С. А. Айсагалиев, Ш. А. Айпанов, К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем, *Дифференц. уравнения*, 1999, том 35, номер 8, 1013–1019

1999. Т.35, № 8. С. 1013 — 1019

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

К ТЕОРИИ ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

С. А. Айсагалиев, Ш. А. Айпанов

1. Постановка задачи. Рассматривается динамическая система, описываемая в интервале $\{t\} \equiv [0, \infty)$ дифференциальными уравнениями вида [1]

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma), \quad \sigma(0) = \sigma_0, \tag{2}$$

где состояние объекта характеризуется совокупностью векторов $x \in E^n$, $\sigma \in E^m$ ($\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)^*$ — угловые координаты), A, B, C, R — постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно. Компоненты вектор-функции $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m))^* \in C^1(E^m)$ являются Δ_k-периодическими функциями

$$\varphi_k(\sigma_k) = \varphi_k(\sigma_k + \Delta_k) \quad \forall \sigma_k \in E^1 \tag{3}$$

с ограниченными производными

$$\mu_{1k} \le d\varphi_k(\sigma_k)/d\sigma_k \le \mu_{2k} \quad \forall \sigma_k \in E^1, \tag{4}$$

где $\mu_{1k} < 0$, $\mu_{2k} > 0$. Предполагается, что $\varphi_k(\sigma_k)$ обращаются в нуль на периоде $[0, \Delta_k)$ в изолированных точках $(k = \overline{1, m})$.

Пусть $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & R \end{pmatrix} \neq 0$, тогда стационарное множество системы (1) — (4) имеет вид $\Lambda = \{(x, \sigma) |\ x = 0,\ \varphi(\sigma) = 0\}$. Из периодичности функции $\varphi(\sigma)$ и изолированности ее нулей следует, что множество Λ содержит бесконечное счетное число точек равновесия.

Система вида (1) — (4), описываемая дифференциальными уравнениями, правые части которых периодичны по угловым координатам σ, относится к классу фазовых систем [1]. Она называется глобально асимптотически устойчивой, если при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $\sigma(0) = \sigma_0$ ее решение $(x(t), \sigma(t))$ при $t \to \infty$ стремится к некоторому положению равновесия $(0, \sigma_*) \in \Lambda$, где $\varphi(\sigma_*) = 0$.

Ставится задача: найти условия, накладываемые на конструктивные параметры (A, B, C, R), при выполнении которых система (1) — (4) является глобально асимптотически устойчивой.

Можно отметить следующие подходы к исследованию глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем: а) качественные и качественно-численные методы исследования [2 — 10]; б) построение периодических функций Ляпунова [1, 11 — 14]; в) метод сведения Леонова [1, 15 — 17]. Подробный обзор методов исследования устойчивости фазовых систем приведен в [18].

В настоящей работе, в которой получили дальнейшее развитие результаты работ [19 — 21], предлагается новый подход к вопросу о глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем без использования функций Ляпунова и частотных теорем Якубовича — Калмана.

2. Вспомогательные леммы. Обозначим через I_n единичную $(n\times n)$-матрицу. Введем в рассмотрение $(m \times n)$-матрицу G и для сокращения записей в дальнейшем используем следующие обозначения: $D = G\,B$, $F = D^{-1}G$, $\tilde{I} = I_n - B\,F$, $\tilde{C} = C - R\,F\,A$ — матрицы порядков $m \times m$, $m \times n$, $n \times n$, $m \times n$ соответственно. Вдоль решения рассматриваемой системы определим m-вектор-функции $\xi(t) = d\varphi(\sigma(t))/dt$, $\bar{x}(t) = F\,\dot{x}(t)$, $\hat{x}(t) = F\,\ddot{x}(t)$.

Л е м м а 1. *Пусть существует матрица G такая, что матрица D является неособой. Тогда вдоль решения системы (1) — (4) для любых $t \geq 0$ верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = -F\,A\,x(t) + \bar{x}(t), \tag{5}$$

$$\dot{x}(t) = \tilde{I}\,A\,x(t) + B\,\bar{x}(t), \tag{6}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \tilde{C}\,x(t) + R\,\bar{x}(t), \tag{7}$$

$$\xi(t) = -F\,A\,\tilde{I}\,A\,x(t) - F\,A\,B\,\bar{x}(t) + \hat{x}(t), \tag{8}$$

$$\ddot{\sigma}(t) = \tilde{C}\,\tilde{I}\,A\,x(t) + \tilde{C}\,B\,\bar{x}(t) + R\,\hat{x}(t). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вдоль решения рассматриваемой системы уравнения (1), (2) выполняются тождественно для любых $t \geq 0$. Умножая (1) слева на G и учитывая, что D — неособая матрица, можно получить (5). Подставляя (5) в (1), (2), имеем (6), (7). Дифференцируя (5), (7) и производя преобразования с использованием (1), (5), убеждаемся в справедливости тождеств (8), (9).

Л е м м а 2. *Если матрица A гурвицева, то вдоль решения системы (1) — (4) для любых $t \geq 0$ имеют место неравенства $|x(t)| \leq l_1$, $|\dot{x}(t)| \leq l_2$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq l_3$, $l_i = \mathrm{const} \geq 0$, $i = \overline{1,3}$, и функции $x(t)$, $\dot{x}(t)$ равномерно непрерывны в интервале $\{t\} \equiv [0, \infty)$.*

Если, кроме того, $\varphi(\sigma) \in C^2(E^m)$, то функция $\ddot{x}(t)$ также равномерно непрерывна в интервале $\{t\} \equiv [0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varphi(\sigma)$ — непрерывная периодическая функция, то она ограничена, т.е. $|\varphi(\sigma(t))| \leq l_0$ $\forall t \geq 0$. Тогда из гурвицевости матрицы A следует, что решение дифференциального уравнения (1) также ограничено: $|x(t)| \leq l_1$. При этом из (1), (2) имеем $|\dot{x}(t)| \leq l_2$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq l_3$. Из соотношений $\xi_k(t) = [d\varphi_k(\sigma_k)/d\sigma_k]\dot{\sigma}_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и условий (4) вытекает $|\xi(t)| \leq l_4$. Дифференцируя (1), (2), получим $\ddot{x}(t) = A\,\dot{x}(t) + B\,\xi(t)$, $\ddot{\sigma}(t) = C\,\dot{x}(t) + R\,\xi(t)$. Отсюда $|\ddot{x}(t)| \leq l_5$, $|\ddot{\sigma}(t)| \leq l_6$. Из ограниченности $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ следует равномерная непрерывность функций $x(t)$, $\dot{x}(t)$.

В случае $\varphi(\sigma) \in C^2(E^m)$ в силу периодичности функции $\varphi(\sigma)$ имеем $|d^2\varphi_k(\sigma_k)/d\sigma_k^2| \leq l_7$, $k = \overline{1,m}$. Тогда из соотношений $\dot{\xi}_k(t) = [d^2\varphi_k(\sigma_k)/d\sigma_k^2]\dot{\sigma}_k^2(t) + [d\varphi_k(\sigma_k)/d\sigma_k]\ddot{\sigma}_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, вытекает $|\dot{\xi}(t)| \leq l_8$. Дважды дифференцируя (1), получаем $\dddot{x}(t) = A\,\ddot{x}(t) + B\,\dot{\xi}(t)$. Отсюда $|\dddot{x}(t)| \leq l_9$, поскольку матрица A гурвицева. Из ограниченности $\dddot{x}(t)$ следует равномерная непрерывность функции $\ddot{x}(t)$.

3. Алгебраические критерии. Составим диагональные матрицы $\mu_1 = \mathrm{diag}(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1m})$, $\mu_2 = \mathrm{diag}(\mu_{21}, \ldots, \mu_{2m})$, где элементы $\mu_{1k} < 0$, $\mu_{2k} > 0$, $k = \overline{1,m}$, взяты из ограничений (4). Введем в рассмотрение диагональные матрицы $\tau = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\eta = \mathrm{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $\delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, симметричные $(m\times m)$-матрицы H_1, H_2, H_3, H_4, S_1, S_2, S_3, P_1, P_2 и $(m \times m)$-матрицы X, Y, Z.

Вдоль решения рассматриваемой системы определим функцию

$$V(t) = x^*(t)L_1\,x(t) + x^*(t)L_2\bar{x}(t) + x^*(t)L_3\hat{x}(t) + \bar{x}^*(t)L_4\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)L_5\hat{x}(t) + \hat{x}^*(t)L_6\hat{x}(t), \tag{10}$$

где $L_1 = 0{,}5\,(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_1^*)$, $\tilde{L}_1 = -A^*F^*\delta\,F\,A + A^*F^*\eta\,\tilde{C} - \tilde{C}^*\varepsilon\,\tilde{C} + A^*\tilde{I}^*A^*F^*H_3F\,A + A^*\tilde{I}^*\tilde{C}^*H_4\tilde{C} + A^*\tilde{I}^*A^*F^*\tau\,F\,A\,\tilde{I}\,A + \tilde{C}^*(\mu_1 + \mu_2)\tau\,F\,A\,\tilde{I}\,A + \tilde{C}^*\mu_1\tau\,\mu_2\tilde{C}$, $L_2 = 2\,A^*F^*\delta + A^*F^*\eta\,R - \tilde{C}^*\eta - 2\,\tilde{C}^*\varepsilon\,R + F^*H_1 - A^*\tilde{I}^*A^*F^*H_3 + A^*F^*H_3F\,A\,B + A^*\tilde{I}^*\tilde{C}^*H_4R + \tilde{C}^*H_4\tilde{C}\,B + 2\,A^*\tilde{I}^*A^*F^*\tau\,F\,A\,B + \tilde{C}^*(\mu_1 + \mu_2)\tau\,F\,A\,B + A^*\tilde{I}^*A^*F^*(\mu_1 + \mu_2)\tau\,R + 2\,\tilde{C}^*\mu_1\tau\,\mu_2R$, $L_3 = -A^*F^*H_3 + \tilde{C}^*H_4R - 2\,A^*\tilde{I}^*A^*F^*\tau - \tilde{C}^*(\mu_1+\mu_2)\tau$, $L_4 = 0{,}5\,(\tilde{L}_4 + \tilde{L}_4^*)$, $\tilde{L}_4 = -\delta - \eta\,R - R^*\varepsilon\,R - B^*A^*F^*H_3 + B^*\tilde{C}^*H_4R + B^*A^*F^*\tau\,F\,A\,B + R^*(\mu_1 + \mu_2)\tau\,F\,A\,B + R^*\mu_1\tau\,\mu_2R$, $L_5 = H_2 + H_3 + R^*H_4R - 2\,B^*A^*F^*\tau - R^*(\mu_1 + \mu_2)\tau$, $L_6 = \tau$.

Обозначим: $L = L_4 - 0{,}5\,(B^* L_3 + L_3^* B)$,

$$\alpha_k = \int_0^{\Delta_k} \varphi_k(\sigma_k)\, d\sigma_k, \quad \beta_k = \int_0^{\Delta_k} |\varphi_k(\sigma_k)|\, d\sigma_k, \quad \nu = \mathrm{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_m),$$

где $\nu_k = \alpha_k/\beta_k$, $k = \overline{1,m}$.

Используя процедуру Бакаева — Гужа [12], составим вектор-функцию $F(\sigma) = (F_1(\sigma_1), \ldots$ $\ldots, F_m(\sigma_m))^*$, компоненты которой являются Δ_k-периодическими функциями

$$F_k(\sigma_k) = \varphi_k(\sigma_k) - \nu_k |\varphi_k(\sigma_k)|, \quad k = \overline{1,m}, \tag{11}$$

с нулевыми средними значениями на периоде: $\int_0^{\Delta_k} F_k(\sigma_k)\, d\sigma_k = \alpha_k - \nu_k \beta_k = 0$, $k = \overline{1,m}$. При этом очевидно, что вдоль решения рассматриваемой системы имеет место оценка

$$\left| \int_0^T F_k(\sigma_k(t)) \dot\sigma_k(t)\, dt \right| = \left| \int_{\sigma_0}^{\sigma(T)} F_k(\sigma_k)\, d\sigma_k \right| < b_0 = \mathrm{const} \quad \forall T \geq 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и существуют матрицы* $\tau \geq 0$, $\varepsilon > 0$, η, δ, H_1, H_2, H_3, H_4, S_1 *такие, что:* 1) $4\,\delta\,\varepsilon - \nu^2 \eta^2 \geq 0$; 2) $L_2 - A^* \tilde I^* L_3 = F^* S_1$; 3) $L_5 = L_5^*$.

Тогда найдется такое число $c_1 = \mathrm{const}$, *что вдоль решения системы (1) — (4) имеет место оценка*

$$\int_0^T [x^*(t) L_1 x(t) + \bar x^*(t) L\, \bar x(t) + \hat x^*(t) L_6 \hat x(t)]\, dt < c_1 \quad \forall T \geq 0. \tag{13}$$

Доказательство. Вдоль решения рассматриваемой системы определим функции

$$V_1(t) = -\varphi^*(\sigma(t)) \delta\, \varphi(\sigma(t)) + \varphi^*(\sigma(t)) \eta\, \dot\sigma(t) - \dot\sigma^*(t) \varepsilon\, \dot\sigma(t), \tag{14}$$

$$V_2(t) = x^*(t) F^* H_1 \bar x(t) + \bar x^*(t) H_2 \hat x(t) + \varphi^*(\sigma(t)) H_3 \xi(t) + \dot\sigma^*(t) H_4 \ddot\sigma(t), \tag{15}$$

$$V_3(t) = [\xi(t) - \mu_1 \dot\sigma(t)]^* \tau [\xi(t) - \mu_2 \dot\sigma(t)]. \tag{16}$$

Произведем преобразования (см. [1, с. 284 — 286]) формулы (14) с учетом обозначений (11) и условия 1) леммы:

$$V_1(t) = \sum_{k=1}^m V_{1k}(t) = \sum_{k=1}^m [-\delta_k \varphi_k^2(\sigma_k(t)) + \eta_k \nu_k |\varphi_k(\sigma_k(t))| \dot\sigma_k(t) - \varepsilon_k \dot\sigma_k^2(t) + \eta_k F_k(\sigma_k(t)) \dot\sigma_k(t)] =$$

$$= -\sum_{k=1}^m \left\{ \left[\sqrt{\varepsilon_k}\, \dot\sigma_k(t) - \frac{\eta_k \nu_k}{2\sqrt{\varepsilon_k}} |\varphi_k(\sigma_k(t))| \right]^2 + \frac{4\,\delta_k \varepsilon_k - \eta_k^2 \nu_k^2}{4\varepsilon_k}\, \varphi_k^2(\sigma_k(t)) \right\} + \sum_{k=1}^m \eta_k F_k(\sigma_k(t)) \dot\sigma_k(t) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^m \eta_k F_k(\sigma_k(t)) \dot\sigma_k(t). \tag{17}$$

Интегрируя полученное неравенство в интервале $[0, T]$ и учитывая (12), имеем

$$\int_0^T V_1(t)\, dt < b_1 = \mathrm{const} \quad \forall T \geq 0. \tag{18}$$

Интеграл от 0 до T функции (15) равен

$$\int_0^T V_2(t)\, dt = 0{,}5\, x^*(T) F^* H_1 F\, x(T) - 0{,}5\, x_0^* F^* H_1 F\, x_0 + 0{,}5\, \bar x^*(T) H_2 \bar x(T) - 0{,}5\, \bar x_0^* H_2 \bar x_0 +$$

$$+ 0{,}5\, \varphi^*(\sigma(T)) H_3 \varphi(\sigma(T)) - 0{,}5\, \varphi^*(\sigma_0) H_3 \varphi(\sigma_0) + 0{,}5\, \dot\sigma^*(T) H_4 \dot\sigma(T) - 0{,}5\, \dot\sigma^*(0) H_4 \dot\sigma(0).$$

По лемме 2 функции $\varphi(\sigma(t))$, $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ ограничены, следовательно, для $\forall T \geq 0$ верно неравенство

$$\int_0^T V_2(t)\,dt < b_2 = \text{const}\,. \tag{19}$$

Ограничения (4) вдоль решения рассматриваемой системы можно записать в виде $\mu_{1k} \leq \leq \xi_k(t)/\dot{\sigma}_k(t) \leq \mu_{2k}$, $k = \overline{1,m}$. Отсюда видно, что при $\tau \geq 0$ функция (16) удовлетворяет условию $V_3(t) \leq 0$. Интегрируя данное неравенство в интервале $[0,T]$, получаем, что $\forall T \geq 0$ справедлива оценка

$$\int_0^T V_3(t)\,dt \leq 0. \tag{20}$$

Суммируя интегралы (18) — (20), имеем

$$\int_0^T V(t)\,dt < b = \text{const} \quad \forall T \geq 0, \tag{21}$$

где $V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t)$ — квадратичная форма от $\varphi(\sigma(t))$, $\dot{\sigma}(t)$, $\xi(t)$, $\ddot{\sigma}(t)$, $x(t)$, $\bar{x}(t)$, $\hat{x}(t)$ (см. (14) — (16)). Используя представления $\varphi(\sigma(t))$, $\dot{\sigma}(t)$, $\xi(t)$, $\ddot{\sigma}(t)$ в виде выражений (5), (7) — (9), функцию $V(t)$ можно записать как квадратичную форму от $x(t)$, $\bar{x}(t)$, $\hat{x}(t)$ (см. (10)).

Путем интегрирования по частям и с использованием формулы (6) получим

$$\int_0^T x^*(t)L_3\hat{x}(t)\,dt = b_3 - \int_0^T [x^*(t)A^*\tilde{I}^* + \bar{x}^*(t)B^*]L_3\bar{x}(t)\,dt,$$

где $b_3 = x^*(T)L_3\bar{x}(T) - x_0^*L_3\bar{x}(0)$. Тогда с учетом условия 2) леммы имеем

$$\int_0^T [x^*(t)L_2\bar{x}(t) + x^*(t)L_3\hat{x}(t) + \bar{x}^*(t)L_4\bar{x}(t)]\,dt = b_3 + \int_0^T [x^*(t)F^*S_1\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)L\,\bar{x}(t)]\,dt =$$

$$= b_3 + 0{,}5\,x^*(T)F^*S_1F\,x(T) - 0{,}5\,x_0^*F^*S_1F\,x_0 + \int_0^T \bar{x}^*(t)L\,\bar{x}(t)\,dt. \tag{22}$$

Так как в силу условия 3) леммы матрица L_5 симметричная, то можно найти

$$\int_0^T \bar{x}^*(t)L_5\hat{x}(t)\,dt = 0{,}5\,\bar{x}^*(T)L_5\bar{x}(T) - 0{,}5\,\bar{x}^*(0)L_5\bar{x}(0). \tag{23}$$

Из полученных соотношений (21) — (23) и ограниченности функций $x(t)$, $\dot{x}(t)$ (см. лемму 2) следует неравенство (13).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия лемм 1 — 3 и, кроме того,* $L_1 > 0$, $L \geq 0$. *Тогда система (1) — (4) глобально асимптотически устойчива.*

Доказательство. Поскольку по предположению $L_1 > 0$, $L \geq 0$ и, согласно условиям леммы 2, матрица $L_6 = \tau \geq 0$, то интеграл (13) является неубывающей и ограниченной сверху функцией от T. Значит, существует предел этой функции при $T \to \infty$ и справедлива оценка

$$\int_0^\infty [x^*(t)L_1x(t) + \bar{x}^*(t)L\,\bar{x}(t) + \hat{x}^*(t)L_6\hat{x}(t)]\,dt \leq c_1.$$

При этом $\int_0^\infty x^*(t)L_1x(t)\,dt < \infty$. Так как в силу леммы 2 функция $x(t)$ равномерно непрерывная, то, используя лемму Барбалата [22, с. 230], получаем $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда следует, что $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, поскольку по лемме 2 функция $\dot{x}(t)$ также равномерно непрерывна (см. [1, с. 352]). Тогда из формулы (5) вытекает, что $\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, а это в силу непрерывности функции $\varphi(\sigma)$ и изолированности ее нулей означает, что $\sigma(t) \to \sigma_*$ при $t \to \infty$, где $\varphi(\sigma_*) = 0$. Таким образом, показано, что любое решение $(x(t), \sigma(t))$ рассматриваемой системы при $t \to \infty$ стремится к некоторому состоянию равновесия $(0, \sigma_*) \in \Lambda$. Теорема доказана.

Вдоль решения рассматриваемой системы определим функции $u(t) = \dot{\sigma}(t) + X\,\varphi(\sigma(t))$, $U(t) = u^*(t)P_1u(t)$. В силу тождеств (5), (7) имеем $U(t) = x^*(t)(\tilde{C} - X\,F\,A)^*P_1(\tilde{C} - X\,F\,A)x(t) + {}$ $+2\,x^*(t)(\tilde{C} - X\,F\,A)^*P_1(R+X)\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)(R+X)^*P_1(R+X)\bar{x}(t)$. Тогда равенство (10) можно записать в виде $V(t) = U(t) + x^*(t)M_1\,x(t) + x^*(t)M_2\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)M_3\hat{x}(t) + \bar{x}^*(t)M_4\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)M_5\hat{x}(t) + {}$ $+\hat{x}^*(t)M_6\hat{x}(t)$, где $M_1 = L_1 - (\tilde{C} - X\,F\,A)^*P_1(\tilde{C} - X\,F\,A)$, $M_2 = L_2 - 2(\tilde{C} - X\,F\,A)^*P_1(R + X)$, $M_3 = L_3$, $M_4 = L_4 - (R + X)^*P_1(R + X)$, $M_5 = L_5$, $M_6 = L_6$.

Обозначим $M = M_4 - 0{,}5\,(B^*M_3 + M_3^*B)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и существуют матрицы $\tau \geq 0$, $\varepsilon > 0$, η, δ, H_1, H_2, H_3, H_4, S_2 такие, что: 1) $4\,\delta\,\varepsilon - \nu^2\eta^2 \geq 0$; 2) $M_2 - A^*\tilde{I}^*M_3 = F^*S_2$; 3) $M_5 = M_5^*$.*

Тогда найдется такое число $c_2 = \mathrm{const}$, что вдоль решения системы (1) — (4) для $\forall T \geq 0$ имеет место оценка

$$\int_0^T [U(t) + x^*(t)M_1x(t) + \bar{x}^*(t)M\,\bar{x}(t) + \hat{x}^*(t)M_6\hat{x}(t)]\,dt < c_2. \tag{24}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, 4 и, кроме того: 1) существует матрица X такая, что $\det X \neq 0$ и фазовая система вида $\dot{\theta} + X\,\varphi(\theta) = 0$ глобально асимптотически устойчива ($\theta \in E^m$); 2) существует матрица $P_1 > 0$ такая, что $M_1 \geq 0$, $M \geq 0$.*

Тогда система (1) — (4) глобально асимптотически устойчива.

Доказательство. Поскольку $P_1 > 0$, $M_1 \geq 0$, $M \geq 0$, $M_6 = \tau \geq 0$, то в пределе при $T \to \infty$ из (24) получаем (см. доказательство теоремы 1)

$$\int_0^\infty [U(t) + x^*(t)M_1x(t) + \bar{x}^*(t)M\,\bar{x}(t) + \hat{x}^*(t)M_6\hat{x}(t)]\,dt \leq c_2.$$

Отсюда следует, что $\int\limits_0^\infty U(t)\,dt = \int\limits_0^\infty u^*(t)P_1u(t)\,dt < \infty$. С учетом (5), (7) имеем $u(t) = {}$ $= (\tilde{C} - X\,F\,A)x(t) + (R + X)\bar{x}(t)$. По лемме 2 функции $x(t)$, $\bar{x}(t)$ равномерно непрерывны, следовательно, $u(t)$ также равномерно непрерывна. Тогда по лемме Барбалата $u(t) = {}$ $= \dot{\sigma}(t) + X\,\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. При $\det X \neq 0$ стационарное множество фазовой системы $\dot{\theta} + X\,\varphi(\theta) = 0$ определяется соотношением $\varphi(\theta) = 0$. Таким образом, $\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, поскольку система вида $\dot{\theta} + X\,\varphi(\theta) = 0$ предполагается глобально асимптотически устойчивой. При этом из уравнения (1) и гурвицевости матрицы A вытекает, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Введем функции $w(t) = \ddot{\sigma}(t) + Y\,\dot{\sigma}(t) + Z\,\varphi(\sigma(t))$, $W(t) = w^*(t)P_2w(t)$, определенные вдоль решения рассматриваемой системы. С учетом соотношений (5), (7), (9) имеем $W(t) = {}$ $= x^*(t)(\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)^*P_2(\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)x(t) + 2\,x^*(t)(\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)^*P_2(\tilde{C}\,B + {}$ $+Y\,R + Z)\bar{x}(t) + 2\,x^*(t)(\tilde{C}\tilde{I}A + Y\tilde{C} - ZFA)^*P_2R\,\hat{x}(t) + \bar{x}^*(t)(\tilde{C}B + Y\,R + Z)^*P_2(\tilde{C}B + Y\,R + Z)\bar{x}(t) + {}$ $+2\,\bar{x}^*(t)(\tilde{C}\,B + Y\,R + Z)^*P_2\,R\,\hat{x}(t) + \hat{x}^*(t)R^*P_2\,R\,\hat{x}(t)$. Тогда функцию (10) можно представить в виде $V(t) = W(t) + x^*(t)N_1\,x(t) + x^*(t)N_2\bar{x}(t) + x^*(t)N_3\hat{x}(t) + \bar{x}^*(t)N_4\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)N_5\hat{x}(t) + {}$ $+\hat{x}^*(t)N_6\hat{x}(t)$, где $N_1 = L_1 - (\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)^*P_2(\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)$, $N_2 = L_2 - {}$ $-2(\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)^*P_2(\tilde{C}\,B + Y\,R + Z)$, $N_3 = L_3 - 2(\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)^*P_2\,R$, $N_4 = {}$ $= L_4 - (\tilde{C}\,B + Y\,R + Z)^*P_2(\tilde{C}\,B + Y\,R + Z)$, $N_5 = L_5 - 2(\tilde{C}\,B + Y\,R + Z)^*P_2\,R$, $N_6 = \tau - R^*P_2\,R$.

Обозначим $N = N_4 - 0{,}5\,(B^*N_3 + N_3^*B)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и существуют матрицы* $\tau \ge 0$, $\varepsilon > 0$, η, δ, H_1, H_2, H_3, H_4, S_3 *такие, что:* 1) $4\delta\varepsilon - \nu^2\eta^2 \ge 0$; 2) $N_2 - A^*\tilde{I}^*N_3 = F^*S_3$; 3) $N_5 = N_5^*$.

Тогда найдется такое число $c_3 = \mathrm{const}$, *что вдоль решения системы (1) — (4) для* $\forall T \ge 0$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_0^T [W(t) + x^*(t)N_1x(t) + \bar{x}^*(t)N\,\bar{x}(t) + \hat{x}^*(t)N_6\hat{x}(t)]\,dt < c_3. \tag{25}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, 5 и, кроме того:* 1) $\varphi(\sigma) \in C^2(E^m)$; 2) *существуют матрицы* Y, Z *такие, что* $\det Z \ne 0$ *и фазовая система вида* $\ddot{\theta} + Y\dot{\theta} + Z\varphi(\theta) = 0$ *глобально асимптотически устойчива* ($\theta \in E^m$); 3) *существует матрица* $P_2 > 0$ *такая, что* $N_1 \ge 0$, $N \ge 0$, $N_6 \ge 0$.

Тогда система (1) — (4) глобально асимптотически устойчива.

Доказательство. Так как $P_2 > 0$, $N_1 \ge 0$, $N \ge 0$, $N_6 \ge 0$, то из (25) в пределе при $T \to \infty$ получим

$$\int\limits_0^\infty [W(t) + x^*(t)N_1x(t) + \bar{x}^*(t)N\,\bar{x}(t) + \hat{x}^*(t)N_6\hat{x}(t)]\,dt \le c_3,$$

следовательно, $\int\limits_0^\infty W(t)\,dt = \int\limits_0^\infty w^*(t)P_2w(t)\,dt < \infty$. С учетом (5), (7), (9), функцию $w(t)$ можно представить в виде $w(t) = (\tilde{C}\,\tilde{I}\,A + Y\,\tilde{C} - Z\,F\,A)x(t) + (\tilde{C}\,B + Y\,R + Z)\bar{x}(t) + R\hat{x}(t)$. Согласно утверждениям леммы 2, в случае $\varphi(\sigma) \in C^2(E^m)$ функции $x(t)$, $\bar{x}(t)$, $\hat{x}(t)$ являются равномерно непрерывными, так что $w(t)$ также равномерно непрерывна. При этом по лемме Барбалата $w(t) = \ddot{\sigma}(t) + Y\,\dot{\sigma}(t) + Z\,\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. В силу условия $\det Z \ne 0$ стационарное множество фазовой системы $\ddot{\theta} + Y\,\dot{\theta} + Z\,\varphi(\theta) = 0$ описывается соотношениями $\dot{\theta} = 0$, $\varphi(\theta) = 0$. Отсюда $\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, поскольку по условиям теоремы система вида $\ddot{\theta} + Y\,\dot{\theta} + Z\,\varphi(\theta) = 0$ глобально асимптотически устойчива. Тогда из уравнения (1) в учетом гурвицевости матрицы A имеем $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Замечания. 1. При исследовании конкретных фазовых систем матрицы, используемые в формулировках лемм и теорем, могут быть выбраны, например, путем решения оптимизационных задач, максимизирующих область глобальной асимптотической устойчивости в пространстве конструктивных параметров.

2. Для усиления полученных критериев глобальной асимптотической устойчивости рассматриваемой системы функцию (15) можно взять в виде $V_2(t) = y^*(t)H\,z(t)$, где H — симметричная $(4\,m \times 4\,m)$-матрица,

$$y^*(t) = (x^*(t)F^*, \bar{x}^*(t), \varphi^*(\sigma(t)), \dot{\sigma}^*(t)), \quad z^*(t) = (\bar{x}^*(t), \hat{x}^*(t), \xi^*(t), \ddot{\sigma}^*(t)).$$

3. В лемме 3, в частности, когда некоторое $\nu_k = 0$, можно взять $\delta_k = 0$, $\varepsilon_k = 0$, тогда соответствующее слагаемое $V_{1k}(t)$ в формуле (17) будет иметь вид $V_{1k}(t) = \eta_k F_k(\sigma_k(t))\dot{\sigma}_k(t)$, поэтому можно сразу воспользоваться оценкой (12), минуя преобразования (17).

4. Пример. Рассмотрим фазовую систему

$$\dot{x} = -a\,x - \varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = x, \tag{26}$$

где σ — угловая координата, x — угловая скорость, функция $\varphi(\sigma) \in C^1(E^1)$ обращается в нуль на периоде $[0, \Delta)$ в изолированных точках и имеет ограниченную производную $|d\varphi(\sigma)/d\sigma| \le \mu$, $\mu > 0$. В частности, дифференциальными уравнениями вида (26) описываются движения математического маятника и синхронного двигателя [5, с. 37 — 45]. Сравнивая (26) с исследуемой системой (1) — (4) видим, что в данном случае $A = -a$, $B = -1$, $C = 1$, $R = 0$.

Найдем достаточное условие глобальной асимптотической устойчивости фазовой системы (26), используя теорему 1. Для рассматриваемого примера можно взять $G = 1$, тогда $D = -1$, $F = -1$, $\tilde{I} = 0$, $\tilde{C} = 1$. В соответствии с обозначениями, принятыми в (10), получим $L_1 = -\delta a^2 + \eta a - \varepsilon - \tau \mu^2$, $L_2 = 2\delta a - \eta - H_1 - H_3 a^2 - H_4$, $L_3 = -H_3 a$, $L_4 = -\delta + \tau a^2 + H_3 a$, $L_5 = 2\tau a + H_2 + H_3$, $L_6 = \tau$. Из условий леммы 2 имеем, что $S_1 = -L_2$ и должно быть $4\delta\varepsilon \geq \nu^2\eta^2$. Возьмем $\delta = 0{,}5\, a^3/(a^4 + \mu^2)$, $\eta = 1$, $\varepsilon = 0{,}5\, \nu^2(a^4 + \mu^2)/a^3$, $\tau = 0{,}5\, a/(a^4 + \mu^2)$. При этом выполняются равенства $4\delta\varepsilon = \nu^2\eta^2$ и $L = -\delta + \tau a^2 = 0$. Условие $L_1 > 0$ записывается в виде неравенства $(1 - \nu^2)a^8 + (1 - 2\nu^2)\mu^2 a^4 - \nu^2\mu^4 > 0$, которое справедливо при $a^2 > |\nu|\, \mu/\sqrt{1 - \nu^2}$, $|\nu| < 1$.

Следует отметить, что полученный критерий не связан с конкретным видом нелинейности $\varphi(\sigma)$, он является достаточным условием глобальной асимптотической устойчивости всех фазовых систем вида (26) с любой периодической функцией $\varphi(\sigma) \in C^1(E^1)$, обращающейся в нуль на периоде в изолированных точках.

5. Заключение. Отличие полученных критериев глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем от ранее известных заключается в том, что они получены без использования частотных теорем Якубовича — Калмана [1]. При анализе устойчивости конкретных систем, как правило, именно проверка частотных условий, которые должны выполняться для всех значений параметра $\omega \in E^1$, оказывается достаточно трудной (особенно в случае $m > 1$).

Предлагаемые критерии получены на основе исследования свойств квадратичных форм относительно переменных x, $\bar{x}$, $\hat{x}$ вдоль решения рассматриваемой системы. Такое искусственное расширение размерности фазового пространства до $n + 2m$ позволяет использовать дополнительную информацию о динамических свойствах системы.

Если считать функцию $V(t)$ из (10) некоторым аналогом функции Ляпунова, то можно заметить, что на нее не накладываются ограничения в виде условий положительной определенности самой функции и отрицательной определенности ее производной вдоль решения системы. Например, оценка (21) может иметь место и в случае, когда функция $\dot{V}(t)$ знакопеременная.

Литература

1. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., 1959.
3. *Tricomi F.* // Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche e Matematiche. 1933. Vol. 2, N 2. P. 1 — 20.
4. *Фазовая* синхронизация / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М., 1975.
5. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., 1969.
6. *Amerio L.* // Annali di Matematica pura et applicata. 1949. Vol. 30, N 4. P. 75 — 90.
7. *Böhm C.* // Annali di Matematica pura et applicata. 1953. Vol. 35, N 4. P. 343 — 352.
8. *Hayes W. D.* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1953. Bd 4, N 5. S. 398 — 401.
9. *Ziefert G.* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1956. Bd 7, N 3. S. 238 — 247.
10. *Белюстина Л. Н., Быков В. В., Шалфеев В. Д., Кивелева К. Р.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 4. С. 561 — 567.
11. *Бакаев Ю. Н.* Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем. М., 1959.
12. *Бакаев Ю. Н., Гуж А. А.* // Радиотехника и электроника. 1965. Т. 10, № 1. С. 171 — 175.
13. *Шахгильдян В. В., Савватеев Ю. Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 7. С. 1035 — 1042.
14. *Корякин Ю. А., Леонов Г. А.* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1976. № 3. С. 41 — 46.
15. *Леонов Г. А.* // Сиб. мат. журн. 1975. № 5. С. 1031 — 1052.
16. *Леонов Г. А.* // Прикл. математика и механика. 1976. № 2. С. 238 — 244.
17. *Леонов Г. А.* // Сиб. мат. журн. 1976. № 1. С. 91 — 112.
18. *Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А. и др.* // Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 3 — 40.
19. *Айсагалиев С. А.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1475 — 1486.
20. *Айсагалиев С. А.* // Докл. НАН Республики Казахстан. 1992. № 2. С. 3 — 8.
21. *Айсагалиев С. А.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 5. С. 748 — 757.
22. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.

Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби

Поступила в редакцию 24 марта 1998 г.