А. В. Липницкий, О вычислимости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 12, 1615–1620

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1615–1620

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

О ВЫЧИСЛИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО ВРЕМЕННЫМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРОГРЕССИЯМ

© 2005 г. А. В. Липницкий

Рассматриваются линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1_A}$$

с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами.

Для любой неограниченно возрастающей последовательности неотрицательных чисел $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1_A) положим $\lambda_x\{t_k\} = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} t_k^{-1}\ln|x(t_k)|$. Через $\lambda[x]$ ниже обозначается показатель Ляпунова функции $x(\cdot)$.

В работе [1] установлено, что для любого решения $x(\cdot)$ системы (1_A) равенство $\lambda[x] = \lambda_x\{\theta^k\}$ имеет место для некоторого всюду плотного G_δ-множества значений $\theta > 1$. Этот результат существенно усилен в [2], где, в частности, показано, что такое множество может быть выбрано одним и тем же для всех решений системы (1_A).

В настоящей работе рассмотрены вопросы метрической типичности тех временных геометрических прогрессий $t = \theta^k$, по которым вычислимы показатели Ляпунова решений системы (1_A), а также исследована задача об универсальности [2] таких прогрессий для всех систем из произвольного однопараметрического семейства.

Обозначим через $\overline{\mu}$ внешнюю меру Лебега и положим $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Теорема 1. *Для любого решения $x(\cdot)$ системы (1_A) равенство $\lambda[x] = \lambda_x\{\theta^k\}$ имеет место для почти всех $\theta > 1$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 из [1] для любого решения $x(\cdot)$ системы (1_A) найдется $\alpha > 1$ такое, что справедливо равенство $\lambda[x] = \lambda_x\{\alpha^k\}$. Поэтому существует неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой имеет место соотношение $\lambda[x] = \lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^{-n_k}\ln|x(\alpha^{n_k})|$.

По теореме Г. Вейля [3, с. 663] найдется множество $\Xi = \Xi(\{n_k\}) \subset \mathbb{R}$, $\mu(\Xi) = 0$, такое, что при любом $b \in \mathbb{R}\setminus\Xi$ последовательность дробных частей чисел bn_k равномерно распределена на промежутке $[0, 1)$.

Функция $f(b) := \alpha^{-b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ липшицева на любом компакте и поэтому абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, мера Лебега множества $f(\Xi)$ равна нулю.

Справедливы включения $\mathbb{R}_+ \setminus f(\Xi) = f(\mathbb{R}) \setminus f(\Xi) \subset f(\mathbb{R}\setminus\Xi)$. Из них вытекает соотношение $f(\Xi) \supset \mathbb{R}_+ \setminus f(\mathbb{R}\setminus\Xi)$. Поэтому верны оценки $0 \leq \overline{\mu}(\mathbb{R}_+ \setminus f(\mathbb{R}\setminus\Xi)) \leq \overline{\mu}f(\Xi) = 0$, а значит,

$$\mu(\mathbb{R}_+ \setminus f(\mathbb{R}\setminus\Xi)) = 0. \tag{2}$$

Зафиксируем произвольное $1 < \theta \in f(\mathbb{R}\setminus\Xi)$. В силу включения $\log_\theta\alpha \in \mathbb{R}\setminus\Xi$ дробные доли последовательности $n_k\log_\theta\alpha$ равномерно распределены на промежутке $[0, 1)$. В частности, они всюду плотны в $[0, 1)$, т.е. найдутся неограниченно возрастающие последовательности натуральных чисел $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{p_l\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющие при всех $l \in \mathbb{N}$ оценке $|n_{k_l}\log_\theta\alpha - p_l| < l^{-1}$. Последняя оценка эквивалентна неравенству $|\log_\theta(\alpha^{n_{k_l}}\theta^{-p_l})| < l^{-1}$. Следовательно, верны оценки $\theta^{-l^{-1}} < \alpha^{n_{k_l}}\theta^{-p_l} < \theta^{l^{-1}}$. Поэтому $\lim\limits_{l\to+\infty} \alpha^{n_{k_l}}\theta^{-p_l} = 1$. Отсюда вытекает справедливость для почти всех $\theta > 1$ равенства $\lambda[x] = \lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^{-n_{k_l}}\ln\|x(\alpha^{n_{k_l}})\| = \lim\limits_{k\to+\infty} \theta^{-p_l}\ln\|x(\theta^{p_l})\|$. С учетом соотношения (2) теорема 1 доказана.

Лемма 1. *Пусть для любого* $W \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, *при всех* $w \in W$ *функция* $h_w(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *монотонно убывает на* $\mathbb{R}_+$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} h_w(t) \le 0$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется* t_ε *такое, что при всяком* $t \ge t_\varepsilon$ *внешняя мера множества* $G_t = G_t^\varepsilon := \{w \in W : \ h_w(t) \ge \varepsilon\}$ *удовлетворяет оценке* $\overline{\mu}(G_t^\varepsilon) < \varepsilon$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется неограниченная монотонно возрастающая последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\overline{\mu}(G_{t_k}^\varepsilon) \ge \varepsilon. \tag{3}$$

Для любых $0 \le s < t$, $w \in G_t$ по условию леммы выполнены оценки $\varepsilon \le h_w(t) \le h_w(s)$. Поэтому верно соотношение $w \in G_s$. Таким образом, при всех $0 \le s < t$ имеет место включение $G_s \supset G_t$. Отсюда и из (3) вытекают соотношения $\overline{\mu}(\bigcap_{k=1}^{+\infty} G_{t_k}) = \lim\limits_{k\to+\infty} \overline{\mu}(G_{t_k}) \ge \varepsilon$. Следовательно, найдется $w_0 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_{t_k}$. Тогда верны неравенства $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, h_{w_0}(t) \ge \underline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\, h_{w_0}(t_k) \ge \varepsilon$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого семейства функций* $g_w(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, *такого, что функция* $f(w,t) := t^{-1}\ln|g_w(t)|$ *равномерно ограничена и непрерывна во всех точках* $(w,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$, *при почти всех* $\theta > 1$ *равенство* $\xi_w := \lambda[g_w] = \xi_w(\theta) := \lambda_x\{\theta^k\}$ *имеет место для почти всех* $w \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $1 < a \in \mathbb{R}$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ и положим $\Theta := [a, a+1]$, $W := \{y \in \mathbb{R}^m : b_i \le y_i \le b_i + 1, \ i \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Пусть для всякого $t \ge 0$ $\Upsilon_t := \{(\theta, w) \in \Theta \times W : \ \sup\{f(w,\theta^k)|\ k \in \mathbb{N}, \ \theta^k \ge t\} > \xi_w(\theta) + \varepsilon\}$, $K_t := \{w \in W : \ \sup\limits_{s\ge t} f(w,s) > \xi_w + \varepsilon\}$. Тогда, согласно лемме 1, в которой последовательно положено $h_{(\theta,w)} := \sup\{f(w,\theta^k)|\ k \in \mathbb{N}, \ \theta^k \ge t\} - \xi_w(\theta)$, $h_w(t) := \sup\limits_{s\ge t} f(w,s) - \xi_w$, найдется τ такое, что при всех $t \ge \tau$ справедливы оценки

$$\overline{\mu}(\Upsilon_t) < \varepsilon, \quad \overline{\mu}(K_t) < \varepsilon. \tag{4}$$

Для всяких $w \in W$, $t \ge \tau$, $\delta > 0$ положим $M_{w,t}^\delta := \{\theta \in \Theta : \ \sup\{f(w,\theta^k)|\ k \in \mathbb{N}, \ \tau \le \theta^k \le t\} < \xi_w - \delta\}$, $D_t := \{w \in W : \ \overline{\mu}(M_{w,t}^\varepsilon) \ge \varepsilon\}$. В силу теоремы 1 верны равенства $\lim\limits_{t\to+\infty} \overline{\mu}(M_{w,t}^\varepsilon) = \overline{\mu}(M_{w,+\infty}^\varepsilon) = 0$. Тогда, согласно лемме 1, в которой положено $h_w(t) := \overline{\mu}(M_{w,t}^\varepsilon)$, найдется t_1 такое, что при всех $t \ge t_1$ справедлива оценка

$$\overline{\mu}(D_t) < \varepsilon. \tag{5}$$

Наконец, положим $H_t := \{w \in W : \ \sup\limits_{\tau\le s\le t} f(w,s) < \xi_w - \varepsilon\}$. Поскольку функция $h_w(t) := \xi_w - \sup\limits_{\tau\le s\le t} f(w,s)$ монотонно убывает на $\mathbb{R}_+$ и имеют место неравенства $\xi_w = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, f(w,t) \le \sup\limits_{\tau\le s} f(w,s) = \lim\limits_{t\to+\infty} \sup\limits_{\tau\le s\le t} f(w,s)$, то значение $\max\{0, h_w(t)\}$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Поэтому, согласно лемме 1, найдется t_2 такое, что при всех $t \ge t_2$ справедлива оценка

$$\overline{\mu}(H_t) < \varepsilon. \tag{6}$$

Положим $s := \max\{t_1, t_2\}$. В силу непрерывности функции $f(\cdot,\cdot)$ и компактности множества $W \times [\tau, s]$ найдется $n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $\tau \le t \le s$, $v, w \in W$, $|v - w| \le n_\varepsilon^{-1}$ верна оценка

$$|f(v,t) - f(w,t)| \le \varepsilon. \tag{7}$$

При этом существует $p_w := \max\{f(w,t) : \ t \in [\tau, s]\}$.

Для всякого натурального $i < n_\varepsilon^m$ однозначно определены $j_1, \ldots, j_m \in \{0, \ldots, n_\varepsilon - 1\}$ такие, что $i = \sum_{l=1}^m j_l n_\varepsilon^{m-1}$. Поэтому корректно определено множество

$$W_i := \prod_{l=1}^m [b_l + j_l n_\varepsilon^{-1}, b_l + (1 + j_l) n_\varepsilon^{-1}).$$

Тогда в силу (7) для любых $v, w \in W_i$ выполняется оценка

$$|p_v - p_w| \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Для всяких $w \in W$, $\delta > 0$ положим $B_w^\delta := \mathbb{R} \setminus \{t \in [\tau, s] : f(w,t) \geq \xi_w - \delta\}$. Зафиксируем произвольные $v \in W_i \setminus K_\tau$, $w \in W_i \setminus H_s$. Из неравенств (4), (6), (7) и (8) при всех $t \in B_w^{5\varepsilon}$ вытекают соотношения

$$\xi_v - f(v,t) = (\xi_v - p_v) + (p_v - p_w) + (p_w - \xi_w) + (\xi_w - f(w,t)) + (f(w,t) - f(v,t)) \geq \varepsilon.$$

Таким образом, справедливо включение $B_w^{5\varepsilon} \subset B_v^\varepsilon$. Поэтому верны соотношения

$$M_{w,s}^{5\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{\theta \in \Theta : \ \theta^k \in B_w^{5\varepsilon}\} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{\theta \in \Theta : \ \theta^k \in B_v^\varepsilon\} = M_{w,s}^\varepsilon. \tag{9}$$

Положим $L_i := \bigcap_{w \in W_i \setminus K_\tau} M_{w,s}^\varepsilon$, $J := \{i \in \mathbb{N} : \overline{\mu}(L_i) < \varepsilon\}$. Для всяких $i \notin J$, $w \in W_i \setminus K_\tau$ выполнены оценки $\overline{\mu}(M_{w,s}^\varepsilon) \geq \overline{\mu}(L_i) \geq \varepsilon$. Отсюда вытекает включение $W_i \setminus K_\tau \subset D_s$. Тогда в силу (5) верны неравенства $\sum_{i \notin J} \overline{\mu}(W_i) = \overline{\mu}(\bigcup_{i \notin J} W_i) \leq \overline{\mu}(K_\tau) + \overline{\mu}(D_s) \leq 2\varepsilon$. Следовательно, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \overline{\mu}\Bigl(\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} L_i \times W_i\Bigr) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \overline{\mu}(L_i \times W_i) = \Bigl(\sum_{i \in J} + \sum_{i \notin J}\Bigr) \overline{\mu}(L_i)\mu(W_i) \leq \\ &\leq \sum_{i \in J} \varepsilon \mu(W_i) + \sum_{i \notin J} \mu(\Theta)\mu(W_i) \leq \varepsilon\mu(W) + \mu(\Theta) \cdot 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Для всякого $\delta > 0$ положим $S^\delta := \{(\theta, w) \in \Theta \times W : \ \xi_w(\theta) < \xi_w - \delta\}$. При всех $w \in W_i \setminus (K_\tau \cup H_s)$ в силу (9) имеют место включения $\mathcal{S}_w := \{\theta \in \Theta : \ (\theta, w) \in S^{6\varepsilon} \setminus \Upsilon_s\} \subset M_{w,+\infty}^{5\varepsilon} \subset M_{w,s}^{5\varepsilon} \subset L_i$. Поэтому верны соотношения

$$\begin{aligned} S^{6\varepsilon} \setminus \Upsilon_s &= \bigcup_{w \in W} (w, \mathcal{S}_w) = \Bigl(\bigcup_{w \in K \cup H} (w, \mathcal{S}_w)\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{w \in W \setminus (K \cup H)} (w, \mathcal{S}_w)\Bigr) \subset \\ &\subset \Bigl(\bigcup_{w \in K \cup H} (w, \Theta)\Bigr) \cup \Bigl(\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} \bigcup_{w \in W_i \setminus (K \cup H)} (w, \mathcal{S}_w)\Bigr) \subset ((K \cup H) \times \Theta) \cup \Bigl(\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} W_i \times L_i\Bigr), \end{aligned}$$

откуда в силу (4), (6) и (10) вытекает неравенство

$$\overline{\mu}(S^{6\varepsilon}) \leq 6\varepsilon. \tag{11}$$

Для любого $k_0 \in \mathbb{N}$ верны соотношения $\mathcal{B}_W := \{(\theta, w) \in \Theta \times W : \ \xi_w \neq \xi_w(\theta)\} \subset \bigcup_{k=k_0}^{+\infty} S^{2^{-k}}$. Поэтому ввиду (11) справедливы оценки $\overline{\mu}(\mathcal{B}) \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \overline{\mu}(S^{2^{-k}}) \leq 2^{1-k_0}$, из которых в силу произвольности выбора k_0 вытекает равенство $\mu(\mathcal{B}) = 0$.

Используя теорему Фуббини, получаем существование множества $\Xi = \Xi(W) \subset \Theta$, $\mu(\Theta \setminus \Xi) = 0$, такого, что для всех $\theta \in \Xi$ верно равенство

$$\mu\{w : \ (\theta, w) \in \mathcal{B}_W\} = 0. \tag{12}$$

Имеет место равенство $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}^m} W(i)$. Тогда из (12) получаем для всех $\theta \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^m} \Xi(W(i))$ соотношения $\mu\{w : (\theta, w) \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{B}_{W(i)}\} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^m} \mu(\mathcal{B}_{W(i)}) = 0$. При этом справедливы равенства $\overline{\mu}(\Theta \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^m} \Xi(W(i))) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^m} \overline{\mu}(\Theta \setminus \Xi(W(i))) = 0$. Теорема 2 доказана.

Лемма 2. *Для любого счетного множества* $\{q_k: \ k\in\mathbb{N}\}\subset(1,+\infty)$ *найдется кусочно-непрерывная функция* $f(\cdot):\mathbb{R}_+\to\{-1,1\}$ *такая, что функция* $g_f(t):=\exp\{\int_0^t f(s)\,ds\}$ *удовлетворяет при всех* $k\in\mathbb{N}$ *оценке* $\xi_f:=\lambda[g_f]>\xi_f(q_k):=\lambda_{g_f}\{q_k^j\}$.

Доказательство. Для всяких $k,j\in\mathbb{N}$ положим $p_{k,j}:=q_k^j(1-2^{-k-1}(1-q_k^{-1}))$, $M_k^j:=$ $:=[p_{k,j},q_k^j)$, $M_k:=(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty}M_k^j)\setminus[0,e^k)$, $M:=\bigcup_{k=1}^{+\infty}M_k$.

Пусть $f(t)=-1$ при всех $t\in M$ и $f(t)=1$ для каждого $t\in\mathbb{R}_+\setminus M$.

Зафиксируем произвольное $t\in\mathbb{R}_+$ и положим $l=l_t:=1+[\ln t]$, $m_k=m_k(t):=1+[\log_{q_k}t]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда справедливы равенства $[0,t)\cap M=\bigcup_{k=1}^{l}[0,t)\cap M_k=$ $=\bigcup_{k=1}^{l}\bigsqcup_{j=1}^{m_k}[0,t)\cap M_k^j$. Поэтому ввиду того, что граница (обозначаемая через ∂) любого объединения конечного числа промежутков вложена в объединение их границ, верны включения

$$\partial([0,t)\cap M)\subset\bigcup_{k=1}^{l}\bigsqcup_{j=1}^{m_k}\partial([0,t)\cap M_k^j)\subset\bigcup_{k=1}^{l}\bigsqcup_{j=1}^{m_k}\partial M_k^j=\bigcup_{k=1}^{l}\bigsqcup_{j=1}^{m_k}\{p_{k,j},q_k^j\}.$$

Отсюда, поскольку функция $f(\cdot)$ непрерывна всюду вне множества $\partial([0,t)\cap M)$, вытекает ее кусочная непрерывность на $[0,t)$, а следовательно, и на всем $\mathbb{R}_+$.

Найдутся натуральные числа $j=j_t$ и $k=k_t$ такие, что выполнено включение $t\in[q_k^{j-1},q_k^j)$. Тогда имеют место оценки

$$\mu([0,t)\cap M_k)\le\mu\biggl(\bigsqcup_{j=1}^{m_k}[0,t)\cap M_k^j\biggr)=\sum_{j=1}^{m_k}\mu([0,t)\cap M_k^j)=\sum_{j=1}^{m_k}\frac{q_k^j}{2^{k+1}}(1-q_k^{-1})\le\frac{q_k^j(1-q_k^{-1})}{2^{k+1}(1-q_k)}\le\frac{t}{2^{k+1}},$$

из которых следуют неравенства

$$\mu([0,t)\cap M)\le\sum_{k=1}^{+\infty}\mu([0,t)\cap M_k)\le t\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k-1}=\frac{t}{2}.$$

Поэтому справедливы соотношения

$$\ln f(t)=\mu([0,t)\setminus M)-\mu([0,t)\cap M)=\mu([0,t))-2\mu([0,t)\cap M)\ge0,$$

из которых в силу произвольности выбора $t\in\mathbb{R}_+$ вытекает оценка $\xi_f\ge0$.

Для любых $k,j\in\mathbb{N}$ верны равенства $c_k:=2^{-k-1}(1-q_k^{-1})=1-p_{k,j}q_k^{-j}=-q_k^{-j}\int_{p_{k,j}}^{q_k^j}f(t)\,dt=$ $=q_k^{-j}(\ln g_f(p_{k,j})-\ln g_f(q_k^j))$, откуда имеем оценки

$$\xi_f\ge\varlimsup_{j\to+\infty}p_{k,j}^{-1}\ln g_f(p_{k,j})=\varlimsup_{j\to+\infty}(p_{k,j}^{-1}(q_k^jc_k+\ln g_f(q_k^j)))\ge c_k+\varlimsup_{j\to+\infty}(p_{k,j}^{-1}\ln g_f(q_k^j))\ge c_k+\xi_f(q_k).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *В предположении справедливости континуум-гипотезы найдется однопараметрическое семейство кусочно-непрерывных функций* $f_w(\cdot):\mathbb{R}_+\to\{-1,1\}$, $w\in\mathbb{R}$, *таких, что при всяком* $s>1$ *равенство* $\xi_{f_w}=\xi_{f_w}(s)$ *имеет место только для счетного множества значений* $w\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $<$ – отношение сравнения порядковых чисел (ординалов) [4, с. 236]. Для каждого ординала a определено множество $W_a:=\{b: \ b<a\}$. Обозначим через $|a|$ его мощность.

Согласно определению 8.1.1 из [4, с. 275], найдется ординал Ω такой, что справедливо равенство

$$W_\Omega=\{a: \ |a|=|\mathbb{N}|\}. \tag{13}$$

Тогда в силу следствия 8.1.3 из [4, с. 276] верна оценка $|\Omega|>|\mathbb{N}|$, откуда при выполнении континуум-гипотезы вытекает равенство $|\Omega|=|\mathbb{R}|$. Поэтому найдутся биекции $i:(1,+\infty)\to W_\Omega$, $j:\mathbb{R}\to W_\Omega$.

Для любого $w \in \mathbb{R}$ в силу (13) множество $W_{j(w)}$ не более чем счетно. Следовательно, не более чем счетно и равномощное ему множество $S_w := \{s > 1 : \ i(s) < j(w)\} = \{s > 1 : \ i(s) \in \in W_{j(w)}\}$. Отсюда, согласно лемме 2, вытекает существование кусочно-непрерывной функции $f_w(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \{-1, 1\}$ такой, что для всех $s \in S_w$ имеет место неравенство $\xi_{f_w} > \xi_{f_w}(s)$. Тогда при всех $1 < s \in \mathbb{R}$ верны соотношения $\{w \in \mathbb{R} : \ \xi_{f_w} = \xi_{f_w}(s)\} \subset \{w \in \mathbb{R} : \ s \notin S_w\} = \{w \in \mathbb{R} : i(s) \geq j(w)\}$, а из (13) вытекает счетность последнего множества. Теорема доказана.

Теорема 4. *Найдутся система (1_A) с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами и, для каждого $\alpha > 5$ матрица $Q(\cdot) = Q_{\alpha,A}(\cdot)$, $\|Q(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, такие, что неравенство $\lambda[x] \neq \lambda_x\{\alpha^k\}$ имеет место для некоторого решения $x(\cdot) = x_{A+Q}(\cdot)$ возмущенной системы (1_{A+Q}).*

Доказательство. Зафиксируем некоторое $1 < q < \sqrt{5}/2$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $S_k := [q^k, k + q^k)$ и обозначим $S := \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$.

Определим функцию $a(\cdot) : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, полагая $a(t) = 0$ при $t \in S$, $a(t) = 1$ при всех остальных $t \in \mathbb{R}_+ \setminus S$. Пусть $A(\cdot) = \operatorname{diag}[a(\cdot), -a(\cdot)]$.

Для всяких $\theta > \sqrt{5}$, $i \in \mathbb{N}$ пусть $k_i = k_i(\theta) = [i \log_q \theta] + 1$. Очевидно, что имеют место соотношения

$$\theta^i \leq q^{k_i} < q\theta^i. \tag{14}$$

Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством $Q(t) = Q_\theta(t) = 2^{-1}\pi k_i^{-1} J$ при $t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{k_i} \subset S$, где $J \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол $\pi/2$, и положим $Q(t) = 0$ при всех остальных $t \geq 0$. Введем обозначение $p_i := k_i + q^{k_i}$, $i \in \mathbb{N}$, и для всяких $s, t \in \mathbb{R}_+$ положим $b(t, s) := \exp\{\int_s^t a(\tau)\,d\tau\}$. Обозначим через $X_A(t, \tau)$ матрицу Коши системы (1_A). При всех $t \in [p_i, q^{k_{i+1}}) \subset \mathbb{R}_+ \setminus S$, $i \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ имеют место соотношения

$$X_{A+Q}(t, q^{k_i})x = X_{A+Q}(t, p_i) X_{A+Q}(p_i, q^{k_i})x = X_A(t, p_i) X_Q(p_i, q^{k_i})x =$$
$$= \operatorname{diag}[b(t, p_i), b(p_i, t)] J (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (-b(t, p_i)x_2, b(p_i, t)x_1)^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

Обозначим $e_1 := (1, 0)^{\mathrm{T}}$, $e_2 := (0, 1)^{\mathrm{T}}$, и пусть $l_j = \{\beta e_j : \ \beta \in \mathbb{R}\}$, $j \in \{1, 2\}$, – координатные оси. Из (15) вытекает при всех $i \in \mathbb{N}$ равенство $X_{A+Q}(q^{k_{i+1}}, q^{k_i}) l_j = l_{3-j}$, откуда следует соотношение $X_{A+Q}(q^{k_{i+2}}, q^{k_i}) l_j = l_j$. Тогда для $m \in \{0, 1\}$ справедливы равенства

$$X_{A+Q}(q^{k_{2i+m}}, q^{k_1}) l_1 = X_{A+Q}(q^{k_{2i+m}}, q^{k_{2i+1}}) \left(\prod_{n=0}^{i-1} X_{A+Q}(q^{k_{2i-2n+1}}, q^{k_{2i-2n-1}}) \right) l_1 =$$
$$= X_{A+Q}(q^{k_{2i+m}}, q^{k_{2i+1}}) l_1 = l_{2-m},$$

из которых для любого решения $x(\cdot)$ системы (1_{A+Q}) с начальным условием $x(q^{k_1}) \in l_1$ получаем соотношение

$$x(q^{k_{2i+m}}) = e_{2-m} |x(q^{k_{2i+m}})|. \tag{16}$$

В силу (14) верно равенство

$$S \cap [q^{k_{i-1}}, \theta^i) = M_i := \bigsqcup_{j=k_{i-1}}^{k_i - 1} S_j. \tag{17}$$

Справедливы соотношения

$$\mu(M_i) = \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} j \leq \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} k_i - 1 \leq i \log_q \theta([i \log_q \theta] - [(i-1)\log_q \theta] - 1) \leq i \log_q^2 \theta. \tag{18}$$

Пусть $m := i - 2[i/2]$. Тогда в силу (15), (16) верны соотношения

$$x(\theta^i) = X_{A+Q}(\theta^i, q^{k_{i-1}})e_{1+m}|x(q^{k_{i-1}})| = b(\theta^i, k_{i-1} + q^{k_{i-1}})^{(-1)^{1+m}}|x(q^{k_{i-1}})|e_{2-m}.$$

Поэтому справедливы равенства

$$\ln|x(\theta^i)| - \ln|x(q^{k_{i-1}})| = (-1)^{1+m}\int\limits_{p_{i-1}}^{\theta^i} a(s)\,ds = (-1)^{1+i}\mu([p_{i-1},\theta^i)\setminus S) = (-1)^{1+i}\mu([q^{k_{i-1}},\theta^i)\setminus S).$$

Отсюда, учитывая (17), получаем оценку

$$(-1)^{1+i}\ln\frac{|x(\theta^i)|}{|x(q^{k_{i-1}})|} = \mu([q^{k_{i-1}},\theta^i)\setminus M_i) \geq \theta^i - q^{k_{i-1}} - \mu(M_i),$$

из которой в силу (14), (18) вытекают неравенства

$$(-1)^{i+1}\ln|x(\theta^i)| \geq (\theta^i - q\theta^{i-1}) - \mu(M_i) - |\ln|x(q^{k_{i-1}})|| \geq$$

$$\geq (\theta^i - q\theta^{i-1}) - i\log_q^2\theta - \|A(\cdot)\|q^{k_{i-1}} > \theta^i(\theta - 2q) - i\log_q^2\theta.$$

Последние в свою очередь влекут за собой справедливость при всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}$ оценки $(-1)^{i+1}\theta^{-i}\ln|x(\theta^i)| > c(q,\theta) := 1 - 2q\theta^{-1} - \sqrt{5}/2 + q > 0$.

Таким образом, имеют место соотношения $\lambda[x] \geq \lambda_x\{\theta^{2k-1}\} > 0 > \lambda_x\{\theta^{2k}\}$, откуда (для $\alpha = \theta^2$) и вытекает утверждение теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров Е.К.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 12. С. 1710–1711.
2. *Барабанов Е.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1592–1600.
3. Мат. энцикл. Т. 3. М., 1982.
4. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М., 1979.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
08.09.2005 г.