А. Ф. Вакуленко, Унитарная регуляризация для модели Фридрихса системы многих частиц, *Докл. АН СССР*, 1979, том 245, номер 6, 1348–1352

Имеем

$$P\mathbf{w} = \epsilon^{-1}\Lambda_{-1} + \Lambda_0 + \epsilon\Lambda_1;$$

$$\Lambda_{-1} = (d_i A_{ij})D_j\mathbf{v} + (d_i A_{ij}^1)DD_j\mathbf{v} + L_0\mathbf{v}_1 + L_0^1 D\mathbf{v}_1,$$

$$L_0^1\mathbf{v} = d_i(A_{ij}^1 d_j\mathbf{v}).$$

Можно проверить, что $\Lambda_{-1} = 0$ при

$$\mathbf{v}_1 = N_j(\mathrm{Z})D_j\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{t} \Omega_k(t-\tau, \mathrm{Z})DD_k\mathbf{v}(\tau, X)d\tau;$$

$\Omega_k(0, \mathrm{Z})$ – решение системы

$$L_0^1(\Omega_k + N_k) + d_i A_{ik}^1 = 0,$$

удовлетворяющее условию $[\Omega_k(0, \mathrm{Z})] = 0$, при $t \geqslant 0$ $\Omega_k(t, \mathrm{Z})$ удовлетворяет системе $L_0\Omega_k + L_0^1 D\Omega_k = 0$ и условию $[\Omega_k(t, \mathrm{Z})] = 0$. В случае, когда L и L^1 удовлетворяют (5), можно показать, что такие матрицы Ω_k существуют и их норма W_2^1 по периоду экспоненциально убывает по t.

В качестве осреднения исходного уравнения примем уравнение

$$\bar{P}\mathbf{v} = [\Lambda_0] = 0.$$

Выражение $\bar{P}\mathbf{v}$ записывается в виде

$$\bar{P}\mathbf{v} = \bar{R}D^2\mathbf{v} - D_i(\bar{A}'_{ij}D_j\mathbf{v}) - D_i(\bar{B}_{ij}D_jD\mathbf{v}) - \int_{-\infty}^{t} \Omega_{ij}(t-\tau)D_iD_j\mathbf{v}(\tau, X)d\tau.$$

Правая часть выражения $P\mathbf{w}$ имеет такой же вид, как в (6) и при определенных условиях можно получить теорему о близости, аналогичную доказанной ранее.

Автор выражает признательность А.Г. Куликовскому за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
13 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Sanchez-Palencia*, Intern. J. Eng. Sci., v. 12, № 4 (1974). [2] *Н.С. Бахвалов*, ДАН, т. 218, № 5 (1974). [3] *В.Л. Бердичевский*, ДАН, т. 222, № 3 (1975). [4] *Н.С. Бахвалов*, ДАН, т. 225, № 2 (1975). [5] *Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер*, Физика ударных волн, М., Физматгиз, 1963. [6] *Н.С. Бахвалов*, В сб.: Проблемы математической физики и вычислительной математики, М., "Наука", 1977.

УДК 517.9

А.Ф. ВАКУЛЕНКО

УНИТАРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА СИСТЕМЫ МНОГИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 12 X 1978)

Ядро резольвенты и собственные функции непрерывного спектра оператора энергии системы многих частиц обладают характерными сингулярностями, которые могут быть найдены из эвристических соображений. Впервые полученное в работе ([1]) доказательство полноты собственных функций оператора энергии системы трех частиц было основано на выделении сингулярностей ядра резольвенты. В последующих работах в эту схему были внесены определенные технические усовершенствования, см., например, ([6]). Тем не менее, обобщение полученных результатов на случай произвольного числа частиц до сих пор вызывает трудности. В нашем подходе основную роль играет выделение сингулярностей собственных функций, которые более просты в том смысле, что непосредственно связаны с асимптотическим поведением системы частиц при больших временах. В работе ([2]) этот подход был продемонстрирован на примере трехчастичной модели Фридрихса. Здесь мы рассматриваем модель Фридрихса для оператора энергии системы произвольного конечного числа частиц.

1. Условимся предварительно о некоторых обозначениях. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Обозначим через $L_2(\mathbb{R}^n, \mathfrak{H})$ гильбертово пространство функций $\mathbb{R}^n \to \mathfrak{H}$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathfrak{H}}\, dx$.

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ — гильбертовы пространства и K — оператор из $L_2(\mathbb{R}^{n'}, \mathfrak{H}')$ в $L_2(\mathbb{R}^n, \mathfrak{H})$. Будем говорить, что оператор K задан ядром $\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — обобщенная функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$ со значениями во множестве операторов, действующих из $\mathfrak{H}'$ в $\mathfrak{H}$, если его действие определяется формулой $(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^{n'}} \mathcal{K}(x, x') f(x')\, dx$. Будем называть функцию $\mathcal{K}$ гладкой быстро убывающей, если ее значения — компактные операторы и для любых мультииндексов τ, τ' и натурального m выполняется $\|\partial_x^\tau \partial_{x'}^{\tau'} \mathcal{K}(x, x')\| \leqslant \mathrm{const}\,(1 + |x| + |x'|)^{-m}$. Класс операторов, заданных гладкими быстро убывающими ядрами, обозначим $\mathcal{L}$. Положим $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, чертой будем обозначать операцию дополнения: если $\bar{\alpha} \subset \Omega$, то $\bar{\alpha} = \Omega \backslash \alpha$. Для каждого $\alpha \subset \Omega$ рассмотрим подпространство $\mathbb{R}_\alpha$ в $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $x_m = 0$ при $m \in \bar{\alpha}$. Через x_α обозначим проекцию x на $\mathbb{R}_\alpha$. Для каждого $\alpha \subset \Omega$ пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\mathbb{R}_\alpha \oplus \mathbb{R}_{\bar{\alpha}}$; при этом пространство $L_2(\mathbb{R}^n, \mathfrak{H})$ естественно изоморфно $L_2(\mathbb{R}_\alpha, \mathfrak{H}) \otimes L_2(\mathbb{R}_{\bar{\alpha}}, \mathbb{C})$.

2. В этом пункте мы определим модель Фридрихса для оператора энергии системы многих частиц и введем основные объекты теории рассеяния, связанные с ней. Наши определения параллельны стандартным определениям в теории многочастичного оператора Шредингера.

Оператор H_0 действует в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n, \mathfrak{H})$ согласно формуле $(H_0 f)(x) = \sum_{m=1}^{n} X_m f(x)$. Для каждого $\beta \subset \Omega$, $\beta \neq \phi$ рассмотрим симметричный оператор v_β класса $\mathcal{L}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}_\beta, \mathfrak{H})$, и оператор $V_\beta = v_\beta \otimes I$, действующий в $\mathcal{H}$. Моделью Фридрихса мы называем оператор $H = H_0 + \sum_{\beta \subset \Omega} V_\beta$.

Положим $H^\alpha = H_0 + \sum_{\beta \subset \alpha} V_\beta$; оператор H^α допускает представление $H^\alpha = h^\alpha \otimes I + I \otimes h_0^\alpha$. Оператор H может служить моделью оператора энергии системы многих частиц. Подмножества $\alpha \subset \Omega$ следует рассматривать как подсистемы нашей системы, операторы H^α соответствуют ситуации, когда учитываются взаимодействия только между частицами, входящими в α. Переход от H^α к h^α соответствует рассмотрению движения α в системе центра инерции.

Пусть κ — собственное значение оператора h^β при $\beta \neq \Omega$, $\mathfrak{H}_{\beta\kappa}$ — соответствующее собственное подпространство, $p_{\beta\kappa}$ — проектор на него, $P_{\beta\kappa} = p_{\beta\kappa} \otimes I$. Подпространство $\mathcal{H}_{\beta\kappa}$, на которое проектирует $P_{\beta\kappa}$, естественно эквивалентно пространству $L_2(\mathbb{R}_{\bar{\beta}}, \mathfrak{H}_{\beta\kappa}) = \mathcal{H}'_{\beta\kappa}$; соответствующий оператор отождествления, действующий из $\mathcal{H}'_{\beta\kappa}$ в $\mathcal{H}$, обозначим $J_{\beta\kappa}$. Подпространство $\mathcal{H}_{\beta\kappa}$ инвариантно относительно H^β, сужение H^β на $\mathcal{H}_{\beta\kappa}$ переводится оператором $J_{\beta\kappa}$ в оператор умножения на функцию $\kappa + \sum_{m \in \bar{\beta}} x_m$, который мы обозначим $H'_{\beta\kappa}$. Пространство $\mathcal{H}'_{\beta\kappa}$ называется каналом рассеяния, $H'_{\beta\kappa}$ — оператором энергии канала. Для краткости условимся нумеровать канал только подмножеством $\beta \subset \Omega$, опуская значок κ; суммирование по β будет означать одновременное суммирование по всем собственным значениям оператора h^{β}. Будем также считать, что при $\beta = \phi$ $\mathcal{H}'_{\beta} = \mathcal{H}$, $J_{\beta} = I$. Положим $\mathcal{H}' = \bigoplus_{\beta \subset \Omega} \mathcal{H}'_{\beta}$, $H' = \bigoplus_{\beta \subset \Omega} H'_{\beta}$, J – оператор из $\mathcal{H}'$ в $\mathcal{H}$, заданный матрицей-строкой с компонентами J_{β}.

Волновые операторы определяются как сильные пределы:

$$W^{\pm} = \underset{t \to \pm \infty}{s - \lim} \exp(itH) J \exp(-itH').$$

Оператор $W^{\pm}$ задается матрицей-строкой, компоненты которой будем обозначать $W^{\pm}_{\beta\kappa}$ или просто $W^{\pm}_{\beta}$. Волновые операторы для операторов H^{α} будем обозначать $W^{\alpha\pm}$, их компоненты $-W^{\alpha\pm}_{\beta}$, при этом должно быть $\beta \subsetneqq \alpha$. Оператором рассеяния называется оператор $S = (W^{+})^{*} W^{-}$, действующий в $\mathcal{H}'$. Он определяет квадратную матрицу с компонентами $S_{\gamma\beta}$: $\mathcal{H}'_{\beta} \to \mathcal{H}'_{\gamma}$.

Нашей целью является получение явных формул для сингулярностей ядра операторов $W^{\pm}$. Основные результаты теории рассеяния (например существование и полнота волновых операторов) и спектральной теории для оператора H являются простыми следствиями этих формул. Далее мы будем рассматривать только оператор W^{-}, опуская "минус", для W^{+} все рассуждения параллельны.

3. Из эвристических соображений следует, что сингулярности ядра оператора $W_{\beta\kappa}$ должны находиться в соответствии с альтернативными возможностями для системы рассеяться из состояния, принадлежащего каналу $(\beta\kappa)$, в произвольное конечное состояние. В нашем случае различные способы рассеяния естественно пронумеровать следующим образом. Для $1 \leqslant m \leqslant n + 1$ рассмотрим набор $\{\beta_1, \ldots, \beta_m; \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}\}$ подмножеств множества Ω, считая, что выполнены следующие условия. Подмножества γ_s непусты; подмножества $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ попарно не пересекаются; $\beta_{s+1} \subset \beta_s \cup \gamma_s$ при всех s; из двух множеств γ_s и $(\beta_s \cup \gamma_s) \setminus \beta_{s+1}$ хотя бы одно состоит ровно из одного элемента. Подмножества β_s нумеруют каналы, поэтому считаем, что если $\beta_s \neq \phi$, то оператор h^{β_s} имеет собственные значения и при каждом $\beta_s \neq \phi$ фиксировано некоторое собственное значение оператора h^{β_s}. Наборы, которые мы описали, будем называть цепочками. Если a – цепочка, обозначим $a_{\text{in}} = \beta_1$, $a_{\text{out}} = \beta_m$, $|a| = \beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_{m-1}$. Ели цепочку a разорвать на s-м месте, где $1 < s < m$, то получаются две цепочки $b = \{\beta_1, \ldots, \beta_s; \gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}\}$ и $c = \{\beta_s, \ldots, \beta_m; \gamma_s, \ldots, \gamma_{m-1}\}$; будем тогда писать $a = cb$ и $a > b$. Каждой цепочке a соответствует способ рассеяния из начального состояния, принадлежащего a_{in}, в конечное состояние из a_{out}, при котором учитываются взаимодействия V_{β} при $\beta \subset |a|$.

Приводимые ниже формулы для ядер волновых операторов являются ключевыми в нашем подходе к обоснованию теории многочастичного рассеяния в рамках модели Фридрихса. Утверждается, что оператор W^{α}_{β} можно представить в виде

$$W^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\substack{a_{\text{in}} = \beta \\ |a| \subset \alpha}} J_{a_{\text{out}}} U_a. \tag{1}$$

В этой формуле оператор U_a действует из $\mathcal{H}'_{a_{\text{in}}}$ в $\mathcal{H}'_{a_{\text{out}}}$. Если $a = \{\beta\}$ – тривиальная цепочка, то $U_a = I$. Для произвольной цепочки a оператор U_a задан ядром $\Gamma_a \mathcal{P}_a$, где

$$\begin{gathered} \Gamma_a = \prod_{a \geqslant b} (E_{|b| b_{\text{out}}} - E'_{|b| b_{\text{in}}} - i0)^{-1} \prod_{m \notin |a|} \delta(x_m - x'_m), \\ \mathcal{P}_a = \mathcal{P}_a(x_{\tau_{\text{out}}}, x'_{\tau_{\text{in}}}), \quad \tau_{\text{out}} = |a| \setminus a_{\text{out}}, \quad \tau_{\text{in}} = |a| \setminus a_{\text{in}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь положено $E_{\alpha\beta} \equiv E_{\alpha(\beta\kappa)} = \kappa + \sum_{m \in \alpha \setminus \beta} x_m$. Функции $\mathcal{P}_a$ принимают значения во множестве операторов из $\mathfrak{H}_{a_{\text{in}}}$ в $\mathfrak{H}_{a_{\text{out}}}$ и являются гладкими быстро убывающими. Между $\mathcal{P}_a$ имеются соотношения: если аргументы $x_{\tau_{\text{out}}}$ и $x'_{\tau_{\text{in}}}$ в $\mathcal{P}_a$ связаны условием $E_{|b|b_{\text{out}}} = E'_{|b|b_{\text{in}}}$ при $a = cb$, то

(3) $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_c \, \mathcal{P}_b$.

С помощью $\mathcal{P}_a$ можно написать ядро оператора рассеяния. Введем обобщенную функцию Δ_a так, что $\Gamma_a = (E_{|a|a_{\text{out}}} - E'_{|a|a_{\text{in}}} - i0)^{-1} \Delta_a$ или, что то же самое, $\Gamma_a = (E_{\Omega a_{\text{out}}} - E'_{\Omega a_{\text{in}}} - i0)^{-1} \Delta_a$. Ядро компоненты $S_{\gamma\beta}$ запишется в виде

(4) $$S_{\gamma\beta} \sim \sum_{\substack{a_{\text{in}} = \beta \\ a_{\text{out}} = \gamma}} 2\pi i \delta \left(E_{\Omega\gamma} - E'_{\Omega\beta}\right) \Delta_a \mathcal{P}_a .$$

Если $\gamma = \beta$ (и соответствующие собственные значения совпадают), то слагаемое, соответствующее тривиальной цепочке $\{\beta\}$, есть просто ядро единичного оператора. Отметим, что в этой формуле используются только значения $\mathcal{P}_a$ при $E_{\Omega\gamma} = E'_{\Omega\beta}$. Из нее также видно, что S коммутирует с H', поэтому в представлении, в котором H' действует как оператор умножения на независимую переменную E, оператор S задан ядром $s(E)\,\delta\,(E - E')$.

4. Обоснование формул (1), (2) методом унитарной регуляризации для трехчастичной модели Фридрихса было дано в ([2]), способ преодоления комбинаторных трудностей, возникающих в общем случае, указан в ([3]). Здесь мы приводим полный план в общем случае.

Предположим, что представление (1), (2) справедливо для всех W^α при $\alpha \subsetneqq \Omega$ и, значит, известны функции $\mathcal{P}_a$ при $|a| \subsetneqq \Omega$. Мы докажем, что можно так выбрать функции $\mathcal{P}_a$ при $|a| = \Omega$, что оператор U, построенный по формулам (1), (2) с этими $\mathcal{P}_a$, будет унитарным и будет выполняться

(5) $U^* H U - H' \in \mathcal{L}$.

Выбирая $\mathcal{P}_a$, сначала фиксируем значение $\mathcal{P}_a$ при $E_{|b|b_{\text{out}}} = E'_{|b|b_{\text{in}}}$ для $a > b$ согласно (3). Оказывается, что уже это гарантирует выполнение соотношения (5). Если далее определить значения $\mathcal{P}_a$ при $E_{\Omega a_{\text{out}}} = E'_{\Omega a_{\text{in}}}$ — на диагонали, то оставшийся произвол в выборе $\mathcal{P}_a$ будет состоять в возможности прибавить к ядру оператора U гладкое слагаемое.

Построим оператор G: $\mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$, задавая ядра его компонент по формуле (4). В этой формуле, как отмечалось, участвуют только значения $\mathcal{P}_a$ на диагонали. Выбирая $\mathcal{P}_a$ на диагонали, прежде всего потребуем, чтобы оператор G был унитарен. Запишем ядро оператора G в виде $g(E)\,\delta\,(E - E')$. Унитарность G эквивалентна унитарности $g(E)$ при всех E, но сохраняющийся пока произвол в выборе $\mathcal{P}_a$ сводится для оператора $g(E)$ к возможности прибавить гладкое слагаемое к ядру. Известно следующее

Утверждение. *Пусть A — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве. Для того чтобы существовал компактный оператор B такой, что $A + B$ унитарен, необходимо и достаточно, чтобы операторы $AA^* - I$ и $A^*A - I$ были компактны и индекс A равнялся нулю.*

Для некоторого класса операторов, в котором содержатся операторы U, G, $g(E)$, участвующие в наших построениях, можно доказать параллельное утверждение, в котором свойство компактности заменяется принадлежностью классу $\mathcal{L}$. Можно проверить, что операторы $g(E)\,g(E)^* - I$ и $g(E)^* g(E) - I$ принадлежат классу $\mathcal{L}$ и индекс $g(E)$ равен нулю. Из этого следует, что $g(E)$ можно считать унитарным, изменив, если нужно, значение $\mathcal{P}_a$ на диагонали.

Унитарность G эквивалентна тому, что операторы $UU^* - I$ и $U^*U - I$ принадлежат классу $\mathcal{L}$. Индекс U не обязательно равен нулю. Рассмотрим оператор T, заданный в $\mathcal{H}$ ядром $\delta(x - x') - (E - E' - i0)^{-1} t(x, x')$, где t — гладкая финитная функция, и будем считать, что T — частично-изометрический оператор. Индекс операторов TU можно сделать равным нулю подходящим выбором T. С другой стороны, ядро оператора TU имеет такую же структуру, что и ядро U, и по сравнению с ядром U меняется только значение $\mathcal{P}_a$ при $|a| = \Omega$ на диагонали, причем оператор G, построенный по TU, унитарен. Таким образом, можно считать, что сам оператор U имеет нулевой индекс, и тогда его можно сделать унитарным, прибавив к его ядру гладкое слагаемое.

Оператор $H_1 = U^*HU$, благодаря тому, что $H_1 - H' \in \mathcal{L}$, исследуется средствами, развитыми для модели Фридрихса двухчастичного оператора Шредингера, см [4, 5]. Рассмотрим оператор $W_1 = s = \lim\limits_{t \to -\infty} \exp(itH_1) \exp(-itH')$; тогда $W = UW_1$. Зная свойства оператора W_1, можно утверждать, что ядро оператора W имеет структуру (1), (2) и для $\mathcal{P}_a$ выполняется соотношение (3).

Автор приносит глубокую благодарность В.С. Буслаеву за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л.Д. Фаддеев*, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 69 (1963). [2] *В.С. Буслаев, А.Ф. Вакуленко*, Вестн. Ленингр. ун-та, т. 13, 3, 22 (1977). [3] *А.Ф. Вакуленко*, Зап. научных семинаров ЛОМИ, т. 69, 19 (1977). [4] *К.О. Фридрихс*, Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, М., "Мир", 1969. [5] *Л.Д. Фаддеев*, Тр. Матем. ин-та АНСССР, т.73, 292 (1964). [6] *J. Ginibre, M. Moulin*, Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A, v. 21, 2 (1974).

УДК 513.19 + 519.21

Г.И. НАЗИН

ОПИСАНИЕ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА

(Представлено академиком Н.Н. Боголюбовым 3 XI 1978)

В равновесной статистической физике общепринято использования модели бесконечной системы. Уравнения для характеристик такой системы получают с помощью термодинамического предельного перехода (т.п.п.) из соответствующих уравнений для конечных систем.

В настоящее время интенсивно изучается описание бесконечных систем мерой в пространстве конфигураций [1]. Такие меры удовлетворяют уравнению Добрушина – Ланфорда – Рюэля (Д.Л.Р.), полученному т.п.п. из уравнения для гиббсовского распределения в большом каноническом ансамбле (б.к.а.), и называются гиббсовскими [2–4].

Цель данной работы – установить в классической статистической физике эквивалентность метода гиббсовских случайных полей и предложенного Н.Н. Боголюбовым метода производящего функционала [5].

1. Следуя [1], отождествим конфигурацию однокомпонентной системы с конечными множествами $c \subset R^\nu$. В пространстве всех конечных конфигураций K естественным образом вводится мера Лебега [7]. Состояние системы с бинарным взаимо-