимости всех методов линейная (если они сходятся). С другой стороны, итерационная схема ПМ требует меньшее количество итераций, чем метод Трауба, и имеет более широкую область сходимости, чем все классические методы, рассматриваемые в этой работе.

3. ОБОБЩЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕТОДА НА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Обобщим предложенный метод (4) для решения систем уравнений (1). Покажем, при каких ограничениях на параметры b и c (зависящие от α) достигается третий порядок локальной сходимости. Затем проведем сравнение методов на одной системе двух нелинейных уравнений, описывающей движение небесных тел в ограниченной задаче четырех тел.

3.1. Анализ сходимости

Для обобщения метода (4) на многомерный случай требуется переписать итерационное выражение в таком виде, чтобы в знаменателе не содержалось вычислений нелинейной функции, так как они окажутся векторами в многомерном случае. Для этого мы считаем, что на первом шаге итерационный процесс $y_k = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $f(x_k)$ может быть выражен как $f(x_k) = \frac{1}{\alpha} (x_k - y_k) f'(x_k)$.

Используя это, на втором шаге метода (4) множитель, содержащий параметры b и c , может быть переписан в виде

$$\frac{f(x_k)^2}{bf(x_k)^2 + cf(y_k)^2} = \frac{1}{b + c \left(\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}\right)^2} = \frac{1}{b + c \left(\frac{af(y_k)}{(x_k - y_k)f'(x_k)}\right)^2} = \frac{1}{b + c\alpha^2 \left[\frac{f[y_k, x_k]}{f'(x_k)}\right]^2}.$$

Теперь метод (4) полностью обобщается на системы уравнений с несколькими переменными. Соответствующая итерационная процедура имеет вид (5).

Для доказательства сходимости метода в \mathbb{R}^n приведем определение, данное в [16]. Оператор $[\cdot, \cdot, f] : D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ называется *первой разделенной разностью* оператора f , если $[x, y, f](x - y) = f(x) - f(y)$, $\forall x, y \in D$.

Используя формулу Геночки–Эрмита (см. [17])

$$[x, x + h, f] = \int_0^1 f'(x + th) dt,$$

и раскладывая $f'(x + th)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x , получаем

$$\int_0^1 f'(x + th) dt = f'(x) + \frac{1}{2} f''(x)h + \frac{1}{6} f'''(x)h^2 + O(h^3). \tag{8}$$

Если $e = x - \xi$ и предположив, что $f'(\xi)$ невырожденна, будем иметь

$$f(x) = f'(\xi)[e + C_2 e^2 + C_3 e^3 + C_4 e^4] + O(e^5),$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= f'(\xi)[I + 2C_2e + 3C_3e^2 + 4C_4e^3] + O(e^4), \\
 f''(x) &= f'(\xi)[2C_2 + 6C_3e + 12C_4e^2] + O(e^3), \\
 f'''(x) &= f'(\xi)[6C_3 + 24C_4e] + O(e^2),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

где $C_k = (1/k!)[f'(\xi)]^{-1}f^{(k)}(\xi)$, $k = 2, 3, \dots$.

Подставляя выражения (9) в (8) и полагая $y = x + h$ и $e_y = y - \xi$, получаем

$$[x, y; f] = f'(\xi)[I + C_2(e_y + e) + C_3e^2] + O(e^3). \tag{10}$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующий результат о нелинейных системах.

Теорема. Пусть $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – достаточно дифференцируемая функция в открытой окрестности D вокруг ξ , которое является решением нелинейной системы $f(x) = 0$. Предположим, что $f'(x)$ невырождена в ξ и $x^{(0)}$ является начальным приближением, достаточно близким к решению ξ . Тогда последовательность $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$, полученная по итерационному выражению (5), сходится к ξ с порядком

сходимости 3, если $b = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$, $c = \frac{(1 + \alpha)}{2\alpha^2(\alpha - 1)}$ и $\alpha \notin \{0, 1\}$. При этом погрешность метода имеет вид

$$e^{(k+1)} = \left(-\frac{1}{2}(-2 + 2\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)C_2^2 + 2(\alpha - 1)C_3\right)e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4}),$$

где $C_k = (1/k!)[f'(\xi)]^{-1}f^{(k)}(\xi)$, $k = 2, 3, \dots$, и $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$.

Доказательство. Разложение в ряд Тейлора $f(x^{(k)})$ и $f'(x^{(k)})$ в окрестности ξ дает

$$f(x^{(k)}) = f'(\xi)[e^{(k)} + C_2e^{(k)^2} + C_3e^{(k)^3}] + O(e^{(k)^4}) \tag{11}$$

и

$$f'(x^{(k)}) = f'(\xi)[I + 2C_2e^{(k)} + 3C_3e^{(k)^2}] + O(e^{(k)^3}). \tag{12}$$

Более того, требуя $[f'(x^{(k)})]^{-1}f(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})[f'(x^{(k)})]^{-1} = I$, получаем

$$[f'(x^{(k)})]^{-1} = [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)^2}][f'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)^3}), \tag{13}$$

где

$$X_2 = -2C_2, \quad X_3 = 4C_2^2 - 3C_3.$$

Тогда,

$$[f'(x^{(k)})]^{-1}f(x^{(k)}) = e^{(k)} - C_2e^{(k)^2} + 2(-C_3 + C_2^2)e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4}), \tag{14}$$

и погрешность на первом шаге примет вид

$$e_y^{(k)} = y^{(k)} - \xi = (1 - \alpha)e^{(k)} + \alpha C_2e^{(k)^2} - 2\alpha(-C_3 + C_2^2)e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4}). \tag{15}$$

Теперь, используя (10), имеем

$$[y^{(k)}, x^{(k)}; f] = f'(\xi)[I + (2 - \alpha)C_2e^{(k)} + \alpha C_2^2e^{(k)^2} + (3 - 3\alpha + \alpha^2)C_3e^{(k)^2}] + O(e^{(k)^3}). \tag{16}$$

Из (13) и (16) получаем

$$\frac{1}{\alpha}I - [f'(x^{(k)})]^{-1}[y^{(k)}, x^{(k)}; f] = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)I + \alpha C_2e^{(k)} - (3\alpha C_2^2 + \alpha(\alpha - 3)C_3)e^{(k)^2} + O(e^{(k)^3}). \tag{17}$$

Таким образом, разложение Тейлора (вокруг ξ) выражения, требующего обращения, на втором шаге метода (5) примет вид

$$A = bI + c\alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha} I - [f'(x^{(k)})]^{-1} [y^{(k)}, x^{(k)}; f] \right)^2 = \left(b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 c\alpha^2 \right) I + 2c\alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) C_2 e^{(k)} + [c\alpha^2(\alpha^2 - 6 + 6\alpha)C_2^2 + (2c\alpha^3(\alpha - 3) - 2c\alpha^2(\alpha - 3))C_3] e^{(k)^2} + O(e^{(k)^3}).$$

Далее определяем $A^{-1} = I + Y_1 e^{(k)} + Y_2 e^{(k)^2} + O(e^{(k)^3})$ таким образом, чтобы $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Потребуем, чтобы следующее выражение принимало вид единичной матрицы:

$$AA^{-1} = \left(b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 c\alpha^2 \right) I + \left[\left(b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 c\alpha^2 \right) Y_1 + 2c\alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) C_2 \right] e^{(k)} + \left[\left(b + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 c\alpha^2 \right) Y_2 + 2c\alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) C_2 Y_1 + c\alpha^2(\alpha^2 - 6 + 6\alpha)C_2^2 + (2c\alpha^3(\alpha - 3) - 2c\alpha^2(\alpha - 3))C_3 \right] e^{(k)^2} + O(e^{(k)^3}).$$

Для этого необходимо проверить выполнение следующих равенств:

$$b = 1 - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 c\alpha^2,$$

$$Y_1 = -2c\alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) C_2,$$

$$Y_2 = -Y_1^2 - c\alpha^2(\alpha^2 - 6 + 6\alpha)C_2^2 - (2c\alpha^3(\alpha - 3) - 2c\alpha^2(\alpha - 3))C_3.$$

Тогда погрешность на последней итерации примет вид

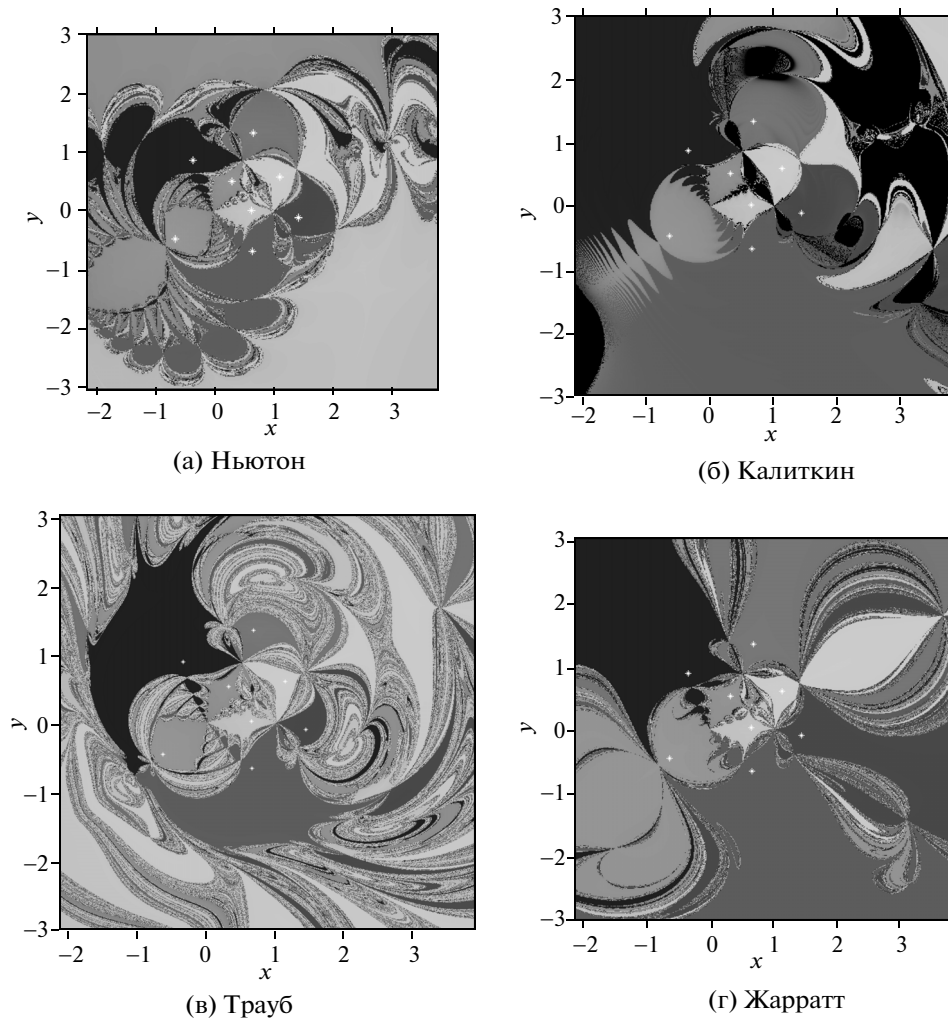
$$x^{(k+1)} - \xi = y^{(k)} - \xi - A^{-1} [f'(x^{(k)})]^{-1} f(y^{(k)}) = ((-1 + a)(-1 - \alpha - 2\alpha^2 c + 2\alpha^3 c)C_2) e^{(k)^2} + ((-2 + \alpha^2(4 - 8c) + 16\alpha^3 c - 12\alpha^6 c^2 + 4\alpha^7 c^2 + 3\alpha^5 c(-1 + 4c) - \alpha^4 c(5 + 4c))C_2^2 - (-1 + \alpha)(2 + 2\alpha - 8\alpha^3 c + 2\alpha^4 c + \alpha^2(-1 + 6c))C_3) e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4})$$

и единственной возможностью для достижения третьего порядка сходимости является $c = \frac{\alpha + 1}{2\alpha^2(\alpha - 1)}$ и $b = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2}$. В этом случае погрешность метода имеет вид

$$e^{(k+1)} = \left(-\frac{1}{2}(-2 + 2\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)C_2^2 + 2(\alpha - 1)C_3 \right) e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4}).$$

3.2. Приложение к задаче небесной механики

Рассмотрим в качестве примера для тестирования ПМ (5) приложение к небесной механике, а именно к Ньютоновой круговой ограниченной задаче четырех тел, сформулированной на ос-

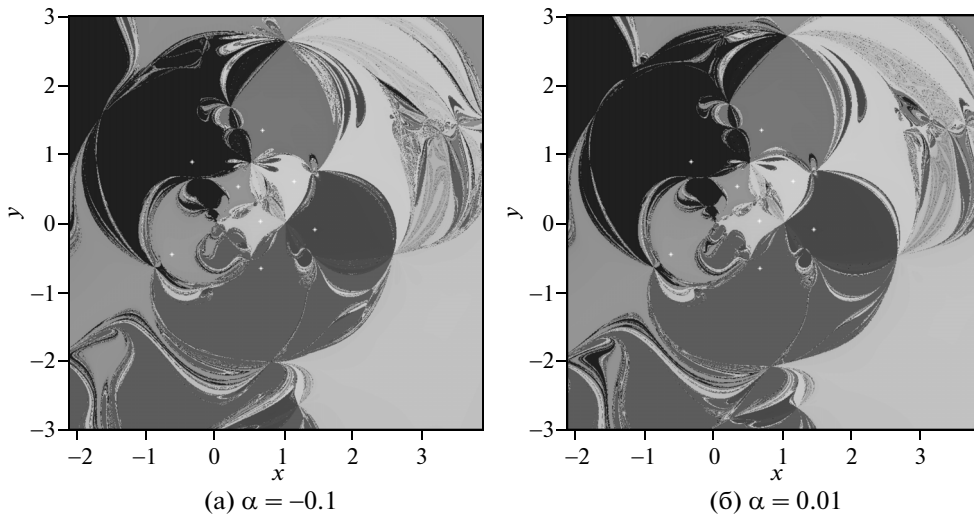


Фиг. 7. Фазовые плоскости для ранее известных методов для системы (18), $\mu_1 = 0.25$ и $\mu_2 = 0.35$.

нове треугольных решений Лагранжа (см. [10], [11]). Нелинейные уравнения, которые определяют равновесные решения в плоскости орбиты тел, имеют вид

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3}x - y) \left(1 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) + \mu_1 (\sqrt{3}(x-1) + y) \left(1 - \frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} \right) &= 0, \\
 2y \left(1 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) + \mu_2 (\sqrt{3}(x-1) + y) \left(1 - \frac{1}{(1-x+x^2 - \sqrt{3}y + y^2)^{3/2}} \right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

и содержат два массовых параметра μ_1, μ_2 . При различных значениях параметров $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ система (18) может иметь от 8 до 10 решений. Как будет показано ниже, границы между областями притяжения для данной системы являются хаотичными, неравномерными, “негладкими” с большим количеством “шума”. Использование тех или иных итерационных методов для нахождения решений системы (18) позволяет производить вычисления более или менее устойчиво. Устойчивость мы понимаем здесь в том смысле, что малое изменение начального приближения для итерационного метода может повлечь сходимость к другому решению. Поэтому проблема выбора устойчивой итерационной схемы для решения нелинейных систем типа (18) является актуальной, несмотря на то, что в [18] разработаны эффективные алгоритмы (на основе метода Ньютона) нахождения решений системы (18), и построена бифуркационная кривая на плоскости параметров, которая отделяет области с различным количеством решений (см. [19]).



Фиг. 8. Фазовые плоскости для семейства ПМ (5) для системы (18), $\mu_1 = 0.25$ и $\mu_2 = 0.35$.

Исследуем динамику сравниваемых итерационных методов на примере системы (18). При этом некоторые сведения из теории голоморфных динамических систем приведены в п. 2.2. При заданных значениях параметров, например при $\mu_1 = 0.25$ и $\mu_2 = 0.35$, построим фазовые плоскости для ранее известных итерационных схем на фиг. 7. При заданных значениях параметров система (18) имеет 8 решений (изображаются белыми точками), каждое из которых имеет свою область притяжения, окрашенную в различный цвет. Заметим, что неплохие результаты в смысле “неразмытости” границ показывает метод Ермакова–Калиткина (2), (3). Однако, как видно на фиг. 7б, в правом верхнем углу имеется достаточно большая черная область, соответствующая начальным приближениям, с которых метод расходится.

На фиг. 8 изображены фазовые плоскости для семейства ПМ (5) для малых по модулю значений параметра $\alpha = -0.01$ и $\alpha = 0.1$. Можно отметить устойчивость ПМ (5) по сравнению с ранее известными методами. В целом, семейство ПМ показывает лучшие результаты при малых (по абсолютной величине) значениях параметра α как для уравнений, так и для систем уравнений. Это можно объяснить тем, что в уравнении погрешностей ПМ (см. теорему 1 и 2) коэффициент при e_k^3 практически зависит от значения параметра α . Близкие к нулю значения α уменьшают значение коэффициента при e_k^3 и при этом ускоряют и стабилизируют ПМ.

Далее в табл. 2 приведем результаты численного эксперимента, где в качестве примера рассмотрена система (18). Опять сравниваем пять итерационных схем (методы Ньютона, Ермакова–Калиткина, Трауба, Жарратта и ПМ (при $\alpha = 0.1$)). В табл. 2 используются различные значения массовых параметров μ_1, μ_2 и различные начальные приближения (обозначены через $x^{(0)}$), отмечается требуемое количество итераций для достижения корня с точностью 10^{-2000} . Отметим, что все рассматриваемые методы сходились при выбранных начальных данных (см. табл. 2), хотя иногда и к разным решениям. В этом смысле, глядя на фиг. 7в, самым “непредсказуемым” является метод Трауба для системы (18).

Таблица 2. Результаты численных тестов для системы (18)

| M ₁ | M ₂ | x ⁽⁰⁾ | Число итераций | | | | |
|----------------|----------------|------------------|----------------|-----|----|----|----|
| | | | Н | Е–К | пм | Т | Ж |
| 0.25 | 0.35 | (−0.2, −0.7) | 18 | 15 | 12 | 17 | 7 |
| | | (3, 0.21) | 15 | 15 | 13 | 24 | 13 |
| | | (3, −0.01) | 14 | 14 | 13 | 14 | 23 |
| 0.1 | 0.2 | (0.4, 0.8) | 18 | 14 | 12 | 10 | 10 |
| | | (1, 1) | 16 | 19 | 12 | 9 | 7 |
| | | (0.2, 3) | 14 | 14 | 14 | 19 | 13 |

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложено новое однопараметрическое семейство итерационных методов третьего порядка для решения как нелинейных уравнений (4), так и систем уравнений (5). Главным преимуществом предложенного метода является расширение области сходимости. Используя теорию голоморфных динамических систем, мы сравнили предложенный метод с итерационными схемами Ньютона, Ермакова—Калиткина, Трауба и Жарратта. Эти сравнения, а также результаты численного эксперимента показали преимущества предложенного метода в смысле устойчивости и расширенной области сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petković M., Neta B., Petković L., Dzunić J.* Multipoint methods for solving nonlinear equations. New York: Academic Press, 2012.
2. *Cordero A., Lotfi T., Mahdiani K., Torregrosa J.R.* Two optimal general classes of iterative methods with eighth-order // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2014/ doi: 10.1007/s10440-014-9869-0.
3. *Artidiello S., Cordero A., Torregrosa J.R., Vassileva M.P.* Optimal high-order methods for solving nonlinear equations // *J. Applied Math.* 2014. Article ID 591638, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/591638>.
4. *Попузин В.В., Сумбатян М.А., Танюшин Р.А.* Быстрый итерационный метод в задаче о взаимодействии волн с системой тонких экранов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 8. С. 1374–1386.
5. *Ермаков В.В., Калиткин Н.Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1981. Т. 21. № 2. С. 491–497.
6. *Жанлав Т., Пузынин И.В.* О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1992. Т. 32. № 6. С. 846–856.
7. *Мадорский В.М.* Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. Брест: БрГУ, 2005.
8. *Traub J.F.* Iterative methods for the solution of equations. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1964.
9. *Jarratt P.* Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations // *Math. Comput.* 1966. V. 20. № 95. P. 434–37.
10. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // *Lect. Notes in Computer Sci.* 2011. V. 6885. P. 88–100.
11. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* Stability of equilibrium positions in the spatial circular restricted four-body problem // *Lect. Notes in Computer Sci.* 2012. V. 7442. P. 72–83.
12. *Blanchard P.* The dynamics of Newton's method // *Proc. of Symposia in Applied Meth.* 1994. V. 49. P. 139–154.
13. *Devaney R.L.* The Mandelbrot Set, the Farey Tree and the Fibonacci sequence // *Am. Math. Monthly.* 1999. V. 106. № 4. P. 289–302.
14. *Chicharro F.I., Cordero A., Torregrosa J.R.* Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods // *The Sci. World J.* 2013. Article ID 780153.
15. *Cordero A., Torregrosa J.R.* Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas // *Appl. Math. Comput.* 2007. V. 190. P. 686–698.
16. *Ortega J.M., Rheinboldt W.G.* Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. New-York: Academic Press, 1970.
17. *Hermite C.* Sur la formule d'interpolation de Lagrange // *J. Reine Angew. Math.* 1878. V. 84. P. 70–79.
18. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* Symbolic-numerical analysis of equilibrium solutions in a restricted four-body problem // *Program. Comput. Software.* 2010. V. 36. № 2. P. 68–74.
19. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* Symbolic-numerical methods for searching equilibrium states in a restricted four-body problem // *Program. Comput. Software.* 2013. V. 39. № 2. P. 74–80.