



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко, К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 4, 91–118

<https://www.mathnet.ru/aa197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

26 апреля 2025 г., 23:56:00



© 1990 г.

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ. МЕТОДЫ И КОНСТРУКЦИИ

Ряд результатов, известных для обычных локальных полей, обобщается на многомерный случай. Приводится новое доказательство теоремы об описании абелевых расширений показателя p . С помощью явной формулы для обобщенного символа Гильберта дается конструктивное доказательство теоремы существования и осуществляется построение высшей локальной теории полей классов.

Напомним основные определения, связанные с локальными и глобальными полями (см. [1-3]). Дискретное нормирование (показатель) в поле F - это сюръективное отображение $v: F^* \rightarrow \mathbb{Z}$ со свойствами:

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$ для любых $x, y \in F^*$;
2. $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ для любых $x, y \in F^*$ (принято считать $v(0) = \infty$).

С каждым дискретным нормированием связана метрика в поле F , определяемая формулой $\rho(x, y) = \exp(-v(x-y))$. Далее, определено кольцо нормирования $\mathcal{O}_F = \{x \in F: v(x) \geq 0\}$. Это локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_F = \{x \in F: v(x) > 0\} = \pi_F \mathcal{O}_F$, где π_F - любой элемент с $v(\pi_F) = 1$ (так называемый простой или униформирующий элемент).

Поле вычетов $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$ обозначается через \bar{F} .

Примером поля с дискретным нормированием может служить поле формальных рядов Лорана $F((t))$ над некоторым полем F . Элементами $F((t))$ служат ряды вида $\sum_{i=c}^{\infty} a_i t^i$, где $c \in \mathbb{Z}$, $a_i \in F$. Показатель задается формулой $v(\sum_{i=c}^{\infty} a_i t^i) = \inf \{i: a_i \neq 0\}$. Имеем

$\mathcal{O}_{F((t))} = F[[t]]$, $\mathfrak{m}_{F((t))} = tF[[t]]$, $\bar{F}((t))$ изоморфно \bar{F} .

Локальное поле представляет собой поле с дискретным нормированием, полное относительно соответствующей метрики и имеющее конечное поле вычетов. Для этих полей существует простая классификация (см., например, [4]). А именно, каждое локальное поле характеристики 0 (числовое локальное поле) с полем вычетов характеристики p является конечным расширением поля p -адических чисел \mathbb{Q}_p . Локальные поля характеристики p (функциональные локальные поля) суть поля

$\mathbb{F}_{p^j}(\{(t)\})$, где \mathbb{F}_{p^j} - конечное поле из p^j элементов.

Среди полей с дискретным нормированием полные поля во многих отношениях ведут себя наиболее просто. С другой стороны, локальные поля возникают как пополнения глобальных полей - полей алгебраических чисел и полей рациональных функций над конечными полями. Благодаря этому теория локальных полей служит инструментом при решении "глобальных" задач.

Одной из вершин классической алгебраической теории чисел является локальная и глобальная теория полей классов, описывающая абелевы расширения поля в терминах самого поля или группы идеалов поля (см. [1,2,4,5]). Такое описание позволяет использовать локальные и глобальные поля в качестве "полигона" для опробования различных гипотез алгебраической геометрии и алгебраической K -теории, а также в качестве "строительного материала" для доказательства различных теорем, относящихся к гораздо более широкому классу полей (см., например, доказательство теоремы о норменном вычете Меркьюрева-Суслина [6]).

С середины 70-х годов появились работы А. Паршина и К. Като, в которых изучается еще один "хороший" класс полей - многомерные локальные поля. Полное относительно дискретного нормирования поле называется n -мерным локальным, если его поле вычетов является $(n-1)$ -мерным локальным, при этом обычные локальные поля считаются одномерными. Таким образом, с каждым n -мерным локальным полем связана цепочка многомерных полей: $F = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q$, где $k^{(i)}$ - поле вычетов $k^{(i+1)}$, \mathbb{F}_q - конечное поле из $q = p^f$ элементов.

Подъемом простых элементов полей $k^{(i)}$ в поле F получаем так называемую систему локальных параметров $(t_n, t_{n-1}, \dots, t_1)$. Любой элемент многомерного поля можно разложить в ряд по t_n, t_{n-1}, \dots, t_2 с коэффициентами из подъема элементов поля \mathbb{F}_q в F . Имеются три разных типа многомерных локальных полей (А. Паршин [7]): поля вида $\mathbb{F}_q(\{(t_1)\}) \dots (\{(t_n)\})$, поля вида $k(\{(t_2)\}) \dots (\{(t_n)\})$, где k - числовое локальное поле, и, наконец, поля, являющиеся конечными расширениями полей вида $k(\{(t_1)\}) \dots (\{(t_\ell)\}) (\{(t_{\ell+2}\}) \dots (\{(t_n)\})$, и которые одновременно содержатся в полях этого же вида.

Поясним использованное обозначение. Если k - дискретно нормированное поле с нормированием v , то через $k(\{(t)\})$ обозначается поле рядов $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i$ с коэффициентами из поля k , удовлетворяющими двум условиям $v(a_i) \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow -\infty$ и $v(a_i) \geq c$ для некоторого c и всех i . При этом дискретное нормирование в $k(\{(t)\})$ переносится из k , а именно $v\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i\right)$ определяется как $\min_i v(a_i)$. Поле вычетов $k(\{(t)\})$ служит $\bar{k}(\{(t)\})$, где \bar{k} - поле вычетов k .

Как известно, обычная локальная теория полей классов устанавливает соответствие между абелевыми расширениями локального поля k и подгруппами в группе k^* . Замечательным свойством многомерных локальных полей является существование

обобщения такого соответствия на абелевы расширения n -мерного локального поля F . Именно эти расширения соответствуют подгруппам в K -группе Милнора $K_n(F)$ (напомним, что $K_1(F) = F^*$, $K_n(F) = \underbrace{(F^* \otimes \dots \otimes F^*)}_{n \text{ раз}} / I^-$, где \mathbb{Z} -подмодуль I порожден элементами вида $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$, $x_i + x_j = 1$ для некоторых $i \neq j$). Заметим, что общая теория полей классов многомерных локальных полей является очень сложной и опирается на использование глубоких методов алгебраической K -теории (К.Като [8-10]). Вместе с тем для многомерных локальных полей ненулевой характеристики (полей первого типа) имеется достаточно простое изложение теории полей классов (А.Паршин [11]), основанное на существовании "хороших" символьных гомоморфизмов. Оказывается, что более точно абелевы расширения таких полей описываются подгруппами в топологической K -группе

$$K_n^{\text{top}}(F) = K_n(F) / \Lambda_n(F),$$

где $\Lambda_n(F)$ есть пересечение всех окрестностей нуля в некоторой топологии группы $K_n(F)$, связанной с топологией F (см. ниже, § 1 и 3).

Метод А.Паршина интересен еще и тем, что построение теории полей классов является естественным и наглядным. Подобная задача - создание более понятного изложения в обычной локальной теории полей классов - являлась целью многих математиков в последнее время. Современное общепринятое изложение этой теории [1, 2, 5] опирается на вычисление групп когомологий и носит во многом технический характер. В книге А.Вейля [12] развивается другой подход, основанный на использовании аналитических соображений и изучении ζ -функции. Ю.Нойкирх [13] выводит теорию полей классов элементарным теоретико-групповым способом из некоторых первоначальных предположений о строении младших когомологических групп. М.Хазевинкель [14] осуществляет построение теории вообще без использования когомологических групп.

В данной работе наряду с другими рассматривается вопрос о конструктивном построении теории полей классов для разнохарактеристических локальных полей (т.е. полей характеристики 0 с полем вычетов положительной характеристики) на примере двумерных локальных полей. Поля такого вида являются как бы обобщением числовых локальных полей на многомерный случай. Метод А.Паршина на эти поля не переносится, и для развития теории в этом случае используется, в частности, явная формула для символа Гильберта в многомерном поле [15]. Для обычного локального поля k , содержащего первообразный корень N -й степени из единицы, он определяется так: элементам α и β мультипликативной группы k^* поля ставится в соответствие корень N -й степени из единицы по формуле

$$(\alpha, \beta)_N = \left(\sqrt[N]{\beta} \right)^{\sigma_\alpha} \alpha / \sqrt[N]{\beta},$$

где σ_α - автоморфизм максимального абелева расширения k^{ab} над полем k , соответствующий элементу α в силу локальной теории полей классов. Задача нахождения явной формулы для символа Гильберта, т.е. такой формулы, которая позволяет вычислить $(\alpha, \beta)_N$ по разложению элементов α и β в ряд по простому

элементу π поля k , связана с решением девятой проблемы Гильберта о нахождении общего закона взаимности и разрабатывалась И.Р. Шафаревичем [16]. Решение этой задачи для числовых локальных полей с полем вычетов характеристики $p > 0$ и $N = p^n$ и ее обобщения с помощью формальных групп Любина-Тэйта получено С. Востоковым [17-19] в случае $p > 2$ и И. Фесенко [20, 21] в частном случае $p = 2$.

Отличительной особенностью этой формулы для символа Гильберта является ее переносимость на разнохарактеристические многомерные локальные поля. Эта формула была указана С. Востоковым [15] и может быть использована для решения многих вопросов в теории локальных полей.

В данной работе рассмотрены несколько методов и конструкций в многомерных локальных полях. В § 1 даются определение и изучение топологических свойств многомерных локальных полей. С помощью формальной группы Любина-Тэйта $G_0(X, Y)$ (см., например, [1]) над кольцом целых p -адических чисел \mathbb{Z}_p с эндоморфизмом $[p]_0(X) = pX + X^p$ можно определить структуру \mathbb{Z}_p -модуля $G_0(m)$ на максимальном идеале m n -мерного локального поля F , положив

$$\begin{aligned} x + {}_c y &= G_0(x, y), & x, y &\in m; \\ ax &= [a]_0 x, & a &\in \mathbb{Z}_p, \quad x \in m. \end{aligned}$$

В § 1 содержится описание арифметики \mathbb{Z}_p -модуля $G_0(m)$. § 2 посвящен изучению расширений Артина-Шрайера многомерных локальных полей.

Для обычных локальных полей известно описание абелевых расширений показателя p с помощью уравнений Артина-Шрайера. Здесь такое описание обобщается на многомерные локальные поля. Результаты, покрывающие приведенные здесь, иным способом были получены Маккензи и Уэйлсом [22].

Расширения Артина-Шрайера суть расширения $F(x)/F$, где x - корень уравнения $X^p - X = a$ с определенными ограничениями на элемент a , p - характеристика последнего поля вычетов n -мерного локального поля F . Такие расширения являются циклическими (предложение 2) и описывают почти все расширения показателя p поля F . Именно если F - поле нулевой характеристики и первообразный корень ζ_p содержится в F , то его максимальное абелево расширение показателя p получается присоединением p -х корней из простых параметров поля F и корней всех уравнений Артина-Шрайера (предложение 5). Еще одна конструкция, которая позволяет получить некоторый класс абелевых расширений многомерных локальных полей, описывается в [23].

В § 3 рассматривается вопрос о конструктивном построении теории полей классов для разнохарактеристических локальных полей (на примере двумерного локального поля). Для развития теории полей классов в этом случае используются, во-первых, существование гомоморфизма h_F из некоторой когомологической группы в группу \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , построенного К. Като [8], и, во-вторых, явная формула для символа Гильберта в многомерном локальном поле [15].

Гомоморфизм $h_F: \lim_{\rightarrow} H^3(F, \mu_m \otimes \mu_m) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ позволяет определить каноническое спаривание

$$K_2(F) \times X(F) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

где $X(F)$ - группа непрерывных характеров $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$, а описание топологии группы $K_2(F)$ (И.Фесенко [24]) показывает, что в каноническом спаривании группу $K_2(F)$ можно заменить на $K_2^{\text{top}}(F)$. С каноническим спариванием в силу теории двойственности связано отображение взаимности

$$\Psi_F : K_2^{\text{top}}(F) \longrightarrow \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F).$$

Структура группы $K_2^{\text{top}}(F)$ [24], явные формулы для ручного символа [25] и символа Гильберта позволяют в конечном счете доказать невырожденность справа канонического спаривания, откуда следует, что образ гомоморфизма взаимности всюду плотен в $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$. Из доказываемой также инъективности Ψ_F следует основная теорема теории полей классов - теорема существования: каждая открытая подгруппа конечного индекса в $K_2^{\text{top}}(F)$ является норменной, т.е. имеет вид $N_{L/F}K_2^{\text{top}}(L)$ для некоторого конечного расширения L/F ; теорема об изоморфизме: если L/F - абелево расширение, то отображение взаимности индуцирует изоморфизм групп

$$K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F}K_2^{\text{top}}(L) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(L/F);$$

теорема единственности: если L_1, L_2 - абелевы расширения поля F , то L_1 совпадает с L_2 тогда и только тогда, когда

$$N_{L_1/F}K_2^{\text{top}}(L_1) = N_{L_2/F}K_2^{\text{top}}(L_2).$$

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $F = k^{(n)}, k^{(n-1)}, \dots, k^{(1)}, k^{(0)} = \mathbb{F}_q$ - цепочка полей, причем $k^{(i)}$ при $1 \leq i \leq n$ является полным дискретно нормированным полем с полем вычетов $k^{(i-1)}$. Тогда F называется n -мерным локальным полем. Пусть t_n - простой элемент относительно дискретного нормирования в поле F ; t_{n-1} - единица в поле F , которая в поле $k^{(n-1)}$ является простым элементом относительно дискретного нормирования $k^{(n-1)}$; ...; t_1 - единица в $F, k^{(n-1)}, \dots, k^{(2)}$, которая при переходе к предпоследнему полю вычетов $k^{(1)}$ становится простым элементом относительно дискретного нормирования $k^{(1)}$. Набор t_n, \dots, t_1 называется системой локальных параметров поля F . Эта система определяет в F нормирование ранга n

$$\bar{v}_F = \bar{v} = (v_1, \dots, v_n) : F^* \longrightarrow \mathbb{Z}^n,$$

где

$$v_i(a) = v_{k^{(i)}} \left(a / \left(t_n^{v_n^{(a)}} \dots t_{i-1}^{v_{i-1}^{(a)}} \right) \right) \text{ для } 1 \leq i < n;$$

$$v_n(a) = v_{k^{(n)}}(a)$$

(группу \mathbb{Z}^n считаем лексикографически упорядоченной: $(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n)$, если для наибольшего индекса ℓ , для которого $i_\ell \neq j_\ell$, выполняется $i_\ell < j_\ell$).

Нормирование \bar{v}' ранга n , соответствующее другой системе локальных параметров, связано с нормированием \bar{v} формулой

$$\bar{v}'(a) = \bar{v}(a)H \text{ для всех } a \in F^*,$$

где $H \in GL_n(\mathbb{Z})$ - нижнетреугольная матрица с единицами по главной диагонали.

Совокупность элементов $a \in F^*$, удовлетворяющих условию $\bar{v}(a) \geq 0$, образует независимое от выбора системы локальных параметров кольцо нормирования $\mathfrak{O}_F = \mathfrak{O}$. Единственным максимальным идеалом этого кольца является

$$\mathfrak{m}_F = \mathfrak{m} = \{a \in \mathfrak{O}_F : \bar{v}(a) > 0\}.$$

Через $r_F(r_\ell, \dots, r_n) = r(r_\ell, \dots, r_n)$, где $1 \leq \ell \leq n$, обозначаем множество элементов a поля F , для которых $(v_\ell(a), \dots, v_n(a)) \geq (r_\ell, \dots, r_n)$. Если (r_ℓ, \dots, r_n) лексикографически больше набора из $n-\ell+1$ нулей, это множество является идеалом в \mathfrak{O}_F , и все идеалы \mathfrak{O}_F имеют такой вид. Подробное обсуждение нормирований в многомерных полях содержится в [26].

Если поле $k^{(0)}$ содержит $q = p^f$ элементов, то группа корней $(q-1)$ -й степени из единицы \mathcal{R} в поле F содержит $q-1$ элемент.

Структура n -мерного локального поля на F однозначно определяет подобную структуру на конечном расширении L/F . Из классификационной теоремы А. Паршина [25] следует, что n -мерное локальное поле F при $n \geq 2$ либо является полем $\mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_n))$, либо содержится в поле $k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{j-1}\}\}((t_{j+1})) \dots ((t_n))$, $1 \leq j \leq n$, где k - числовое локальное поле.

Определим топологию аддитивных групп этих полей, соответствующую нормированию ранга n . На одномерных полях вводится обычная топология дискретного нормирования. В поле $F((t))$ в качестве базы окрестностей нуля берутся подгруппы вида

$$U = \left\{ \sum a_j t^j, a_j \in U_j \right\},$$

где $(U_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ - система открытых подгрупп F такая, что $U_{j-1} \subseteq U_j$ для всех j , и $U_j = F$, начиная с некоторого j . В поле $L = F\{\{t\}\}$, где $F = k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{i-1}\}\}$, в качестве базы окрестностей нуля берутся подгруппы вида

$$U = \left\{ \sum a_j t_i^j, a_j \in U_j \right\},$$

где $(U_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ - система множеств поля L , являющихся подъемом в L открытых подгрупп \bar{U}_j поля вычетов $\bar{L} = \mathbb{F}_q((t_1)) \dots ((t_{i-1}))((t))$, $\bar{U}_{j-1} \subseteq \bar{U}_j$ для всех j , $\bar{U}_j = \bar{L}$, начиная с некоторого j (при подъеме элементы поля \mathbb{F}_q переходят в элементы множества $\mathcal{R} \cup \{0\}$). Эквивалентная топология получится, и если в качестве базы окрестностей нуля брать подгруппы $U = \left\{ \sum a_j t^j, a_j \in U_j \right\}$, где $(U_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ - открытые подгруппы в F такие, что $U_{j-1} \subseteq U_j$ для всех j , при некотором i_0 множество $r_F(i_0)$ лежит во всех U_j , любое $r_F(i)$ лежит во всех U_j , начиная с некоторого $j(i)$.

Наконец, в случае, когда n -мерное локальное поле F содержится в поле $k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$, на аддитивной группе F вводится индуцированная топология. Известно, что она не зависит от вложения и выбора локальных параметров [11]. При этом аддитивная группа поля F является полной отделимой группой в этой топологии и

умножение секвенциально непрерывно: если $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $x_n y_n \rightarrow xy$.

Через $Z_p[[X]]_0$ будем обозначать совокупность рядов из $Z_p[[X]]$ без свободного члена.

Л е м м а 1. Пусть F - многомерное локальное поле.

1. Если $f \in Z_p[[X]]_0$, $s \in \mathfrak{m}$, то ряд $f(s)$ сходится в \mathfrak{m} .

2. Если $f, g \in Z_p[[X]]_0$, $s \in \mathfrak{m}$, то $(f \circ g)(s) = f(g(s))$.

З а м е ч а н и е. Аналогичные утверждения верны и для рядов от нескольких переменных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$, $c_n \in Z_p$. Так как для $s \in \mathfrak{m}$ имеем $s^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то и $c_n s^n \rightarrow 0$. Ввиду полноты F ряд $f(s)$ сходится, а ввиду замкнутости \mathfrak{m} в F получаем, что $f(s) \in \mathfrak{m}$.

2. Если h - некоторый ряд, то через h_n обозначим многочлен, составленный из членов степени $\leq n$ ряда h . Имеем

$$A_1 = (f \circ g)(s) = \lim (f \circ g)_n(s);$$

$$\begin{aligned} A_2 = f(g(s)) &= \lim f_n(g(s)) = \lim f_n(\lim g_m(s)) = \\ &= \lim \lim f_n(g_m(s)) = \lim \lim (f_n \circ g_m)(s). \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из секвенциальной непрерывности умножения в F .

Пусть U - открытая подгруппа в F . Выберем N такое, что при $n \geq N$

$$s^n \in U, (f \circ g)_n(s) \in A_1 + U, \lim_{m \rightarrow \infty} (f_n \circ g_m)(s) \in A_2 + U.$$

Возьмем $M \geq N$ такое, что при $m \geq M$

$$(f_n \circ g_m)(s) \in A_2 + U.$$

Тогда из соотношения

$$(f_n \circ g_m)(s) - (f \circ g)_n(s) = \sum_{i=N}^{nm} d_i s^i, \text{ где } d_i \in Z_p,$$

следует, что

$$(f_n \circ g_m)(s) - (f \circ g)_n(s) \in U.$$

Отсюда $A_1 = A_2$. Лемма доказана.

Набор мультииндексов $I \subset Z^n$ будем называть допустимым, если для любых $i_1, \dots, i_{\ell+1}$ ($1 \leq \ell \leq n$) найдется целое число i такое, что из $r_n = i_n, \dots, r_{\ell+1} = i_{\ell+1}$, $\bar{r} \in I$, следует $r_{\ell} \geq i$.

Л е м м а 2. Пусть B - произвольная система представителей F_q в F . Любой элемент $s \in F$ можно однозначно представить в виде суммы ряда

$$s = \sum_{\bar{r} \in I} \alpha_{\bar{r}} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1}, \tag{1}$$

где I - допустимый набор, $\alpha_{\bar{r}} \in B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится индукцией по размерности поля F с использованием непрерывности отображения вычета $F = k^{(n)} \rightarrow \bar{F} = k^{(n-1)}$. Отметим,

что для любой окрестности нуля U и любого допустимого набора I найдется лишь конечное число $\bar{r} \in I$ таких, что $\alpha_{\bar{r}} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1} \notin U$. Поэтому любой ряд вида (1) сходится.

Введем обозначение $Z_+^n = \{\bar{r} \in Z^n : \bar{r} > 0\}$. Допустимые наборы обладают следующими свойствами.

1. Если $I \subset Z_+^n$ - допустимый набор, то любой элемент Z_+^n можно лишь конечным числом способов представить в виде конечной суммы элементов I .

2. Если $I \subset Z_+^n$ - допустимый набор, то

$$\hat{I} = \left\{ \sum_{j=1}^m \bar{r}_j, \bar{r}_j \in I, m \geq 1 \right\}$$

- также допустимый набор.

Через $G_0(X, Y)$ обозначим формальную группу Любина-Тэйта над Z_p с эндоморфизмом $[p]_0(X) = pX + X^p$, через $G_m(X, Y)$ - мультипликативную формальную группу Любина-Тэйта - $G_m(X, Y) = X + Y + XY$. Пусть $f_G(X) = X + \dots$ - изоморфизм формальных групп $G_m \xrightarrow{\sim} G_0$ (см., например, [1], [4]). Формальная группа G_0 индуцирует структуру Z_p -модуля $G_0(m)$ на максимальном идеале m :

$$\begin{aligned} \alpha +_{G_0} \beta &= G_0(\alpha, \beta), & \alpha, \beta \in m; \\ a\alpha &= [a]_0(\alpha), & a \in Z_p, \alpha \in m, \end{aligned}$$

где $[a]_0$ - эндоморфизм формальной группы, соответствующий элементу a .

Предположим, что $F_q = A_1 \otimes \dots \otimes A_d$ как аддитивная группа. Обозначим через $\mathcal{R}_i (1 \leq i \leq d)$ подмножество в \mathcal{R} , состоящее из тех элементов, вычеты которых лежат в A_i .

Предложение 1. *set можно представить в виде*

$$s = \sum_{\substack{\bar{r} \in I \\ 1 \leq i \leq d}} c_{\bar{r}, i} \theta_{\bar{r}, i} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1}, \tag{2}$$

где $I \subset Z_+^n$ - допустимый набор, $\theta_{\bar{r}, i} \in \mathcal{R}_i \cup \{0\}$, \sum_{G_0} означает суммирование с помощью формальной группы G_0 .

2. Любой ряд вида (2) сходится в m .

Доказательство. Проверим сначала второе утверждение. Для упрощения записи будем считать, что $d=1$. Пусть

$$\sum_{\bar{r} \in I} X_{\bar{r}} = \sum_{\substack{\bar{r}^{(1)} \\ u \geq 1}} c_{\bar{r}^{(1)}, \dots, \bar{r}^{(u)}} X_{\bar{r}^{(1)}} \dots X_{\bar{r}^{(u)}}$$

где $c_{\bar{r}^{(1)}, \dots, \bar{r}^{(u)}} \in Z_p$. Тогда

$$\sum_{\bar{r} \in I} \theta_{\bar{r}} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1} = \sum_{\substack{\bar{r}^{(1)} \\ u \geq 1}} c_{\bar{r}^{(1)}, \dots, \bar{r}^{(u)}} t_n^{r_n^{(1)} + \dots + r_n^{(u)}} \dots t_1^{r_1^{(1)} + \dots + r_1^{(u)}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\bar{r} \in \hat{I}} \left(\sum_{\bar{r}^{(1)} + \dots + \bar{r}^{(u)} = \bar{r}} c_{\bar{r}^{(1)}, \dots, \bar{r}^{(u)}} \theta_{\bar{r}^{(1)}} \dots \theta_{\bar{r}^{(u)}} \right) t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1} = \\
 &= \sum_{\bar{r} \in \hat{I}} c_{\bar{r}} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1},
 \end{aligned}$$

где $c_{\bar{r}} \in \mathbb{Z}_p[\mathcal{R}]$ (внутренняя сумма по свойству 1 допустимых наборов конечна).

Первое утверждение докажем индукцией по размерности поля. Пусть в поле $k^{(n-1)}$

$$\bar{s} = \sum_{\substack{\bar{r} \in I_0 \\ 1 \leq i \leq d}} c_0 \tilde{\theta}_{\bar{r}, i} t_{n-1}^{r_{n-1}} \dots t_1^{r_1},$$

где $I_0 \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ - допустимый набор, $\tilde{\theta}_{\bar{r}, i} \in \mathcal{R}_i \cup \{0\}$ либо $\tilde{\theta}_{\bar{r}, i} \in A_i$ в зависимости от характеристики поля $k^{(n-1)}$. Возьмем $\theta_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 0)} \in \mathcal{R}_i$ так, чтобы

$$\bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 0)} = \tilde{\theta}_{\bar{r}, i}.$$

Пусть

$$s_0 = \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_{n-1}) \in I_0 \\ 1 \leq i \leq d}} c_0 \theta_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 0)} t_{n-1}^{r_{n-1}} \dots t_1^{r_1},$$

тогда $I_0 \times \{0\}$ - допустимый набор в \mathbb{Z}^n , поэтому ряд s_0 сходится. В силу непрерывности отображения вычета имеем $\bar{s}_0 = \bar{s}$, поэтому $s = s_0 + c_0 s^{(1)}$, где $v_n(s^{(1)}) \geq 1$.

Применим лемму 2 к элементу $\overline{s^{(1)} t_n^{-1}} \in k^{(n-1)}$ и системе представителей

$B = \left\{ \sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_i \in \mathcal{R}_i \cup \{0\} \text{ или } A_i \right\}$. Получаем некоторое разложение (в обычную сумму)

$$\overline{s^{(1)} t_n^{-1}} = \sum_{\substack{\bar{r} \in I_1 \\ 1 \leq i \leq d}} \tilde{\theta}_{\bar{r}, i} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1}.$$

Возьмем $\theta_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 1), i} \in \mathcal{R}_i$ так, чтобы

$$\bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 1), i} = \tilde{\theta}_{(r_1, \dots, r_{n-1}), i}.$$

Пусть

$$s_1 = \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_{n-1}) \in I_1 \\ 1 \leq i \leq d}} c_0 \theta_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 1), i} t_n^{r_n} t_{n-1}^{r_{n-1}} \dots t_1^{r_1}.$$

Ряд s_1 сходится, поскольку $I_1 \times \{1\}$ - допустимый набор. Ясно, что

$$s_1 \equiv \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_{n-1}) \in I_1 \\ 1 \leq i \leq d}} \theta_{(r_1, \dots, r_{n-1}, 1), i} t_n^{r_{n-1}} \dots t_1^{r_1} \equiv s^{(1)} \pmod{p} \quad (2).$$

Поэтому $s = s_{G_0} + s_{G_0}^{(1)} = s_{G_0} + s_1 + s_{G_0}^{(2)}$, где $v_n(s^{(2)}) \geq 1$. Повторяя последний шаг, получаем сходящийся ряд

$$\sum_{\substack{\bar{r} \in I \\ 1 \leq i \leq d}} \theta_{\bar{r}, i} t_n^{\bar{r}_n} \dots t_1^{\bar{r}_1},$$

где $I = I_0 \times \{0\} \cup I_1 \times \{1\} \cup I_2 \times \{2\} \cup \dots$ - допустимый набор в \mathbb{Z}^n . Сумма этого ряда равна s . Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что для $s \in m$ $\bar{v}(s) = \min\{\bar{r} \in I : \theta_{\bar{r}, i} \neq 0 \text{ хотя бы при одном } 1 \leq i \leq d\}$. Вместо G_0 можно брать любую другую формальную группу Любина-Тэйта, в частности G_m .

Обозначим через $\bar{e}_F = \bar{v}(p)$ - абсолютный индекс ветвления поля F в случае, когда его характеристика равна нулю. Тогда если $s \in G_0(m)$ и $\bar{v}(s) > \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, то легко проверяется, что $s \in [p]_0 G_0(m)$.

Л е м м а 3. Для каждого набора $\bar{r} > 0$, $1 \leq i \leq d$ выделим подмножество $\mathcal{R}_1^{\bar{r}} \subset \mathcal{R}_1$ так, чтобы

$$\theta \in \mathcal{R}_1^{\bar{r}} \Leftrightarrow \theta \in \mathcal{R}_1^{p\bar{r}}.$$

Пусть M - подмножество в $G_0(m)$, состоящее из рядов вида (2) таких, что $\theta_{\bar{r}, i} \in \mathcal{R}_1^{\bar{r}} \cup \{0\}$ для всех $\bar{r} > 0$, $1 \leq i \leq d$. Предположим, что M - \mathbb{Z}_p -подмодуль в $G_0(m)$ и $G_0(m) = M \oplus M'$. Тогда для любого $s \in M$ найдется $s' \in M$ такой, что $s \equiv s' \pmod{[p]_0 M}$ и либо $s' = 0$, либо $\bar{v}(s')$ не делится на p и $\bar{v}(s') < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, либо $\bar{v}(s') = \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $\bar{v}(s') > \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$ имеем

$$s' \in [p]_0 G_0(m) = [p]_0 M \oplus [p]_0 M',$$

следовательно, $s' \in [p]_0 M$.

$$\text{Пусть } \bar{v}(s) = \bar{r}^{(0)} < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F,$$

$$s = \sum_{\substack{\bar{r} \geq \bar{r}^{(0)} \\ 1 \leq i \leq d}} \theta_{\bar{r}, i} t_n^{\bar{r}_n} \dots t_1^{\bar{r}_1}, \quad \theta_{\bar{r}, i} \in \mathcal{R}_1^{\bar{r}}.$$

Из $\theta_{\bar{r}, i} \in \mathcal{R}_1^{p\bar{r}}$ следует $\theta_{\bar{r}, i}^{p^{-1}} \in \mathcal{R}_1^{\bar{r}}$. Положим

$$s_0 = \sum_{G_0} \theta_{\bar{r}, i}^{p^{-1}} t_n^{\bar{r}_n} \dots t_1^{\bar{r}_1} \in M,$$

где суммирование происходит по всем наборам \bar{r} , удовлетворяющим условию $\frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} \leq \bar{r} < \frac{1}{p} (\bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F)$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 [p]_0(s_0) &= \sum c_0 \theta_{\bar{r},1} t_n^{pr_n} \dots t_1^{pr_1} + p \theta_{\bar{r},1}^{p-1} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1} \equiv \\
 &\equiv \sum c_0 \theta_{\bar{r},1} t_n^{pr_n} \dots t_1^{pr_1} \pmod{p \left(\frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F \right)}.
 \end{aligned}$$

Положим $s_1 = s_0 - c_0 [p]_0(s_0)$, $\bar{r}^{(1)} = \bar{v}(s_1)$. Имеем

$$s_1 \equiv \sum c_0 \theta_{\bar{r},1} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1} \pmod{p \left(\frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F \right)},$$

где суммирование проходит по всем наборам \bar{r} , удовлетворяющим условию $\frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} \leq \bar{r} < \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F \right)$, не делящимся на p .

Предположим, что s_1 не является искомым s' , т.е. $\bar{r}^{(1)} < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$ и $\bar{r}^{(1)}$ делится на p . Тогда из сравнения для s_1 видно, что $s_1 \equiv 0 \pmod{p \left(\frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F \right)}$, т.е. $\bar{r}^{(1)} \geq \frac{1}{p} \bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F$. Применяя данное рассуждение к s_1 , находим s_2 , сравнимое с s_1 по $\text{mod}[p]_0 M$ такое, что либо s_2 можно взять в качестве s' , либо $\bar{r}^{(2)} \geq \bar{v}(s_2) \geq \frac{1}{p} \bar{r}^{(1)} + \bar{e}_F$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность элементов $s_1, s_2, s_3, \dots \in M$. Если ни один из них не подходит в качестве s' , то при каждом j имеем $\bar{r}^{(j)} = \bar{v}(s_j) \geq \frac{1}{p} \bar{r}^{(j-1)} + \bar{e}_F$ и $\bar{r}^{(j)} < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$.

Эти неравенства противоречат друг другу. В самом деле, если $r_n^{(j-1)} < \frac{p}{p-1} e_{n,F}$, то $r_n^{(j)} > r_n^{(j-1)}$, значит, при некотором j_1 для $j \geq j_1$ $r_n^{(j)} = \frac{p}{p-1} e_{n,F}$. Аналогично при $j \geq j_2$ $r_{n-1}^{(j)} = \frac{p}{p-1} e_{n-1,F}$ и т.д.

§ 2. Расширения Артина-Шрайера

Уравнением Артина-Шрайера будем называть уравнение вида $X^p - X = a$, в котором элемент a принадлежит n -мерному локальному полю F и в случае нулевой характеристики поля F удовлетворяет условию

$$-\frac{p}{p-1} \bar{e}_F < \bar{v}(a) \leq 0,$$

причем если $\bar{v}(a) < 0$, то $\bar{v}(a)$ не делится на p .

Заметим, что когда $\bar{v}_F(a) > 0$, то уравнение $X^p - X = a$ разрешимо в поле F , так как его корнем является значение ряда из кольца $\mathbb{Z}_p[[X]]_0$, обратного в смысле композиции к многочлену $-X + X^p$, в точке a .

Пусть $\text{char } F = 0$. Поле F назовем регулярным, если оно не содержит нетривиальных корней p -й степени из единицы. Пусть $F_1 = F(\xi)$, где ξ - первообразный корень степени p из 1. Тогда $\text{Gal}(F_1/F)$ - циклическая группа порядка m , делящего $p-1$. Обозначим через σ образующий элемент этой группы, через $g \in \mathbb{Z}_p$ - такой первообразный корень степени m из единицы в \mathbb{R} , для которого $\xi^\sigma = \xi^g$. Максимальный идеал поля F_1 обозначим через m_1 . Для элементов $s_1, s_2 \in m_1$ будем писать

$$s_1 \equiv s_2 \pmod{[p]_0 G_0(m_1)},$$

если $s_1 = s_2 +_{G_0} [p]_0(s)$ при некотором $s \in m_1$.

Л е м м а 4. 1. Пусть k - произвольное регулярное поле нулевой характеристики, $k_1 = k(\xi)$, $l_1 = k_1(\sqrt[p]{a})$ при некотором $a \in k_1^*$. Расширение l_1/k является абелевым расширением тогда и только тогда, когда $a^\sigma \equiv a^g \pmod{(k_1^*)^p}$.

2. Пусть $L_1 = F_1([p]_0^{-1}(a))$ при некотором $a \in m_1$. Расширение L_1/F является абелевым расширением тогда и только тогда, когда $a^\sigma \equiv [g]_0(a) \pmod{[p]_0 G_0(m_1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $w = f_G(\xi - 1)$, где f_G - ряд из $\mathbb{Z}_p[[X]]$, задающий изоморфизм формальных групп G_m и G_0 . Тогда

$$\begin{aligned} w^p + pw &= [p]_0(w) = [p]_0(f_G(\xi - 1)) = ([p]_0 \circ f_G)(\xi - 1) = \\ &= (f_G \circ [p]_m)(\xi - 1) = f_G(\xi^p - 1) = f_G(0) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, корень изогении $[p]_0$ содержится в поле F_1 .

Первая часть леммы представляет собой легкое упражнение из теории Галуа полей, вторая часть следует из первой.

С л е д с т в и е. Если $F_1(\sqrt[p]{a})/F_1$ - абелево расширение, то $a \in (1 + m_1)F_1^{*p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a = t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1} \theta u$, где $\theta \in \mathcal{R}_{F_1}$, $u \in 1 + m_1$. Тогда по лемме 4 имеем $r_i \equiv g r_i \pmod{p}$, откуда r_i делятся на p .

П р е д л о ж е н и е 2. Если x - корень уравнения Артина-Шрайера, то расширение $F(x)/F$ - циклическое.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется рассмотреть только случай $\text{char} F = 0$. Пусть поле F - иррегулярное, т.е. $\xi \in F$. Тогда, как отмечено в доказательстве леммы 4, корень w изогении $[p]_0$ содержится в F . Из равенства $x^p - x = a$ следует, что $y^p + py = w^p a$, где $y = wx$, причем из условий на a заключаем, что $w^p a \in m$. Наконец,

$$f_G^{-1}(w^p a) = f_G^{-1}(y^p + py) = f_G^{-1}([p]_0(y)) = [p]_m^{-1}(f_G^{-1}(y)),$$

т.е.

$$(1 + (f_G^{-1}(y))^p) = 1 + f_G^{-1}(w^p a).$$

Таким образом, поле $F(x) = F(1 + f_G^{-1}(y))$ является циклическим расширением поля F в силу теории Куммера.

Пусть теперь поле F - регулярное. Положим $L = F(x)$ и будем считать, что $L \neq F$. Имеем из равенства

$$[p]_0(gX) = g[p]_0(X),$$

соотношение $[g]_0(X) = gX$. Поэтому

$$(w^p a)^\sigma = (-pwa)^\sigma = -pw^\sigma a = -pa[g]_0(w) = -pagw = [g]_0(w^p a).$$

Из второй части леммы 4 теперь следует, что $F_1 L/F$ является абелевым расширением, поэтому L/F - циклическое расширение. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. Если $\text{char} F = 0$ и поле F иррегулярно, то его максимальное абелево расширение показателя p получается присоединением $\sqrt[p]{t_n}, \dots, \sqrt[p]{t_1}$ и корней всех уравнений Артина-Шрайера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как группа \mathcal{R} является p -делимой, то по

теории Куммера максимальное абелево расширение показателя p получается присоединением $\sqrt[p]{t_n}, \dots, \sqrt[p]{t_1}$ и корневой степени p из главных единиц: $\sqrt[p]{1+s}, s \in \mathfrak{m}$.

Присоединение $\sqrt[p]{1+s}$ равносильно присоединению корня уравнения $[p]_0(X) = f_G(s)$. Лемма 3, примененная к \mathbb{Z}_p -модулю $M = G_0(\mathfrak{m})$, позволяет оставить только такие уравнения, для которых $\bar{v}(s) = \bar{v}(f_G(s))$ не делится на p , причем $\bar{v}(s) < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, а также $\bar{v}(s) = \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$. Однако присоединение корня уравнения $[p]_0(X) = f_G(s)$ эквивалентно присоединению корня уравнения Артина-Шрайера с $a = f_G(s)/w^p$, что и доказывает предложение.

Для регулярного поля F построим разложение \mathbb{Z}_p -модуля $G_0(\mathfrak{m}_1)$ в прямую сумму собственных подмодулей относительно действия оператора σ . Для этого понадобится следующая лемма о конечных полях.

Л е м м а 5. 1. Пусть σ - образующая группы Галуа расширения конечных полей $\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q$, где f делит $q-1$. Тогда \mathbb{F}_{q^f} раскладывается относительно действия σ в прямую сумму собственных \mathbb{F}_q -подпространств A_1, \dots, A_f с собственными числами $\eta, \eta^2, \dots, \eta^f = 1$, где η - первообразный корень степени f из единицы.

2. Предположим, что число e делит $\frac{q-1}{f}$. Тогда для любого $\tilde{\theta} \in \mathbb{F}_{q^f}$ найдется элемент $\theta \in \mathbb{F}_{q^f}$ такой, что $\tilde{\theta}\theta^e$ лежит в одном из A_1 .

П р е д л о ж е н и е 4. Имеет место разложение \mathbb{Z}_p -модуля

$$G_0(\mathfrak{m}_1) \approx M_0 \oplus \dots \oplus M_{m-1}.$$

Если $s \in M_j$, то $s^\sigma = [g^j]_0(s)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $fe_{(1)} \dots e_{(i)}$ - степень расширения $k_1^{(i)}/k^{(i)}$, f - степень расширения $k_1^{(0)}/k^{(0)}$, где $F_1 = (k_1^{(n)}, k_1^{(n-1)}, \dots, k_1^{(0)})$, тогда $m = fe_1 \dots e_n$. Пусть t_n, \dots, t_1 - локальные параметры поля F . Построим такую систему локальных параметров T_n, \dots, T_1 в F_1 , что

$$(T_1^\sigma/T_1)^{fe_{(1)} \dots e_{(1)}} = 1 \quad \text{для всех } 1 \leq l \leq n.$$

В самом деле, пусть T_1, \dots, T_{l-1} уже построены. Выберем в поле F_1 произвольный элемент \tilde{T}_1 с

$$v_{n, F_1}(\tilde{T}_1) = \dots = v_{l+1, F_1}(\tilde{T}_1) = 0, \quad v_{l, F_1}(\tilde{T}_1) = 1.$$

Тогда имеем

$$\tilde{T}_l^{e_{(l)}} = t_l T_{l-1}^{r_{l-1}} \dots T_1^{r_1} \tilde{\theta} u,$$

где $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}_{F_1}$, и $u \in 1 + \mathfrak{m}_1$. Ввиду $(q-1)$ -делимости группы $1 + \mathfrak{m}_1$ можно считать, что $u=1$.

Далее, по лемме 5 можно подобрать $\theta \in \mathbb{R}_{F_1}$ так, что

$$(\tilde{\theta}\theta^{e_{(l)}})^\sigma = \eta^i \tilde{\theta}\theta^{e_{(l)}}, \quad \text{где } \eta^f = 1.$$

Тогда $T_l = \tilde{T}_l \theta$ обладает нужным свойством. По первой части леммы 5 имеем

$$k_1^{(0)} = A_1 \otimes \dots \otimes A_f.$$

Обозначим через $\mathcal{R}_{F_1,1}$ соответствующие подмножества \mathcal{R}_{F_1} . Тогда для любых r_1, \dots, r_n , $\theta \in \mathcal{R}_{F_1,1}$, $1 \leq i \leq f$

$$(\theta T_1^{r_1} \dots T_n^{r_n})^\sigma = g^j \theta T_1^{r_1} \dots T_n^{r_n} = [g^j]_0 (\theta T_1^{r_1} \dots T_n^{r_n}).$$

Возьмем теперь любой элемент $s \in G_0(m_1)$. Согласно предложению 1,

$$s = \sum_{\substack{\bar{r} \in I \\ 1 \leq i \leq f}} G_0 \theta_{\bar{r},1} T_n^{r_n} \dots T_1^{r_1}, \text{ где } \theta_{\bar{r},1} \in \mathcal{R}_{F_1,1}.$$

Для каждого \bar{r} и i имеем

$$(\theta_{\bar{r},1} T_n^{r_n} \dots T_1^{r_1})^\sigma = [g^j]_0 (\theta_{\bar{r},1} T_n^{r_n} \dots T_1^{r_1}).$$

Группируя слагаемые с одинаковыми j , получаем

$$s = s_0 +_{G_0} \dots +_{G_0} s_{m-1}, \text{ где } s_j^\sigma = [g^j](s_j).$$

Это дает разложение $G_0(m_1) \approx M_0 \otimes \dots \otimes M_{m-1}$.

С л е д с т в и е. Если $s \in G_0(m_1)$ — такой элемент, что $s^\sigma \equiv [g]_0(s) \cdot \text{mod } [p]_0 G_0(m_1)$, то существует элемент $b \in G_0(m_1)$ такой, что $s \equiv b \text{ mod } [p]_0 G_0(m_1)$, $b = [g]_0(b)$, причем либо $b=0$, либо $\bar{v}(b) < \frac{p}{p-1} \bar{e}_{F_1}$ и $\bar{v}(b)$ не делится на p , либо $\bar{v}(b) = \frac{p}{p-1} \bar{e}_{F_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = s_0 +_{G_0} s_1 +_{G_0} \dots +_{G_0} s_{m-1}$, $s_i \in M_i$. Из сравнения $s^\sigma \equiv [g]_0(s) \text{ mod } [p]_0 G_0(m_1)$ следуют $s_i \in [p]_0 G_0(m_1)$, если $i \neq 1$, и $s_1^\sigma = [g]_0(s_1)$. Из леммы 3, примененной к подмодулю M_1 , находим элемент $s' = b$. Следствие доказано.

П р е д л о ж е н и е 5. Пусть F — n -мерное локальное поле произвольной характеристики, причем в случае $\text{char } F = 0$ поле F — регулярное. Тогда любое циклическое расширение L/F степени p задается уравнением Артина-Шрайера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим поле F с $\text{char } F = 0$. Пусть $L_1 = LF_1$. Тогда L_1/F_1 — циклическое расширение степени p . Поскольку L_1/F — абелево, то по следствию из леммы 4 имеем $L_1 = F_1(\sqrt[p]{a})$, где $a \in 1 + m_1$. Отсюда $L_1 = F_1([p]_0^{-1}(s))$, где $s = =f_G(a-1) \in m_1$. Из леммы 4 следует, что $s^\sigma \equiv [g]_0(s) \text{ mod } [p]_0 G_0(m_1)$. Тогда по следствию из предложения 4 имеем $L_1 = F_1([p]_0^{-1}(b))$, $b^\sigma = [g]_0(b)$, причем либо $\bar{v}(b) < \frac{p}{p-1} \bar{e}_{F_1}$ и $\bar{v}(b)$ не делится на p , либо $\bar{v}(b) = \frac{p}{p-1} \bar{e}_{F_1}$.

Пусть $x^p + px = b$. Разделив обе части на w^p , получим $y^p - y = \alpha$, где $u = x/w$, $\alpha = b/w^p$.

Имеем

§ 3. Теория полей классов двумерного разнохарактеристического локального поля

Пусть F - двумерное разнохарактеристическое локальное поле, т.е. поле характеристики 0 с полем вычетов \bar{F} характеристики $p > 0$. Топология аддитивной группы здесь имеет более простое описание. Если $F = k\{\{t\}\}$, то окрестности нуля в кольце целых \mathfrak{O} относительно нормирования \mathfrak{O} ранга 2 - это подгруппы вида $t^i \mathfrak{O}_k[[t]] + \pi^j \mathfrak{O}_k\{\{t\}\}$, где \mathfrak{O}_k - кольцо целых поля k , π - простой элемент поля k . На мультипликативной группе F^* вводится топология произведения дискретных на $\{t_2\} \times \{t_1\} \times \mathcal{R}$ и индуцированной с F топологии на $U = 1 + \mathfrak{m}$.

Пусть $K_m(F)$ - m -я группа Милнора поля F . Возьмем на группе $K_m(F)$ сильнейшую топологию, в которой, если $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $x_n + y_n \rightarrow x + y$, $-x_n \rightarrow -x$ в $K_m(F)$, и отображение

$$F^{*m} \longrightarrow K_m(F)$$

секвенциально непрерывно по каждому аргументу. Пусть $\Lambda_m(F)$ - подгруппа в $K_m(F)$, являющаяся пересечением всех окрестностей 0 в $K_m(F)$, тогда топологическая K -группа

$$K_m^{\text{top}}(F) = K_m(F) / \Lambda_m(F)$$

(см. [11]).

В работе [24] показано, что для двумерного разнохарактеристического локального поля

$$\Lambda_2(F) = \bigcap_{m \geq 1} mK_2(F), \quad (3)$$

а фактор-группа $K_2^{\text{top}}(F) / pK_2^{\text{top}}(F)$ имеет следующий топологический базис: $\{t_1, t_2\}$; $\{1 - \theta t_2^2 t_1^i, t_1\}$, i_2 взаимно просто с p , $(1, 0) \leq (i_1, i_2) < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$; $\{1 - \theta t_2^2 t_1^i, t_2\}$, i_1 взаимно просто с p , i_2 делится на p , $(1, 0) \leq (i_1, i_2) < \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, θ пробегает в $\mathcal{R} \cup \{0\}$ элементы, вычеты которых в \mathbb{F}_q образуют базис над \mathbb{F}_p . Если F - иррегулярное поле, то в топологический базис еще включаются элементы $(\bar{e}_F = (e_1, e_2))$

$$\left\{1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}}, t_1\right\} \quad \text{и} \quad \left\{1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}}, t_2\right\},$$

где $\eta \in \mathcal{R}$ такой, что $1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}} \notin F^{*p}$.

Обозначим через U_1 подгруппу в F^* элементов вида $1+x$, где $xt_2^{-1} \in \mathfrak{p}(0)$, и положим $U_0 = U_F = \{x \in F^* : x \in \mathfrak{p}(0) \text{ и } x^{-1} \in \mathfrak{p}(0)\}$. Подгруппу в $K_2(F)$, порожденную элементами вида $\{u, v\}$, где $u \in U_1$, $v \in F^*$, обозначим через $U_1 K_2(F)$.

1°. Свойства норменного отображения для K -групп двумерного разнохарактеристического локального поля. Из (3) следует, что отображение нормы $N_{L/F} : K_2(L) \rightarrow K_2(F)$ (L/F - конечное расширение полей) переносится на топологические K -группы $N_{L/F} : K_2^{\text{top}}(L) \rightarrow K_2^{\text{top}}(F)$.

Л е м м а 6. Пусть L/F - конечное расширение двумерных разно-

характеристических локальных полей, тогда отображение $N_{L/F}: K_2^{\text{top}}(L) \rightarrow K_2^{\text{top}}(F)$ является непрерывным.

Доказательство. Поле F^{sep} является композитом линейно разделенных расширений $F^{\text{sep}}(\text{не } p)/F$ и $F^{\text{sep}}(p)/F$ - максимального сепарабельного расширения степени взаимно простой с p и p -расширения, а расширение $F^{\text{sep}}(\text{не } p)$ является композитом расширений $F(\sqrt[m]{t_2})$, $F(\sqrt[m]{t_1})$, $F(\sqrt[q]{\theta})$, где m взаимно просто с p , $\theta \in R$. Поэтому каждое расширение Галуа поля F разрешимо [11]. Ввиду непрерывности отображения $j_*: K_2^{\text{top}}(L_1) \rightarrow K_2^{\text{top}}(L_2)$ для расширения полей L_2/L_1 достаточно проверить утверждение леммы для простого циклического расширения L/F степени h . Если h взаимно просто с p , то можно так выбрать параметры T_2, T_1 в L и t_2, t_1 в F , что либо $T_1=t_1$, $T_2^h=t_2$, либо $T_2=t_2$, $T_1^h=t_1$, либо $T_2=t_2$, $T_1=t_1$. Тогда, например, в первом случае имеем

$$hN_{L/F}\{1-\theta T_2^{i_2} T_1^{i_1}, T_2\} = \{N_{L/F}(1-\theta T_2^{i_2} T_1^{i_1}), t_2\},$$

$$N_{L/F}\{1-\theta T_2^{i_2} T_1^{i_1}, T_1\} = \{N_{L/F}(1-\theta T_2^{i_2} T_1^{i_1}), t_1\}.$$

Ввиду непрерывности нормы для полей получаем требуемое. Если же $h=p$, то тогда либо $T_1=t_1$, $T_2^p=t_2(1+a)$, где $a \in L$ и $aT_2^{-1} \in \mathcal{O}_L$, либо $T_2=t_2$, $T_1^p=t_1(1+b)$, $b \in L$ и $bT_2^{-1} \in \mathcal{O}_L$, либо $T_2=t_2$ и $T_1=t_1$. В первом случае, например, имеем

$$N_{L/F}\{1-\theta T_2^{i_2} T_1^{i_1}, T_2\} = -i_2^{-1}\{N_{L/F}(1-\theta T_2^{i_2} T_1^{i_1}), \theta T_1^{i_1}\},$$

если i_2 взаимно просто с p и

$$\begin{aligned} N_{L/F}\{1-\theta T_2^{p i_2} T_1^{i_1}, T_2\} &= \{N_{L/F}(1-\theta t_2^{i_2} (1+a)^{i_2} T_1^{i_1}), T_2\} = \\ &= \{1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, N_{L/F} T_2\} + N_{L/F}\{1-\theta T_2^{p i_2+1} x T_1^{i_1}, T_2\}, \end{aligned}$$

где $x \in \mathcal{O}_L$. Раскладывая элемент $1-\theta T_2^{p i_2+1} x T_1^{i_1}$ в произведение элементов вида $1-\theta T_2^{j_2} T_1^{j_1}$ и проделывая вновь указанные преобразования, и здесь делаем вывод о непрерывности отображения нормы.

Л е м м а 7. Пусть L/F - конечное расширение Галуа, тогда индекс норменной подгруппы $N_{L/F}: K_2^{\text{top}}(L)$ в $K_2^{\text{top}}(F)$ не превосходит степени расширения L/F .

Доказательство. Ввиду разрешимости группы $\text{Gal}(L/F)$ достаточно доказать утверждение леммы для циклического расширения L/F простой степени h . Основная идея следующих рассуждений принадлежит К. Като [23].

Используем коммутативную диаграмму (см. [9], § 3):

$$\begin{array}{ccc} K_2^{\text{top}}(L) & \xrightarrow{\partial \pi_L} & K_2^{\text{top}}(\bar{L}) \otimes \bar{L}^* \\ \downarrow N & & \downarrow N_{F,L} \\ K_2^{\text{top}}(F) & \xrightarrow{\partial \pi_F} & K_2^{\text{top}}(\bar{F}) \otimes \bar{F}^* \end{array}$$

где $\partial_{\pi_F} (\{x_1, x_2\} + \{y, \pi_F\}) = (\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}, \bar{y})$, $x_i, y \in U_F$,

$$N_{F,L}(x, y) = (e_{L/F}Nx - N\{y, \bar{u}\}, Ny),$$

где $\pi_F = u\pi_L^{e_{L/F}}$, π_F и π_L - простые элементы F и L , $e_{L/F} = e_{(2), L/F}$.

Рассмотрим несколько случаев.

а) Расширение L/F π -неразветвлено, тогда из диаграммы (4)

$$K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L) \xrightarrow{\sim} K_2^{\text{top}}(\bar{F})/N_{\bar{L}/\bar{F}} K_2^{\text{top}}(\bar{L}) \otimes F^*/N_{\bar{L}/\bar{F}} L^*,$$

так как $e_{L/F} = 1$, $u = 1$, $U_1 K_2^{\text{top}}(F) = N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$.

Но отображение нормы для K_2 -групп одномерных локальных полей сюръективно ([27], приложение 1), и порядок группы $F^*/N_{\bar{L}/\bar{F}} L^*$ в силу теории полей классов равен h .

б) Расширение L/F вполне разветвлено и $h \neq p$, тогда $e_{L/F} = h$ и можно считать $u = 1$, поэтому из диаграммы (4)

$$K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L) \xrightarrow{\sim} K_2^{\text{top}}(\bar{F})/h K_2^{\text{top}}(\bar{F}),$$

но по теореме К. Мура $K_2(\bar{F}) \approx \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes mK_2(\bar{F})$, где m - число корней из единицы в поле \bar{F} , $mK_2(\bar{F})$ - делимая подгруппа ([27], приложение 1), поэтому порядок группы $K_2^{\text{top}}(\bar{F})/hK_2^{\text{top}}(\bar{F})$ не превосходит h .

в) Расширение L/F вполне разветвлено и $h = p$. Из теоремы К. Мура следует, что $K_2^{\text{top}}(\bar{F})$ - p -делимая группа, поэтому из диаграммы (4) имеем

$$K_2^{\text{top}}(F) \subset U_1 K_2^{\text{top}}(F) + N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L).$$

Кроме того, очевидно $pK_2^{\text{top}}(F) \subset N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$. Положим $t_2 = \pi_F = N_{L/F} \pi_L$, тогда $\{1 + \theta t_2^i t_1^j, t_2\} \in N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$ и из базиса группы $K_2^{\text{top}}(F)/pK_2^{\text{top}}(F)$ остаются еще элементы вида $\{1 + \theta t_2^i t_1^j, t_1\}$. Пусть σ - образующая $\text{Gal}(L/F)$, $a = \pi_L^\sigma \pi_L^{-1} - 1$, тогда ([2], гл. 5) если $r = v_{2,F}(b)$, где $b = N_{L/F} a$, то $U_{r+1} = N_{L/F} L^*$ и при $v_{2,F}(x) \geq 0$ выполняется

$$1 + x^p \pi_F^i \equiv N_{L/F} (1 + x \pi_L^i) \pmod{U_{i+1}}, \text{ если } 0 < i < r;$$

$$1 + (x^p - x)b \equiv N_{L/F} (1 + xa) \pmod{U_{r+1}};$$

следовательно, из элементов указанного вида не принадлежат подгруппе $N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$, только, быть может, элементы $\{1 + \theta b, t_1\}$ в случае, когда $\theta \notin \{y^p - y; y \in \bar{F}\}$. Значит, индекс норменной подгруппы не превосходит h .

г) Расширение \bar{L}/\bar{F} чисто несепарабельное. Возьмем в L систему параметров T_2, T_1 , а в F - систему параметров $t_2 = T_2$, $t_1 = N_{L/F} T_1$. Так же, как в случае в), проверяется, что $K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$ порождается элементами вида $\{1 + \theta t_2^i t_1^j, t_2\}$.

Пусть σ - образующая группы $\text{Gal}(L/F)$, $a = T_1^\sigma T_1^{-1} - 1$, $b = N_{L/F} a$, $r = v_{2,F}(b)$. Тогда ([14], § 1)

$$1 + x^p t_2^{p i_2} t_1^{i_1} \equiv N_{L/F}(1 + x t_2^{i_2} t_1^{i_1}) \pmod{U_{p i_2 + 1}},$$

если $0 < p i_2 < r$, $U_{r+1} \subset N_{L/F} L^*$, и

$$1 + (x^p - x)b \equiv N_{L/F}(1 + xa) \pmod{U_{r+1}},$$

$$1 + x^p t_1^{i_1} \equiv N_{L/F}(1 + x T_1^{i_1} a) \pmod{U_{r+1}} \text{ при } i \neq 0, v(x) \geq 0.$$

Поэтому и в данном случае выполняется утверждение леммы.

Л е м м а 8. Если L/F - расширение конечной степени, то $N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$ является открытой подгруппой в $K_2^{\text{top}}(F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если степень расширения L/F взаимно проста с p , то $N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L) \supset U_1 K_2^{\text{top}}(F)$. Если степень расширения L/F равна p , то $N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L) \supset p K_2^{\text{top}}(F)$. Согласно лемме 7, норменная подгруппа конечного расширения L/F имеет конечный индекс в $K_2^{\text{top}}(F)$. Используем описание фактор-фильтрации группы $K_2^{\text{top}}(F)/p K_2^{\text{top}}(F)$ (см. [24]) и открытость подгрупп конечного индекса в \bar{F} и \bar{F}/\bar{F}^p . Единственный случай, который нуждается в особом рассмотрении, изображен на диаграмме

$$\begin{array}{ccc} K_2^{\text{top}}(L)/(p K_2^{\text{top}}(L) + U_1 K_2^{\text{top}}(L)) & \xrightarrow{\sim} & \bar{L}^*/\bar{L}^{*p} \\ \downarrow N & & \downarrow N_{L/\bar{F}} \\ K_2^{\text{top}}(F)/(p K_2^{\text{top}}(F) + U_1 K_2^{\text{top}}(F)) & \xrightarrow{\sim} & \bar{F}^*/\bar{F}^{*p} \end{array}$$

Диаграмма коммутативна ввиду p -делимости группы $K_2(\bar{F})$ (см. доказательство леммы 7). Но подгруппа конечного индекса в \bar{F}^*/\bar{F}^{*p} , являющаяся образом открытой подгруппы в \bar{L}^*/\bar{L}^{*p} при норменном отображении, открыта. Поэтому утверждение леммы справедливо для расширения L/F степени p^m .

2°. Каноническое спаривание. Пусть μ_m - группа корней степени m из единицы в поле F^{sep} , где F - двумерное разнохарактеристическое локальное поле. $X(k) = X(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)) = H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ - группа характеров абсолютной группы Галуа поля k . В работе К. Като [8] построен гомоморфизм

$$h_F : \lim_{\longrightarrow} H^3(F, \mu_m \otimes \mu_m) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

удовлетворяющий естественным функториальным свойствам.

Определим отображение

$$\varphi : F^*/F^{*m} \times F^*/F^{*m} \times H^1(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(F, \mu_m \otimes \mu_m)$$

с помощью изоморфизма $F^*/F^{*m} \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mu_m)$. Композиция φ и h_F дает каноническое спаривание $(,)_F$

$$K_2(F) \times X(F) \xrightarrow{(\cdot)_F} \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

а поскольку $\Lambda_2(F) = \bigcap_{m \geq 1} mK_2(F)$ и $X(F)$ - периодическая группа, то определено и каноническое спаривание групп $K_2^{\text{top}}(F)$ и $X(F)$. Из свойств гомоморфизма h_F вытекает, что

$$(x, \chi_L)_L = (N_{L/F}x, \chi)_F, \quad (5)$$

где χ_L - характер $\chi \in X(F)$, рассматриваемый на группе $\text{Gal}(L^{\text{sep}}/L)$, x принадлежит $K_2^{\text{top}}(L)$;

$$((t_1, t_2), \chi)_F = \chi_0(\Delta), \quad (6)$$

если характер $\chi \in X(F)$ является подъемом характера χ_0 из группы $X(\mathbb{F}_q)$, Δ - автоморфизм Фробениуса из группы $\text{Gal}(\mathbb{F}^{\text{sep}}/\mathbb{F}_q)$.

Пусть поле F содержит первообразный корень m -й степени из единицы ξ_m . Определим $\lambda: \mu_m \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ формулой $\lambda(\xi_m) \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$ и гомоморфизм $\tau: F^*/F^{*m} \rightarrow X(F)$ формулой

$$\tau: F^*/F^{*m} \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mu_m) \xrightarrow{\lambda} H^1(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = X(F).$$

Символ Гильберта в двумерном локальном поле F , содержащем μ_m ,

$$(\cdot)_H: F^* \times F^* \times F^* \longrightarrow \mu_m$$

определяется формулой $(x, y, z)_H = \lambda^{-1}(\{x, y\}, \tau(z))_F$. Тогда $(x, 1-y, y)_H = 1$, если $y \neq 0, 1$, так как $1-y$ является нормой в расширении $F(\sqrt[m]{y})/F$.

В работе [15] введено вспомогательное спаривание

$$\langle \cdot \rangle_T: F^* \times F^* \times F^* \longrightarrow \mu_p.$$

Элементам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ группы F^* ставится в соответствие

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle_T = \xi_p^{\text{tr res } \Phi/s},$$

где tr - оператор следа в поле \mathbb{Q}_p из подполя инерции максимального числового локального подполя F , ряд Φ определяется с помощью разложения элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в ряды по системе параметров t_2, t_1 с коэффициентами из кольца целых подполя инерции, s зависит от разложения корня ξ_p в ряд по t_2, t_1 (см. подробнее [15]). Там же доказывается, что введенное вспомогательное спаривание $\langle \cdot \rangle_T$ определено корректно, является мультипликативным, удовлетворяет соотношению Стейнберга и невырождено.

Если $E(\varphi) = \exp\left(\varphi + \frac{\varphi^\Delta}{p} + \frac{\varphi^{\Delta^2}}{p^2} + \dots\right)$ для ряда $\varphi(X)$ без свободного члена, то непосредственным вычислением показывается, что

$$\langle t_1, t_2, E(as(X))|_{x=1} \rangle_T = \xi_p^{\text{tr } a},$$

где a - элемент кольца целых подполя инерции;

$$\langle t_1, t_2, 1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1} \rangle_T = 1, \text{ если } (i_1, i_2) \text{ не делится на } p, \quad (7)$$

$$\langle t_1, 1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, 1 - \eta t_2^{j_2} t_1^{j_1} \rangle_T = 1, \quad i=1 \text{ или } i=2, \quad (8)$$

если $(i_1+j_1, i_2+j_2) > \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, $r=1$ и

$$\langle t_1, 1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, 1 - \eta t_2^{j_2} t_1^{j_1} \rangle_T = \xi_p^{\text{tr } \theta \eta a^{-1} i_k}, \quad (9)$$

если $r=1$, $(i_1+j_1, i_2+j_2) = \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, а - коэффициент при $X_1^{\frac{pe_1}{p-1}} X_2^{\frac{pe_2}{p-1}}$ у ряда $s(X_1, X_2)$, i_k - одно из чисел i_2, i_1 , не делящееся на p .

Предложение 7. Каноническое спаривание $(\cdot, \cdot)_F$ является непрерывным гомоморфизмом $K_2^{\text{top}}(F) \times X(F)$ в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Доказательство. Достаточно проверить, что ядро отображения $\rho: x \mapsto (x, \chi)_F$ есть открытая подгруппа в $K_2^{\text{top}}(F)$ для любого $\chi \in X(F)$. По свойству (5) $\text{Ker } \rho$ содержит подгруппу $N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$, где L/F - расширение, соответствующее характеру χ . Тогда из леммы 3 получаем, что эта норменная подгруппа открыта, следовательно, и $\text{Ker } \rho$ является открытой.

Предложение 8. (Невырожденность справа канонического спаривания).

Если $(x, \chi)_F = 0$ для всех $\chi \in K_2^{\text{top}}(F)$, то $\chi = 1$.

Доказательство. Пусть $\chi \in X(F)$ имеет порядок m и поле F содержит первообразный корень m -й степени из единицы ξ_m . Из предложения 7 следует, что символ Гильберта $(\cdot, \cdot)_H: F^* \times F^* \times F^* \rightarrow \mu_m$ является непрерывным по каждому аргументу и доопределяется до

$$(\cdot, \cdot)_H: K_3^{\text{top}}(F) \rightarrow \mu_m,$$

а из свойства (6) канонического спаривания следует, что

$$(t_1, t_2, x)_H = \sqrt[m]{x}^{\Delta} / \sqrt[m]{x},$$

где Δ - поднятие автоморфизма Фробениуса в $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$.

Если m взаимно просто с $p = \text{char } F_q$, то

$$(t_1, t_2, \theta)_H = \theta^{\frac{q-1}{m}}, \quad \text{где } \theta \in \mathcal{R},$$

следовательно, символ Гильберта является в этом случае $\frac{q-1}{m}$ -й степенью ручного символа, который невырожден [28].

Если $m = p^r$, то символ Гильберта определяется своими значениями на $(t_1, t_2, \omega(a))$, где $\omega(a) = E(as(X))|_{x=T}$, и поэтому совпадает со вспомогательным спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$, так как

$$(t_1, t_2, \omega(a))_H = \langle t_1, t_2, \omega(a) \rangle_T = \xi^{\text{tr } a}.$$

Невырожденность вспомогательного спаривания дает в этом случае невырожденность символа Гильберта.

Если же $\xi_m \notin F$ и $\chi \in X(F)$ соответствует расширению L/F степени m , то по свойству (5) канонического спаривания

$$0 = (N_{F(\xi_m)/F} x, \chi)_F = (x, \chi_{F(\xi_m)})_{F(\xi_m)}$$

для всех $x \in K_2^{\text{top}}(F(\xi_m))$, поэтому $\chi_{F(\xi_m)} = 1$, значит, $L \subset F(\xi_m)$, следовательно, $\chi = 1$.

С л е д с т в и е. Пусть L/F - циклическое расширение степени m , $\chi \in X(F)$ - характер, соответствующий L/F . Тогда $\text{Ker}(x \mapsto (x, \chi)_F) = N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$, следовательно $K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$ - циклическая группа порядка m .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в доказательстве предложения 7, $N = \text{Ker}(x \mapsto (x, \chi)_F) \supset N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$. Из предложения 8 следует, что для простого делителя m_1 числа m найдется $x \in K_2^{\text{top}}(F)$ такой, что $(x, \chi^{m/m_1})_F \neq 0$, значит, индекс N в $K_2^{\text{top}}(F)$ не меньше m . Теперь из леммы 7 следует доказываемое утверждение.

3°. Отображение взаимности. Для всякого $x \in K_2^{\text{top}}(F)$ отображение $\chi \mapsto (x, \chi)_F$ является характером на $X(F)$, в силу теории двойственности этот характер можно однозначно записать в виде $\chi \mapsto \chi(\sigma)$, где $\sigma \in \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$. Определенный таким образом гомоморфизм

$$\Psi_F: K_2^{\text{top}}(F) \xrightarrow{x \mapsto \sigma} \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$$

называется отображением взаимности. Тогда

$$(x, \chi)_F = \chi(\Psi_F(x)), \quad x \in K_2^{\text{top}}(F), \quad \chi \in X(F).$$

Непрерывность Ψ_F следует из непрерывности канонического спаривания ()_F (предложение 7).

Можно также определить двойственное отображение $\tilde{\Psi}_F: X(F) \longrightarrow X(K_2^{\text{top}}(F))$ формулой

$$\tilde{\Psi}_F(\chi) = \chi \circ \Psi_F.$$

Тогда

$$\tilde{\Psi}_F(\chi)(x) = (x, \chi)_F.$$

Из функториальных свойств отображения h_F следует коммутативность диаграмм для конечного расширения полей L/F :

$$\begin{array}{ccc} K_2^{\text{top}}(L) & \xrightarrow{\Psi_L} & \text{Gal}(L^{\text{ab}}/L) \\ \downarrow N_{L/F} & & \downarrow i \\ K_2^{\text{top}}(F) & \xrightarrow{\Psi_F} & \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K_2^{\text{top}}(L) & \xrightarrow{\Psi_L} & \text{Gal}(L^{\text{ab}}/L) \\ \uparrow j_* & & \uparrow \text{tr}_{L/F} \\ K_2^{\text{top}}(F) & \xrightarrow{\Psi_F} & \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F) \end{array} \quad (10)$$

где правое вертикальное отображение в первой диаграмме является ограничением

$\sigma \in \text{Gal}(L^{ab}/L)$ на $\text{Gal}(F^{ab}/F)$, правое вертикальное отображение во второй диаграмме $\text{tr}_{L/F}$ является перемещением ([4], гл.5), левое вертикальное отображение индуцировано включением $j:F \hookrightarrow L$.

Невырожденность справа канонического спаривания $(\)_F$ эквивалентна инъективности отображения $\tilde{\Psi}_F$ и эквивалентна, согласно теории характеров, следующему свойству: группа $\tilde{\Psi}_F(K_2^{\text{top}}(F))$ всюду плотна в $\text{Gal}(F^{ab}/F)$.

Предложение 9. ("Теорема существования"). Гомоморфизм $\tilde{\Psi}_F$ является изоморфизмом.

Доказательство. Отображения $i, N_{L/F}, \text{tr}_{L/F}, j_*$ индуцируют отображения $\tilde{j}_*: X(K_2^{\text{top}}(L)) \rightarrow X(K_2^{\text{top}}(F)), \tilde{\text{tr}}_{L/F}: X(L) \rightarrow X(F), \tilde{N}_{L/F}: X(K_2^{\text{top}}(F)) \rightarrow X(K_2^{\text{top}}(L)), \tilde{\text{I}}: X(F) \rightarrow X(L)$. Ввиду инъективности $\tilde{\Psi}$ и коммутативности диаграмм (10) являются коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X(L) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_L} & X(K_2^{\text{top}}(L)) \\ \uparrow \tilde{\text{I}} & & \uparrow \tilde{N}_{L/F} \\ X(F) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_F} & X(K_2^{\text{top}}(F)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X(L) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_L} & X(K_2^{\text{top}}(L)) \\ \downarrow \tilde{\text{tr}}_{L/F} & & \downarrow \tilde{j}_* \\ X(F) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_F} & X(K_2^{\text{top}}(F)) \end{array}$$

причем $\text{tr}_{L/F} \circ \tilde{\text{I}} = [L:F]$, $\tilde{N}_{L/F} \circ \tilde{j}_* = [L:F]$. Заметим также, что $\tilde{\text{I}}(\chi) = \chi_L$.

Доказательство предложения состоит из четырех частей: в а) проверяется, что каждый непрерывный характер на $K_2^{\text{top}}(F)$ имеет конечный порядок; в б) проверяется, что если $\xi_\ell \in F$ и ψ - характер порядка ℓ на $K_2^{\text{top}}(F)$, ℓ - простое число, то $\psi \in \text{Im } \tilde{\Psi}_F$; в в) показывается, что предположение $\xi_\ell \in F$ можно опустить; наконец, в г) доказательство проводится в общем случае.

а) Каждый непрерывный характер на $K_2^{\text{top}}(F)$ имеет конечный порядок. Действительно, $K_2^{\text{top}}(F)$ порождается элементами вида $\{t_i; x\}$, $i=1,2, x \in F^*$, поэтому для непрерывного характера $\psi \in X(K_2^{\text{top}}(F))$ найдется число m такое, что $\psi(U_m K_2^{\text{top}}(F)) = 0$, значит, для подходящей степени p^s имеем $p^s \psi(U_1 K_2^{\text{top}}(F)) = 0$, а так как непрерывные характеры на \bar{F}^* имеют конечный порядок, то и ψ - конечного порядка.

б) Пусть ℓ - простое число, и первообразный корень ξ_ℓ содержится в поле F , ψ - характер порядка ℓ из $X(K_2^{\text{top}}(F))$. Докажем, что найдется $u \in F^*$ такой, что для всех $x \in K_2^{\text{top}}(F)$

$$\lambda(x, y)_H = \psi(x). \tag{11}$$

Тогда благодаря инъективности $\tilde{\Psi}_F$ получим $\psi = \tilde{\Psi}_F(\tau(y))$.

Обозначим через K ядро характера ψ . Если ℓ взаимно просто с p , то K содержит подгруппу в $K_2^{\text{top}}(F)$, порожденную элементами $\{x, y\}$, где $x \in 1+m, y \in F^*$, поэтому либо $\{t_1, t_2\}$, либо $\{\theta, t_1\}$, либо $\{\theta, t_2\}$ не содержится в K при некотором $\theta \in \mathcal{R}$. Так как $(\)_H$ в этом случае является степенью ручного символа, то в качестве y в (11) нужно взять подходящее $\theta \in \mathcal{R}$ либо t_2 , либо t_1 .

Пусть теперь $\ell=p$. Будем использовать топологический базис группы $K_2^{\text{top}}(F)/pK_2^{\text{top}}(F)$ [23] и формулы (7)-(9) для вспомогательного спаривания $\langle \ \rangle_T$. Для

элемента $x = \{1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_k\}$ системы образующих группы $K_2^{\text{top}}(F)$ ($k=1,2$) через x' обозначим элемент $1 - \theta' t_2^{\frac{pe_2}{p-1}} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}} t_1^{-i_1}$ при подходящем $\theta' \in \mathbb{R}$, чтобы

$$\langle x, x' \rangle_T = \xi_p.$$

Отметим, что из двух элементов $\{1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_1\}$ и $\{1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_2\}$ при $(i_1, i_2) < (\frac{pe_1}{p-1}, \frac{pe_2}{p-1})$ только один входит в систему образующих.

Можно считать, что K не содержит подгруппу в $K_2^{\text{top}}(F)$, порожденную элементами $\{a, b\}$, где $a \in U_1$, $b \in F^*$, иначе положим в (11)

$$y = \delta = 1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}}.$$

Если $\{\delta, t_1\}$ или $\{\delta, t_2\}$ не содержится в K (обозначим тогда этот элемент через x_0), то положим $y_0 = t_1$ или $y_0 = t_2$ так, чтобы

$$\langle x_0, y_0 \rangle_T = \xi_p.$$

Если же $\{\delta, t_1\}$ и $\{\delta, t_2\}$ содержатся в K , то пусть (i_0, j_0) - наибольший индекс в \mathbb{Z}^2 , для которого элемент топологического базиса $K_2^{\text{top}}(F)/pK_2^{\text{top}}(F)$ $\{1 - \theta t_2^{j_0} t_1^{i_0}, t_2\}$ или $\{1 - \theta t_2^{j_0} t_1^{i_0}, t_1\}$ не содержится в K ((i_0, j_0) существует благодаря открытости K). Обозначим этот элемент через x_0 и положим $y_0 = x_0'$, тогда

$$\langle 1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_k, y_0 \rangle_T = 1 \quad k = 1, 2,$$

если $(i_1, i_2) > (i_0, j_0)$.

Так как K - подгруппа индекса p , то для элемента $\{1 - \eta t_2^{j_0} t_1^{i_0-m}, t_k\}$ из системы образующих найдется целое число c_m такое, что $x_m = \{1 - \eta t_2^{j_0} t_1^{i_0-m}, t_k\} + c_m x_0 \in K$. Для x_m положим $y_m = \{1 - \eta t_2^{j_0} t_1^{i_0-m}, t_k\}'$, тогда

$$\langle x_{m_1}, y_{m_2} \rangle_T = \xi_p^{\delta_{m_1, m_2}}$$

при $m_1 \leq m_2$, и $\bar{v}(y_m - 1)$ возрастает с ростом m .

Подбирая подходящие a_m , получим, что $y_{10} = y_0 y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots$ обладает свойством

$$\langle x_m, y_{10} \rangle_T = 1, \quad m \neq 0,$$

$$\langle x_0, y_{10} \rangle_T = \xi_p.$$

С л е д у ю щ и й ш а г. Пусть i_1 - наименьшее целое число, для которого $\{1 - \theta t_2^{j_0-1} t_1^{i_1}, t_k\}$ из топологического базиса при $i \geq i_1$ содержится в K и

$$\langle 1 - \theta t_2^{j_0-1} t_1^{i_1}, t_k, y_{10} \rangle_T = 1.$$

Подберем целые d_m , чтобы $x_{1m} = \{1 - \theta t_2^{j_0-1} t_1^{i_1-m}, t_k\} + d_m x_0$ содержались в K , и положим

$y_{1m} = \{1 - \theta t_2^{j_0-1} t_1^{i_1-m}, t_k\}'$. Тогда аналогично подбору a_m выберем b_m , чтобы

$y_{20} = y_{10} y_{11}^{b_1} y_{12}^{b_2} \dots$ удовлетворял соотношению

$$\langle x_{1m}, y_{20} \rangle_T = 1, \quad m \geq 1.$$

Продолжая этот процесс, строим $u \in F^*$, для которого

$$\langle x_0, y \rangle_T = \xi_p,$$

и, если для $\{1-\theta t_2^2 t_1^1, t_k\}$ из топологического базиса $x = \{1-\theta t_2^2 t_1^1, t_k\} + cx_0 \in K$, то $\langle x, y \rangle_T = 1$. Теперь возьмем для элемента $z \in K$ его разложение по топологическому базису z_m :

$$z = \sum e_m z_m = \sum e_m (z_m + c_m x_0) - (\sum e_m c_m) x_0,$$

где c_m - такие целые числа, что $z_m + c_m x_0 \in K$. Тогда в сумме $\sum e_m c_m$ имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых, и, так как $z \in K$, то $\sum e_m c_m \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$\langle z, y \rangle_T = 1.$$

Итак, построен элемент $y \in F^*$, который ортогонален относительно $\langle \cdot \rangle_T$ группе $K \subset K_2^{\text{top}}(F)$ и $\langle x_0, y \rangle_T = \xi_p$. Следовательно, при подходящем r получим

$$\lambda(x, y^r)_H = \psi(x) \quad \text{для всех } x \in K_2^{\text{top}}(F).$$

в) Если $\xi_p \notin F$, то пусть $L = F(\xi_p)$, тогда для характера порядка ℓ группы $K_2^{\text{top}}(F) \psi \circ N_{L/F}$ принадлежит $X(K_2^{\text{top}}(L))$ благодаря лемме 6. Согласно пункту б), имеем $\tilde{N}_{L/F} \psi = \tilde{\Psi}_L(\chi)$ для некоторого $\chi \in X(L)$. Тогда $\{L:F\}_\psi = \tilde{N}_{L/F}(\psi) = \tilde{\Psi}_F(\tilde{\Gamma}_{L/F} \psi)$, поэтому $\psi \in \text{Im } \tilde{\Psi}_F$.

г) Для доказательства предложения достаточно проверить сюръективность $\tilde{\Psi}_F$ для характеров из $X(K_2^{\text{top}}(F))$ порядка ℓ^n , где ℓ - простое число. Покажем это индукцией по n . Пусть $\psi \in X(K_2^{\text{top}}(F))$ - характер порядка ℓ^n , тогда найдется $\chi \in X(F)$, что $\tilde{\Psi}_F(\chi) = \ell^{n-1} \psi$, отсюда $\tilde{\Psi}_F(\ell \chi) = 0$ и $\ell \chi = 0$ ввиду инъективности $\tilde{\Psi}_F$.

Пусть L/F - циклическое расширение степени ℓ , соответствующее характеру χ , тогда из леммы 6 следует, что

$$\psi \circ N_{L/F} \in X(K_2^{\text{top}}(L))$$

и

$$\ell^{n-1} \psi \circ N_{L/F} = \tilde{\Psi}_L(\chi_L) = 0.$$

Следовательно, по индукционному предположению имеем $\tilde{N}_{L/F} \psi = \tilde{\Psi}_L(\chi_L)$ для некоторого $\chi_L \in X(L)$ и соответственно

$$\langle x, \chi_L \rangle_L = \psi(N_{L/F} x), \quad x \in K_2^{\text{top}}(F).$$

Отсюда вытекает, что для $\sigma \in \text{Gal}(L/F) = G$

$$0 = \langle \sigma x - x, \chi_L \rangle_L = \langle x, \chi_L^{\sigma^{-1}-1} \rangle_L,$$

значит, $\chi_L \in X(L)^G$, но отображение

$$X(F) \longrightarrow X(L)^G, \quad \chi \longmapsto \chi_L,$$

сюръективно ([12], гл. 12, § 1), поэтому $\chi_L = (\chi_2)_L$ для $\chi_2 \in X(F)$ и $\tilde{N}_{L/F} \psi = \tilde{N}_{L/F} \tilde{\Psi}_F(\chi_2)$, т.е. $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_F(\chi_2)$ обращается в 0 на $N_{L/F} K_2^{\text{top}}(F)$, поэтому, согласно следствию из предложения 8, $\ell(\psi - \tilde{\Psi}_F(\chi_2)) = 0$. Теперь применяем индукционное предположение и убеждаемся в справедливости предложения.

С л е д с т в и е. *Отображение взаимности $\tilde{\Psi}_F$ инъективно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\tilde{\Psi}_F(x) = 0$, то x содержится в пересечении

ядер всех непрерывных характеров на $K_2^{\text{top}}(F)$. Согласно доказанному предложению, это пересечение совпадает с пересечением всех открытых подгрупп конечного индекса в $K_2^{\text{top}}(F)$. Воспользуемся теперь непрерывным сюръективным отображением

$$\begin{aligned} F^* \times F^* &\longrightarrow K_2^{\text{top}}(F)/p^r K_2^{\text{top}}(F), \\ x \times y &\longmapsto \{x, t_1\} + \{y, t_2\} \end{aligned}$$

(см. [24]).

Но пересечение всех открытых подгрупп конечного индекса в F^* есть единичная подгруппа, следовательно, пересечение всех открытых подгрупп конечного индекса в $K_2^{\text{top}}(F)$ равно нулевой подгруппе.

Предложение 10. Пусть E - конечное расширение поля F , $L = E \wedge F^{\text{ab}}$. Тогда для $x \in K_2^{\text{top}}(F)$ автоморфизм $\Psi_F(x)$ тождествен на L тогда и только тогда, когда $x \in N_{E/F} K_2^{\text{top}}(F)$.

Доказательство. Если $i: \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E) \longrightarrow \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$ - гомоморфизм ограничения, то элемент поля F^{ab} инвариантен относительно $i(\text{Gal}(E^{\text{ab}}/E))$ тогда и только тогда, когда он лежит в E , т.е. в L . Поэтому $i \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E)$ - подгруппа в $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$, соответствующая L . Из диаграммы (10) имеем

$$N_{E/F} K_2^{\text{top}}(E) \subset \Psi_F^{-1}(i \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E)).$$

Пусть ψ - характер на $K_2^{\text{top}}(F)$, обращающийся в ноль на $N_{E/F} K_2^{\text{top}}(E)$. Согласно лемме 7, ψ имеет конечный порядок, поэтому ввиду предложения 9 записывается в виде $\psi = \tilde{\Psi}_F(\chi)$, где $\chi \in X(F)$. Но $\psi \circ N_{L/F}$ обращается в ноль на $K_2^{\text{top}}(L)$, значит,

$$0 = \tilde{N}_{L/F} \psi = \tilde{N}_{L/F} \tilde{\Psi}_F(\chi) = \tilde{\Psi}_L(\tilde{\chi}).$$

Ввиду инъективности $\tilde{\Psi}_L$ замечаем, что $\tilde{\chi} = 0$, т.е. $\chi(i \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E)) = 0$ и $\psi(\Psi_F^{-1}(i \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E))) = 0$. Итак, любой непрерывный характер на $K_2^{\text{top}}(F)$, обращающийся в ноль на $N_{E/F} K_2^{\text{top}}(F)$, обращается в ноль на $\Psi_F^{-1}(i \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E))$, следовательно,

$$N_{E/F} K_2^{\text{top}}(F) = \Psi_F^{-1}(i \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E)).$$

Теорема. Пусть F - двумерное разнохарактеристическое локальное поле. Для каждого расширения конечной степени L/F , $L \subset F^{\text{ab}}$, пусть G_L - подгруппа в $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$, соответствующая L . Тогда

$$N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L) = \Psi_F^{-1}(G_L),$$

G_L является замыканием $\Psi_F(N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L))$ в $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$, Ψ_F определяет изоморфизм $K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$ на $\text{Gal}(L/F)$. Отображение $L \longrightarrow N_{L/F} K_2^{\text{top}}(L)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между подполями L конечной степени над F в F^{ab} и открытыми подгруппами конечного индекса в $K_2^{\text{top}}(F)$.

Доказательство. $\Psi_F(K_2^{\text{top}}(F))$ всюду плотно в $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$ и, согласно предложению 4, Ψ_F определяет изоморфизм

$$K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F}K_2^{\text{top}}(L) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(L/F).$$

Пусть N - открытая подгруппа конечного индекса m в $K_2^{\text{top}}(F)$, ψ_i - все различные непрерывные характеры на $K_2^{\text{top}}(F)$, тривиальные на N ($1 \leq i \leq m$). Тогда N является пересечением ядер этих характеров. Благодаря предложению 3 отыщутся характеры χ_i из $X(F)$ такие, что $\Psi_F(\chi_i) = \psi_i$.

Характеры χ_i однозначно определены (так как Ψ_F инъективно) и образуют конечную группу порядка m в $X(F)$. Пусть G_1 - пересечение ядер характеров χ_i . Это - открытая подгруппа индекса m в $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$, поэтому подполе L в F^{ab} , соответствующее G_1 , имеет степень m над F . Кроме того, $N = \Psi_F^{-1}(G_1)$, следовательно, $N = N_{L/F}K_2^{\text{top}}(L)$.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж.Касселса и А.Фрелиха. М.: Мир, 1969. 483 с.
- [2] Serre J.-P. Corps locaux. Paris. Hermann, 1962. 244 p.
- [3] Weis E. Algebraic number theory. New York etc., 1963. 275 p.
- [4] Ивасава К. Локальная теория полей классов. М.: Мир, 1983. 184 с.
- [5] Artin E., Tate J. Class field theory. Harvard, 1961.
- [6] Меркурьев А.С., Суслин А.А. К-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1982. Т.264, N 3. С.1011-1046.
- [7] Паршин А.Н. Поля классов и алгебраическая К-теория // Успехи мат.наук. 1975. Т.30, вып.1. С.253-254.
- [8] Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. I // J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. 1A, 1979. Vol.26, N 2. P.303-376.
- [9] Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. II // J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. 1A. 1980. Vol.27, N 3. P.603-683.
- [10] Kato K. The existence theorem for higher local class field theory // Publ.IHES. 1980. Vol.43. P.1-37.
- [11] Паршин А.Н. Локальная теория полей классов // Тр.Мат.ин-та АН СССР. 1984. Т.165. С.143-170.
- [12] Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972. 406 с.
- [13] Neukirch J. Neubegrundung der Klassenkörpertheorie // Math.Z. 1984. Bd 186, N 4. S.557-574.
- [14] Nazewinkel M. Local class field theory is easy // Advances in Math. 1975. Vol.18. P.148-181.
- [15] Восток С.В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1985. Т.49, N 2. С.283-308.
- [16] Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности // Мат.сб. 1950. Т.26(68),

- № 1. С. 113-146.
- [17] Востоков С.В. Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 6. С. 1288-1321.
- [18] Востоков С.В. Норменное спаривание в формальных модулях // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 4. С. 765-794.
- [19] Востоков С.В. Символы на формальных группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 5. С. 985-1014.
- [20] Фесенко И.Б. Обобщенный символ Гильберта в 2-адическом случае // Вестн. ЛГУ, 1985. Т. 22. С. 112-114.
- [21] Фесенко И.Б. Обобщенный символ Гильберта в многомерных локальных полях // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. С. 88-92.
- [22] MacKenzie R., Whaples G. Artin-Schreier equations in characteristic zero // Amer. J. of Math. 1956. N 3. S. 473-485.
- [23] Востоков С.В., Жуков И.Б. Абелевы полуразветвленные расширения многомерного локального поля // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. С. 39-50.
- [24] Фесенко И.Б. О K -группах многомерного локального поля // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41, № 2. С. 266-268.
- [25] Паршин А.Н. Абелевы накрытия арифметических схем // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 4. С. 855-858.
- [26] Ломадзе В.Г. К теории ветвления двумерных локальных полей // Мат. сб. 1979. Т. 109, № 3. С. 378-394.
- [27] Милнор Дж. Введение в алгебраическую K -теорию. М.: Мир, 1974. 200 с.
- [28] Фесенко И.Б. Факторы K -групп Милнора многомерных локальных полей // Тезисы докладов XVIII Всесоюзной алгебраической конференции. Кишинев, 1985.

Ленинградский государственный университет
198904, Ленинград, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., 2

Поступило 14 июня 1989 г.