Ш. А. Даутов, С. В. Знаменский, Теорема Морера в многомерном комплексном анализе, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, номер 5, 17–19

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 5 (156)

УДК 517.55

Ш. А. Даутов, С. В. Знаменский

ТЕОРЕМА МОРЕРА В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Одним из фундаментальных фактов теории функций комплексного переменного является теорема Морера. Она утверждает, что если функция f непрерывна в области $D \subset C^1$, и для любых Ω из некоторого класса множеств, лежащих в D,

$$\int_{\partial\Omega} f\,dz = 0, \tag{1}$$

то f голоморфна в D. Так, напр., в [1] (сс. 71, 95) предполагается, что $\{\Omega\}$ — совокупность всех прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, а в [2] (с. 101) — $\{\Omega\}$ есть совокупность всех треугольников, лежащих в D. Иногда условие (1) принимают за определение голоморфной функции (напр., [2], с. 102, голоморфность в смысле Коши).

В случае многих комплексных переменных известны два аналога этой теоремы. Классический вариант ([2], с. 335; [3], с. 313; [4], с. 234) предполагает интегрирование по границе $(n+1)$-мерных призм, т. е. по множеству размерности n. Другой вариант ([5], [6]) требует, чтобы Ω было кубом или шаром, т. е. размерность множества интегрирования равна $2n-1$. В [6] отмечено, что „было бы интересно найти простые аналоги теоремы Морера, в которых фигурирует k-мерное интегрирование, $n<k<2n-1$“. В настоящей заметке содержится соответствующий результат для всех размерностей от 1 до $2n-1$.

Пусть $C^n=\{(z_1,\ldots, z_n)\}$, где $z_k=x_{2k-1}+ix_{2k}$, обозначим $C_i=\{z\in C^n: z_1=\ldots=z_{i-1}=z_{i+1}=\ldots=z_n=0\}$. Для каждого $i=1,\ldots,n$ зафиксируем целое число p_i, $0\leqslant p_i\leqslant 2n-2$, и мультииндекс $K^i=(k_1^i,\ldots,k_{p_i}^i)$ такой, что любой k_j^i, $j=1,\ldots,p_i$, отличен от $2i-1$ и $2i$. Обозначим $dx_{K^i}=dx_{k_1^i}\wedge\ldots\wedge dx_{k_{p_i}^i}$.

Теорема 1. *Пусть f непрерывна в $D\subset C^n$ и для всех $i=1,\ldots,n$ и любых параллелепипедов $W^i\subset\subset D$ размерности p_i+2, со сторонами, параллельными осям координат, таких, что проекция W^i на C_i имеет полную размерность,*

$$\int_{\partial W^i} f\,dz_i\wedge dx_{K^i}=0.$$

Тогда f голоморфна в D.

Доказательство. Пусть V^i — проекция W^i на C_i, а U^i — проекция W^i на плоскость $\{z \in C^n : z_i = 0\}$. Тогда $W^i = V^i \times U^i$ и

$$\int\limits_{U^i} \Big(\int\limits_{\partial V^i} f dz_i \Big) dx_{K^i} = \int\limits_{\partial V^i \times U^i} f\, dz_i \wedge dx_{K^i} = \int\limits_{\partial W^i} f\, dz_i \wedge dx_{K^i} = 0,$$

т. к. $\partial W^i = \partial V^i \times U^i + V^i \times \partial U^i$ и интеграл по $V^i \times \partial U^i$ равен нулю. Отсюда в силу произвольности U^i имеем

$$\int\limits_{\partial V^i} f\, dz_i = 0.$$

По теореме Морера для одного комплексного переменного ([1], сс. 71, 95) функция f голоморфна по z_i. Так как i любое, а f непрерывна, то f голоморфна в D.

Ограничения на $\{\Omega\}$ можно значительно ослабить, правда, в ущерб простоте доказательства. Приведем усиленный вариант теоремы Морера.

Пусть M_i — непрерывно дифференцируемое многообразие размерности p_i, $2 \leqslant p_i \leqslant 2n$, вложенное в C^n и проходящее через нуль, причем $M_i \cap C_i$ — открытое множество в C_i. Тогда для некоторой окрестности U начала координат в качестве локальных координат на $U \cap M_i$ можно взять набор функций, в который входят x_{2i-1} и x_{2i}. Зафиксируем один из таких наборов и обозначим функции этого набора через x_{2i-1}, x_{2i}, $\tau_3^i, \ldots, \tau_{p_i}^i$. Возьмем последовательность $\{D_i^k\}$ областей в M_i с кусочно-гладкой границей, таких, что $0 \in D_i^k \subset\subset U \cap M_i$ и $\operatorname{diam} D_i^k \to 0$ при $k \to \infty$. При таких обозначениях справедлива

Теорема 2. *Если f непрерывна в $D \subset C^n$ и для всех $i = 1, \ldots, n$*

$$\int\limits_{\partial (z^0 + D_i^k)} f dz_i \wedge d\tau_3^i \wedge \ldots \wedge d\tau_{p_i}^i = 0 \qquad (2)$$

как только $z^0 + D_i^k \subset\subset D$, то f голоморфна в D.

Доказательство дословно повторяет (с соответствующими изменениями в обозначениях) доказательство теоремы Морера из [6].

Из теоремы 2 можно получить все варианты, изложенные в [2] — [6].

1. Положим $M_i = \{z \in C^n : x_{2j} = 0,\ i \neq j\}$, координаты на M_i зададим функциями $x_1, \ldots, x_{2n-1}$, x_{2i}. Если теперь в качестве D_i^k взять $\Delta_i^k \times \Lambda_i^k$, где Δ_i^k — треугольники в C_i, а Λ_i^k — кубы в плоскости $\{x_{2i-1} = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0\}$, то D_i^k входят в классы множеств, рассмотренных в [2] — [4], и мы получаем классический вариант теоремы Морера.

2. Пусть $M = C^n$, а D_i^k — последовательность кубов со сторонами, параллельными осям координат. Тогда получим вариант теоремы Морера, изложенный в [5]. Следует отметить, что условия, фигурирующие в [5], только формально более общие, чем наложенные нами.

3. Если $M = C^n$, D_i^k — последовательность шаров, то теорема 2 переходит в теорему Морера, приведенную в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М., ИИЛ, 1963.

2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., „Наука", 1969.

3. Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. Ч. 1. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962.

4. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М., „Наука", 1964.

5. Dinghas A. Zur Grundlegung der Cauchywierstraßschen Funktionentheorie einer und mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Ann., Bd. 189, № 3, 1970, S. 191—201.

6. Айзенберг Л. А. Замечание о теореме Морера. В сб. „Голоморфные функции многих комплексных переменных". Красноярск, 1972, с. 165—166.

г. Красноярск

Поступила
24 VI 1974

Л. И. Баусов. Приближение дифференцируемых функций некоторыми тригонометрическими полиномами в среднем

(аннотация статьи, принятой к печати)

Для операторов

$$L_{n,r}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} f(x+kt)\, u_n(t)\, dt,$$

где

$$u_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{n} \lambda_{n,s} \cos st \geqslant 0,$$

изучается поведение верхних граней

$$C_n(w^r L, \lambda) = \sup_{f \in w^r L} \| f(x) - L_{n,r}(f, x) \|_L$$

на классе $w^r L$ дифференцируемых периодических функций, для которых $df^{(r-1)}(x)\|_L \leqslant 1$. Доказывается, что

$$C_n(w^r L, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^r u_n(t)\, dt + O\left(\int_{\pi/2r}^{\pi} t^r u_n(t)\, dt \right).$$

Аналогичный результат получен для класса сопряженных функций. (Работа поступила в журнал „Математика" 5 XI 1973.)