П. И. Кузнецов, Распространение электромагнитных волн в многопроводной системе,
УМН, 1949, том 4, выпуск 1, 209–212

ДОКТОРСКИЕ ДИССЕРТАЦИИ

П. И. Кузнецов. Распространение электромагнитных волн в многопроводной системе (аннотация докторской диссертации) [1].

Диссертация защищалась 18 февраля 1948 г. в Учёном Совете физического факультета и НИИ физики МГУ.

Официальные оппоненты — А. Н. Тихонов, А. А. Соколов, П. Е. Краснушкин, П. А. Котов.

Задача о распространении электромагнитных волн в многопроводной системе описывается уравнениями

$$-\frac{\partial}{\partial x}(V)=[R](J)+[L]\frac{\partial}{\partial t}(J), \qquad -\frac{\partial}{\partial x}(J)=[G](V)+[C]\frac{\partial}{\partial t}(V), \tag{1}$$

где (V) и (J) — колонные матрицы, элементы которых $V_r(x, t)$ и $J_r(x, t)$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ являются соответственно напряжениями относительно нулевого провода и токами отдельных проводов; $[R]$, $[L]$, $[G]$ и $[C]$ — квадратные матрицы n-го порядка соответственно сопротивления, индуктивности, проводимости изоляции и ёмкости.

Начальные условия следующие:

$$V_r(x, t)=0, \quad J_r(x, t)=0. \tag{2}$$

Граничные условия получаются в виде системы линейных дифференциальных уравнений из законов Кирхгофа.

Задача о распространении электромагнитных волн вдоль полубесконечного однородного провода $(0<x\leqslant\infty)$ при включении источника постоянного тока приводится к решению системы уравнений (1) при $n=1$, т. е.

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=RJ+L\frac{\partial J}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial J}{\partial x}=GV+C\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (t>0). \tag{3}$$

Начальные и граничные условия следующие:

$$V(x, 0)=0, \quad J(x, 0)=0, \quad V(0, t)=1. \tag{4}$$

Решение этой задачи, как известно, выражается через контурные интегралы

$$V(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\exp(\lambda t-\mu x)\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{5}$$

$$J(x, t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sqrt{\frac{\lambda+2\beta}{\lambda+2\alpha}}\exp(\lambda t-\mu x)\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{6}$$

---

[1]) Выдержки из этой диссертации опубликованы в журнале «Прикладная математика и механика» т. XI (1947), стр. 267—270, 555—560, 615—620; т. XII, (1948), стр. 141—148.

которые обычно приводятся к виду

$$V(x,\ t)=\left[e^{-p\xi}+c\xi\int\limits_{\xi}^{t}e^{-p\tau}\frac{I_1(c\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}\,d\tau\right]H(t-\xi),$$

$$J(x,\ t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\left[e^{-pt}I_0(c\sqrt{t^2-\xi^2})+2\beta\int\limits_{\xi}^{t}e^{-p\tau}I_0(c\sqrt{\tau^2-\xi^2})\,d\tau\right]H(t-\xi),$$

где $I_n(z)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента и

$$\alpha=\frac{R}{2L},\quad p=\alpha+\beta,\quad v=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad H(t-\xi)=0\ \text{ при }\ t<\xi,$$

$$\mu=\frac{1}{v}\sqrt{(\lambda+2\alpha)(\lambda+2\beta)}$$

$$\beta=\frac{G}{2C},\quad c=\alpha-\beta,\quad \xi=\frac{x}{v},\qquad H(t-\xi)=1\ \text{ при }\ t>\xi.$$

В диссертации интегралы вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}R_1(\lambda,\sqrt{A\lambda^2+B\lambda+C})\exp\left[\frac{z_1}{2}(a\lambda+b+\sqrt{A\lambda^2+B\lambda+C})\right]d\lambda \tag{7}$$

выражается через функцию Ломмеля и Бесселя; при этом R_1 есть рациональная функция от λ и указанного радикала, z_1 — параметр, a, b, A, B, C — некоторые постоянные; интегралы берутся по замкнутому контуру γ_1, расположенному в конечной части плоскости и содержащему все особые точки подинтегральной функции.

В работе вводятся функции Ломмеля от двух мнимых аргументов. Эти функции определяются с помощью разложений

$$\Upsilon_n(w,\ z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m}I_{n+2m}(z),\qquad \theta_n(w,\ z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m}I_{n+2m}(z). \tag{8}$$

На основании этого представления изучаются свойства этих функций. Даются таблицы значений функций Υ_1, Υ_2, θ_0, θ_1 для $0<z<6$, $0<w<6$ через одинаковые интервалы (равные единице) по z и w.

При помощи полученных результатов контурные интегралы (5) и (6) выражаются так:

$$V(x,\ t)=e^{-pt}\left[I_0(z)+\Upsilon_1(w_1,\ z)+\Upsilon_2(w_1,z)+\Upsilon_1(w_2,\ z)+\Upsilon_2(w_2,\ z)\right]H(t-\xi), \tag{9}$$

$$J(x,\ t)=\sqrt{\frac{G}{R}}e^{-pt}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}I_0(z)+\Upsilon_1(w_1,z)+\Upsilon_2(w_1,\ z)-\Upsilon_1(w_2,\ z)-\Upsilon_2(w_2,\ z)\right]\times H(t-\xi), \tag{10}$$

где

$$m=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta},\quad n=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta},\quad w_1=m^2(t-\xi),\quad w_2=n^2(t-\xi),\quad z=c\sqrt{t^2-\xi^2}.$$

В работе показано, что найденное решение (9), (10) удовлетворяет уравнениям (3) и начальным и граничным условиям (4). Далее определяются величины напряжения и тока фронта волны, а также их предельные значения при установившемся режиме. В частном случае при $\alpha=\beta$ получаются общеизвестные формулы для линии без искажения. Приводится численный пример.

Рассматривается задача о распространении электромагнитных волн вдоль конечной однопроводной линии с приёмно-передающими устройствами на концах. При помощи метода суперпозиции доказывается, что решение этой задачи выражается через функции Ломмеля и Бесселя. В качестве примера рассматривается линия с электромагнитным приёмником на дальнем конце.

Задача, рассмотренная при включении источника постоянного тока, может быть обобщена, — метод решения задачи остаётся прежним, если включён источник переменного тока. В случае любой нагрузки достаточно применить интеграл Дюгамеля. Полученные результаты распространяются на случай передачи импульсов.

Изучается случай двух проводов ($n = 2$), к обоим концам которых присоединены приёмно-передающие устройства с источниками питания на ближних концах. Уравнения (1) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_1}{\partial x} &= R_1 J_1 + L_1 \frac{\partial J_1}{\partial t} + M \frac{\partial J_2}{\partial t}, & -\frac{\partial J_1}{\partial x} &= G_1 V_1 + C_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} - G_{12} V_2 - C_{12} \frac{\partial V_2}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V_2}{\partial x} &= R_2 J_2 + L_2 \frac{\partial J_2}{\partial t} + M \frac{\partial J_1}{\partial t}, & -\frac{\partial J_2}{\partial x} &= G_2 V_2 + C_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} - G_{12} V_1 - C_{12} \frac{\partial V_1}{\partial t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение строится в интервале $0 < x < l$ для значений времени $t > 0$ при начальных условиях

$$V_1(x, 0) = V_2(x, 0) = 0, \quad J_1(x, 0) = J_2(x, 0) = 0. \tag{12}$$

Граничные условия для линии задаются системой линейных дифференциальных уравнений, получаемых из законов Кирхгофа. Доказывается, что система уравнений (11) при некоторых условиях является вполне гиперболической, а задача относится к смешанным задачам второго типа, т. е. к нестационарным задачам. Решение при помощи преобразования Лапласа выражается через контурные интегралы.

Далее рассматривается задача о распространении электромагнитных волн вдоль двух полубесконечных однопроводных линий при условии, что к ближнему концу первого провода подключено напряжение, равное единице, а ближний конец второго провода заземлён, что соответствует уравнениям (11), начальным условиям (12) и граничным условиям

$$V_1(0, t) = 1, \quad V_2(0, t) = 0.$$

Решение выражается при помощи контурных интегралов

$$\begin{aligned} V_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1+\mu}{2p} e^{pt - r_1 x} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1-\mu}{2p} e^{pt - r_3 x} dp, \\ J_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{w_1}{2r_1}(1+\mu) + \frac{w_{12}}{r_1} \mu_1 \right] e^{pt - r_1 x} dp + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{w_1}{2r_3}(1-\mu) - \frac{w_{12}}{r_3} \mu_1 \right] e^{pt - r_3 x} dp; \\ V_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mu_1}{p} e^{pt - r_1 x} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mu_1}{p} e^{pt - r_3 x} dp, \\ J_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{w_{12}}{2r_1}(1+\mu) + \frac{w_2}{r_1} \mu_1 \right] e^{pt - r_1 x} dp + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p} \left[-\frac{w_{12}}{2r_3}(1-\mu) + \frac{w_2}{r_3} \mu_1 \right] e^{pt - r_3 x} dp. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь

$$\mu = \frac{z_1 w_1 - z_2 w_2}{\sqrt{A^2 - 4B}}, \quad \mu_1 = \frac{z_2 w_{12} - z_{12} w_1}{\sqrt{A^2 - 4B}}, \quad r_k = \pm \sqrt{-\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}},$$

$$A = 2 z_{12} w_{12} - z_1 w_1 - z_2 w_2, \quad B = (z_1 z_2 - z_{12}^2)(w_1 w_2 - w_{12}^2),$$

$$A^2 - 4B = (z_1 w_1 - z_2 w_2)^2 + 4 (z_1 w_{12} - z_{12} w_2)(z_2 w_{12} - z_{12} w_1),$$

где

$$z_k = R_k + p L_k, \quad w_k = G_k + p C_k \quad (k = 1, 2), \quad z_{12} = pM, \quad w_{12} = G_{12} + p C_{12}.$$

Для полученного таким образом формального решения показывается, что оно удовлетворяет условиям задачи. Решение этой задачи представляется дважды разрывным, что соответствует тому факту, что в каждом проводе распространяются две волны с различными скоростями:

$$\frac{1}{v_1} = \sqrt{\frac{L_1C_1 + L_2C_2 - 2MC_{12}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4\,(L_1C_{12} - C_2M)\,(L_2C_{12} - C_1M)}}\,,$$

$$\frac{1}{v_1} = \sqrt{\frac{L_1C_1 + L_2C_2 - 2MC_{12}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4\,(L_1C_{12} - C_2M)\,(L_2C_{12} - C_1M)}}\,.$$

Профили волн выражаются интегралами (13). Если $A^2 - 4B$ является полным квадратом, то интегралы (13) выражаются через функции Ломмеля и Бесселя. В качестве примера рассматривается симметрированная линия ($z_1 = w_1$, $z_2 = w_2$) и приводятся численные результаты.

Изложенные способы можно применить к решению задачи для линий с приёмно-передающими устройствами при любых источниках питания. В качестве иллюстрации рассматривается задача о двух конечных проводах при следующих граничных условиях: к ближнему концу первого провода подключён источник постоянного тока, а второй провод заземлён и оба дальних конца изолированы.