В. И. Федосеев, Ф. В. Широков, Пространственно-временная нелинейная фильтрация для пуассоновских случайных полей,
Пробл. передачи информ., 1976, том 12, выпуск 1, 29–40

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XII 1976 Вып. 1

УДК 621.391.1:519.27

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В. И. Федосеев, Ф. В. Широков

Рассматривается задача оценки диффузионного процесса $\mathbf{x}_t$ по результатам наблюдений пуассоновского случайного поля $N(t, \xi)$, параметр которого (функция интенсивности) зависит от процесса $\mathbf{x}_t$. На основе результатов Б. И. Григелиониса [11] получено стохастическое уравнение для плотности вероятности процесса $\mathbf{x}_t$; в гауссовском приближении выведены уравнения для оценки $\hat{\mathbf{x}}_t$ и матрицы ковариаций $\mathbf{D}_t$; рассмотрены два примера.

§ 1. Введение

Методы нелинейной оптимальной фильтрации на основе теории условных марковских процессов, развитие которых было начато работами Р. Л. Стратоновича [1–3], в настоящее время широко используются при решении самых разнообразных задач. В таких задачах, как правило, результат наблюдения является некоторой смесью процесса, подлежащего оценке, и белого гауссовского шума. В связи с развитием радиотехники оптического диапазона возникают задачи, в которых сигнал, несущий информацию, и помехи модулируют по интенсивности пуассоновский случайный процесс или пуассоновское случайное поле событий. Последняя модель справедлива, например, при воздействии на светочувствительную площадку широкополосного светового излучения, под действием которого каждый элемент площадки испускает фотоэлектроны; плотность потока фотоэлектронов пропорциональна интенсивности воздействующего излучения. Эта интенсивность может быть различной в разных точках площадки и меняющейся во времени.

Имеется ряд работ, в которых анализ пуассоновских случайных процессов с переменным параметром проводится методами теории проверки гипотез и теории оценок (например, [4–8]). Работы же, посвященные фильтрации процессов, в которых наблюдаемая компонента разрывна (в частности, является пуассоновским процессом), начали появляться сравнительно недавно ([9–11]). В [9] выведено уравнение для оценки ненаблюдаемого процесса в случае, когда наблюдаемый и ненаблюдаемый процессы выражаются через некоторый пуассоновский процесс с переменным параметром. В [10] рассмотрена задача фильтрации марковского процесса, модулирующего по интенсивности наблюдаемый пуассоновский процесс, получены уравнения для апостериорной характеристической функции и апостериорной плотности вероятности. Наиболее общие результаты по теории фильтрации, охватывающие фильтрацию как непрерывных, так и разрывных процессов, получены Б. И. Григелионисом (см. [11]).

Во всех перечисленных работах изучается фильтрация в конечномерном пространстве, когда наблюдаемый процесс является вектором конечного числа измерений. Вместе с тем целый ряд прикладных задач, в том числе и рассматриваемая в настоящей статье, требует применения теории фильтрации в «функциональном» случае, когда наблюдаемый объект представляет собой случайное поле. Для пуассоновского случайного поля задачу удается свести к фильтрации векторного случайного процесса. Нами на основе результатов Б. И. Григелиониса [11] получены уравнения для апостериорной характеристической функции и апостериорной плотности вероятности ненаблюдаемого диффузионного процесса, модулирующего по интенсивности пуассоновское случайное поле. Рассмотрено также гауссовское приближение апостериорной плотности, выведены уравнения для оценки ненаблюдаемого процесса в этом случае.

§ 2. Уравнение для апостериорной плотности

Будем рассматривать ограниченную область G на плоскости, в некоторых точках которой в некоторые моменты времени происходят события (например, испускаются фотоэлектроны). На плоскости задана система декартовых координат ξ', ξ'' таким образом, что рассматриваемая область находится в первом квадранте и для всех $\xi \in G$, $|\xi| > \varepsilon > 0$. Обозначим через $N(t, \xi)$ число событий за время от 0 до t в прямоугольнике $[0, \xi') \times \times [0, \xi'')$, где ξ', ξ'' — координаты вектора ξ. Если точки, в которых происходят события, и соответствующие им моменты времени случайны, то $N(t, \xi)$, $t \geqslant 0$, $\xi' \geqslant 0$, $\xi'' \geqslant 0$ есть случайное поле событий. Все дальнейшие выводы и результаты остаются справедливыми, когда ξ — вектор произвольного конечного числа измерений, однако в целях наглядности будем считать, что ξ — двумерный вектор.

Введем также обозначения: $N(\Delta t, \Delta\xi)$ — число событий за время от t до $t+\Delta t$ в прямоугольнике $\Delta\xi = [\xi', \xi'+\Delta\xi') \times [\xi'', \xi''+\Delta\xi'')$ ($N(\Delta t, \Delta\xi)$ зависит также от t и от ξ); N_t^G — совокупность случайных величин $N(\tau, \xi)$, $\tau \in [0, t)$, $\xi \in G$, т. е. случайное поле в области G на интервале времени $[0, t)$; в процессе эксперимента наблюдается реализация этого случайного поля.

Случайное поле $N(t, \xi)$ является пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t, \xi)$, если:

1. $N(\Delta t, \Delta\xi)$ для любых Δt и любых прямоугольников $\Delta\xi$ является пуассоновской случайной величиной с параметром

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \int_{\Delta\xi} \lambda(\tau, \xi)\, d\tau\, d\xi. \tag{1}$$

2. $N(\Delta t_1, \Delta\xi_1)$ и $N(\Delta t_2, \Delta\xi_2)$ для любых непересекающихся параллелепипедов $[t_1, t_1+\Delta t_1) \times [\xi_1', \xi_1'+\Delta\xi_1') \times [\xi_1'', \xi_1''+\Delta\xi_1'')$ и $[t_2, t_2+\Delta t_2) \times \times [\xi_2', \xi_2'+\Delta\xi_2') \times [\xi_2'', \xi_2''+\Delta\xi_2'')$ являются независимыми случайными величинами. Интенсивность $\lambda(t, \xi)$ может быть либо детерминированной функцией своих аргументов, либо реализацией некоторой случайной функции. Будем считать, что $\lambda(t, \xi)$, $t \geqslant 0$, $\xi \in G$ — положительная функция и при любом конечном t

$$\mathbf{M}\left\{ \int_0^t \int_G \lambda(\tau, \xi)\, d\xi\, d\tau \right\} < \infty \tag{2}$$

($\mathbf{M}$ — символ математического ожидания).

Предположим далее, что $\lambda(t, \xi) = \lambda(t, \xi, \mathbf{x}_t)$, причем $\lambda(t, \xi, \mathbf{x})$ — детерминированная функция, а $\mathbf{x}_t$, $t \geqslant 0$ — n-мерный случайный процесс, удовлетворяющий стохастическому уравнению Ито

$$(3) \qquad \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_t(\mathbf{x}_t)\,dt + \int_0^t \mathbf{B}_t(\mathbf{x}_t)\,d\mathbf{w}_t.$$

Здесь $\mathbf{a}_t(\mathbf{x}_t)$ — вектор сноса с коэффициентами $a_i(\mathbf{x}_t, t)$, $\mathbf{B}_t(\mathbf{x}_t)$ — матрица диффузии с элементами $b_{ik}(\mathbf{x}_t, t)$, $\mathbf{w}_t$ — стандартный n-мерный винеровский процесс, независимый от поля N_t^G. Будем считать, что коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям существования и единственности решения (см. [12]). По результатам наблюдения случайного поля N_t^G требуется оценить значение случайного процесса $\mathbf{x}_t$ в момент времени t.

Сопоставим каждой реализации случайного поля N_t^G реализацию двумерного случайного процесса $\xi_N(t)$ следующим образом: если для некоторой реализации случайного поля события имеют место в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_M$ области G в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M$ соответственно, то для сопоставляемой реализации случайного процесса положим

$$\xi_N(t) = \begin{cases} \xi_0, & t < \tau_1, \\ \sum_{i=0}^{k} \xi_i, & t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, M-1, \\ \sum_{i=0}^{M} \xi_i, & t \geqslant \tau_M, \end{cases}$$

где ξ_0 — произвольная точка из G; эта реализация имеет скачки величиной $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M$ в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M$. Введенный при таком сопоставлении случайный процесс $\xi_N(t)$ имеет непрерывные справа траектории, обладающие пределом слева. Он задает целочисленную случайную меру $p(t, \Gamma)$, значение которой на множествах вида $[0, t)\times\Gamma$, $\Gamma\subset G$ совпадает с числом событий за время от 0 до t в Γ (строгое определение см. в [11, 13]). Заметим, что в силу (1)

$$(4) \qquad \mathbf{M}\,\{p(t, \Gamma)\,|\,\mathbf{x}_\tau, 0 \leqslant \tau < t\} = \int_0^t \int_\Gamma \lambda(\tau, \xi, \mathbf{x}_\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Рассмотрим также меру $q(t, \Gamma)$

$$q(t, \Gamma) = p(t, \Gamma) - \int_0^t \int_\Gamma \lambda(\tau, \xi, \mathbf{x}_\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Если $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k+1}$ — некоторая последовательность, то

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\{q(t_{k+1}, \Gamma) - q(t_k, \Gamma)\,|\,q(t_k, \Gamma), q(t_{k-1}, \Gamma), \ldots, q(t_1, \Gamma)\} = \\ &= \mathbf{M}\{\mathbf{M}[q(t_{k+1}, \Gamma) - q(t_k, \Gamma)\,|\,q(t_k, \Gamma), q(t_{k-1}, \Gamma), \ldots \\ &\ldots, q(t_1, \Gamma), \mathbf{x}_\tau, 0 \leqslant \tau < t_{k+1})]\,|\; q(t_k, \Gamma), q(t_{k-1}, \Gamma), \ldots, q(t_1, \Gamma)\} = \\ &= \mathbf{M}\{\mathbf{M}[q(t_{k+1}, \Gamma) - q(t_k, \Gamma)\,|\,\mathbf{x}_\tau, 0 \leqslant \tau < t_{k+1}]\,| \\ &q(t_k, \Gamma), q(t_{k-1}, \Gamma), \ldots, q(t_1, \Gamma)\} = 0 \end{aligned}$$

(последнее равенство вытекает из определения $q(t, \Gamma)$ и (4)). Следовательно, $q(t, \Gamma)$ является мартингалом по t (см. [14], стр. 88).

Из сказанного и результатов работы [13] (см. теорему 1 и следствие 1) следует, что случайный процесс $\xi_N(t)$ может быть представлен в виде стохастического интеграла по «стандартной» пуассоновской мере:

$$\xi_N(t)=\int_0^t\int_G \xi p(d\tau, d\xi)=\int_0^t\int_G F_1(\tau,\xi,\mathbf{x}_\tau)\tilde{p}(d\tau,d\xi), \tag{5}$$

где $\tilde{p}(d\tau, d\xi)$ — «стандартная» пуассоновская мера с интенсивностью скачков $|\xi|^{-(m+1)}$ (m — размерность пространства значений изучаемого процесса), а вид функции $F_1(\tau, \xi, \mathbf{x}_\tau)$ может быть определен из леммы 4 в [13].

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы по результатам наблюдения случайного процесса $\xi_N(t)$, удовлетворяющего уравнению (5), оценить ненаблюдаемый процесс $\mathbf{x}_t$, удовлетворяющий уравнению (3). В такой постановке рассматриваемая задача является частным случаем задачи фильтрации, исследованной Б. И. Григелионисом в [11]. Условия I—IV этой работы будут выполнены, если входящие в них функции принять следующими:

$$\Pi(t,\Gamma)=\int_\Gamma \lambda(t,\xi,\mathbf{x}_t)\,d\xi,$$

$$\rho(t, \xi)=\lambda(t, \xi, \mathbf{x}_t),$$

$$\psi(t)=\mathrm{const}, \quad A(t)\equiv 0$$

(по поводу оператора $\bar{A}_t$, входящего в уравнение фильтрации Б. И. Григелиониса, см. также [15]). Тогда из уравнения фильтрации Б. И. Григелиониса может быть получено уравнение для апостериорной характеристической функции $\varphi_t(\mathbf{v}\,|\,\xi_N(t))=\mathbf{M}\{\exp(j\mathbf{v}^T\mathbf{x}_t)\,|\,\xi_N(\tau),\ 0\leqslant\tau<t\}=\mathbf{M}^t\{\exp(j\mathbf{v}^T\mathbf{x}_t)\}$ в следующем виде:

$$\varphi_t(\mathbf{v}\,|\,\xi_N(t))=\mathbf{M}^0\{\exp(j\mathbf{v}^T\mathbf{x}_0)\}+ \tag{6}$$

$$+\int_0^t \mathbf{M}^\tau\left\{\exp(j\mathbf{v}^T\mathbf{x}_\tau)\left[j\mathbf{v}^T\mathbf{a}_\tau(\mathbf{x}_\tau)-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T\mathbf{B}_\tau(\mathbf{x}_\tau)\mathbf{B}_\tau^T(\mathbf{x}_\tau)\mathbf{v}\right]\right\}d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_G \mathbf{M}^\tau\left\{\exp(j\mathbf{v}^T\mathbf{x}_\tau)\left[\frac{\lambda(\tau,\xi,\mathbf{x}_\tau)}{\hat{\lambda}(\tau,\xi)}-1\right]\right\}\bar{q}(d\tau,d\xi),$$

где

$$\hat{\lambda}(\tau, \xi)=\mathbf{M}^\tau\{\lambda(\tau, \xi, \mathbf{x}_\tau)\};\quad \bar{q}(d\tau, d\xi)=p(d\tau, d\xi)-\hat{\lambda}(\tau, \xi)\,d\tau d\xi,$$

а верхний индекс T обозначает транспонирование.

Вернемся к исходному наблюдаемому полю N_t^G. Поскольку имеется взаимно-однозначное соответствие между реализациями случайного процесса $\xi_N(t)$ и случайного поля N_t^G, то, чтобы отразить связь с наблюдаемым полем, заменим в условных математических ожиданиях, входящих в уравнение (6), $\xi_N(t)$ на N_t^G. С этой же целью в стохастическом интеграле изменим обозначение меры $p(d\tau, d\xi)$ на $N(d\tau, d\xi)$. Такое обозначение более естественно и потому, что интеграл по мере $N(d\tau, d\xi)$ допускает простую физическую интерпретацию: он равен сумме значений подынтегральной функции в точках, координаты которых соответствуют координатам событий наблюдаемого поля. Далее, выполнив преобразование Фурье в (6) и перейдя к дифференциальной форме записи, получим стохастическое дифференциальное уравнение для апостериорной плотности вероятности значений процесса x_t:

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
&dp_t(\mathrm{x}_t|N_t^G)=L[p_t(\mathrm{x}_t|N_t^G)]dt+\\
&+p_t(\mathrm{x}_t|N_t^G)\int\limits_G[\lambda(t,\xi,\mathrm{x}_t)-\hat{\lambda}(t,\xi)]\frac{N(dt,d\xi)}{\hat{\lambda}(t,\xi)}-\\
&-p_t(\mathrm{x}_t|N_t^G)\int\limits_G[\lambda(t,\xi,\mathrm{x}_t)-\hat{\lambda}(t,\xi)]d\xi\,dt,
\end{aligned}
$$

где L — оператор Фоккера — Планка процесса x_t,

$$L(p)=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(\mathrm{x}_t,t)p]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}[b_{il}(\mathrm{x}_t,t)\,b_{kl}(\mathrm{x}_t,t)\,p].$$

Если $\lambda(t,\xi,\mathrm{x}_t)$ не зависит от ξ, то (7) сводится к уравнению для апостериорной плотности из [10].

§ 3. Гауссовская аппроксимация

При решении уравнения (7) целесообразно воспользоваться приближенными методами, развитыми в теории нелинейной фильтрации ([3, 16]). Предположим, что апостериорное распределение гауссовское. То, что результаты наблюдений случайного поля N_t^G не являются гауссовскими случайными величинами, не должно служить препятствием в использовании такого допущения. В качестве пояснения можно сослаться на известный факт из математической статистики, когда свойством асимптотической нормальности обладает широкий класс оценок параметров распределений безотносительно к виду этих распределений. Как отмечается в работах [3, 16], предположение о нормальности апостериорного распределения справедливо в том случае, когда накладывается требование высокой апостериорной точности измерения параметра x_t.

Рассмотрим случай, когда x_t является скалярной величиной, и пусть апостериорная плотность имеет вид

$$(8) \qquad p_t(x_t|N_t^G)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_t}}\exp\left[-\frac{(x_t-\hat{x}_t)^2}{2D_t}\right].$$

Это выражение следует подставить в (7) и получить уравнения для условного математического ожидания $\hat{x}_t$ и условной дисперсии D_t. Поскольку (7) является стохастическим дифференциальным уравнением типа Ито, то при вычислении дифференциала dp необходимо пользоваться формулой замены переменных, которая для рассматриваемого случая записывается следующим образом (см. [13, 17]). Если θ_t — m-мерный векторный случайный процесс, удовлетворяющий уравнению

$$d\theta_t=\alpha_t(\theta_t)\,dt+\int\limits_G\beta_t^\xi(\theta_t)N(dt,d\xi)$$

и $\eta_t=g(t,\theta_t)$ — непрерывно дифференцируемая по t и θ_t функция, то

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
&d\eta_t=\frac{\partial g(t,\theta_t)}{\partial t}dt+\left[\frac{\partial g(t,\theta_t)}{\partial\theta_t}\right]^T\alpha_t(\theta_t)\,dt+\\
&+\int\limits_G\{g[t,\theta_t+\beta_t^\xi(\theta_t)]-g[t,\theta_t]\}N(dt,d\xi).
\end{aligned}
$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial\theta_t}$ — оператор градиента. Величины $\hat{x}_t$ и D_t являются функциями результатов измерений случайного поля N_t^G. Поэтому будем искать их в виде

$$d\hat{x}_t=\alpha_x\,dt+\int\limits_G \beta_x N(dt,d\xi), \tag{10}$$
$$dD_t=\alpha_D\,dt+\int\limits_D \beta_D N(dt,d\xi).$$

Величины β_x и β_D — вклад единичного события в оценки $\hat{x}_t$ и D_t соответственно. Но требование высокой апостериорной точности означает, что в каждый момент времени оценка делается по большому числу событий и вклад каждого единичного события в оценку должен быть малым, т. е. $\beta_x/\sqrt{D}\ll 1$ и $\sqrt{\beta_D/D}\ll 1$.

Продифференцируем (8) по t с использованием (9), представим результат в виде ряда по степеням $(x_t-\hat{x}_t)$; в первом и третьем членах ряда сохраним слагаемые не выше второго порядка по $\beta_x/\sqrt{D}$ и $\sqrt{\beta_D/D}$, а во втором члене — не выше первого порядка по $\beta_x/\sqrt{D}$. Получим

$$dp_t(x_t|N_t^G)=p_t(x_t|N_t^G)\left\{-\frac{1}{2D_t}dD_t-\int\limits_G\frac{\beta_x^2}{2D_t}N(dt,d\xi)+\right. \tag{11}$$
$$\left.+\frac{x_t-\hat{x}_t}{D_t}dx_t+\frac{(x_t-\hat{x}_t)^2}{D_t}\left[\frac{1}{2D_t}dD_t+\int\limits_G\frac{\beta_x^2}{2D_t}N(dt,d\xi)\right]+\ldots\right\}.$$

Пусть в представлении (3) процесса x_t

$$a_t(x_t)=a_t+(x_t-\hat{x}_t)a_t',\quad b_x(x_t)=b_t, \tag{12}$$

где a_t, a_t', b_t — не зависящие от x_t функции времени, т. е. x_t — гауссовский процесс. Тогда, подставляя (11) и (12) в (7) и приравнивая члены с одинаковыми степенями $(x_t-\hat{x}_t)^i$, $i=0, 1, 2$, получим два уравнения (уравнения при $i=0$ и $i=2$ совпадают) для $\hat{x}_t$ и D_t:

$$d\hat{x}_t=a_t dt-D_t\int\limits_G\frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}d\xi\,dt+D_t\int\limits_G\frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\frac{N(dt,d\xi)}{\hat{\lambda}(t,\xi)}, \tag{13}$$

$$dD_t+\int\limits_G\beta_x^2N(dt,d\xi)=2D_ta_t'\,dt+b_t^2\,dt-D_t^2\int\limits_G\frac{\partial^2\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t^2}d\xi\,dt+ \tag{14}$$
$$+D_t^2\int\limits_G\frac{\partial^2\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t^2}\frac{N(dt,d\xi)}{\hat{\lambda}(t,\xi)}.$$

Из первого уравнения $\beta_x=\dfrac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\dfrac{D_t}{\hat{\lambda}(t,\xi)}$. Подставляя это равенство во второе уравнение, а также заменяя в обоих уравнениях $\hat{\lambda}(t,\xi)$ на $\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)$ (о допустимости такой замены см. [20]), получим окончательно

(15) $$d\hat{x}_t = a_t\,dt - D_t \int\limits_G \frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\,d\xi\,dt + D_t \int\limits_G \frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\,\frac{N(dt,d\xi)}{\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)},$$

(16) $$dD_t = 2D_t a_t'\,dt + b_t^2\,dt - D_t^2 \int\limits_G \frac{\partial^2\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t^2}\,d\xi\,dt +$$
$$+ D_t^2 \int\limits_G \frac{\partial^2\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t^2}\,\frac{N(dt,d\xi)}{\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)} -$$
$$- D_t^2 \int\limits_G \left[\frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\right]^2 \frac{N(dt,d\xi)}{\lambda^2(t,\xi,\hat{x}_t)}.$$

Уравнения (15), (16) позволяют определить параметры апостериорного распределения (8). Одновременно они являются уравнениями оптимальной оценки процесса x_t в смысле минимума среднеквадратичной ошибки (в гауссовском приближении).

Подобным путем могут быть получены уравнения для параметров апостериорного распределения в случае, когда $\mathbf{x}_t$ — вектор. Если параметры процесса $\mathbf{x}_t$ представляются в виде

(17) $$\mathbf{a}_t(\mathbf{x}_t) = \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t'(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t), \qquad \mathbf{B}_t(\mathbf{x}_t) = \mathbf{B}_t,$$

где $\mathbf{a}_t$ — не зависящая от $\mathbf{x}_t$ векторная функция времени, $\mathbf{A}_t'$, $\mathbf{B}_t$ — не зависящие от x_t, но, возможно, зависящие от t матрицы, то уравнения в гауссовском приближении для апостериорного среднего $\hat{\mathbf{x}}_t$ и апостериорной матрицы ковариаций $\mathbf{D}_t$ имеют вид:

(18) $$d\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{a}_t\,dt - \mathbf{D}_t \int\limits_G \frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t}\,d\xi\,dt + \mathbf{D}_t \int\limits_G \frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t}\,\frac{N(dt,d\xi)}{\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)},$$

(19) $$d\mathbf{D}_t = \mathbf{A}_t'\mathbf{D}_t\,dt + \mathbf{D}_t\mathbf{A}_t'^{T}\,dt + \mathbf{B}_t\mathbf{B}_t^{T}\,dt - \mathbf{D}_t \int\limits_G \frac{\partial^2\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t^2}\,\mathbf{D}_t\,d\xi\,dt +$$
$$+ \mathbf{D}_t \int \frac{\partial^2\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t^2}\,\mathbf{D}_t\,\frac{N(dt,d\xi)}{\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)} -$$
$$- \mathbf{D}_t \int\limits_G \frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t}\left[\frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t}\right]^T \mathbf{D}_t\,\frac{N(dt,d\xi)}{\lambda^2(t,\xi,\hat{\mathbf{x}}_t)}.$$

Здесь, как и раньше, $\dfrac{\partial}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t}$ — оператор градиента, $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\hat{\mathbf{x}}_t^2}$ — матрица вторых производных.

Погрешность, связанная с использованием гауссовской аппроксимации, зависит, вообще говоря, от конкретной задачи. В одном простейшем случае в допустимости этой аппроксимации можно убедиться непосредственно: при оценке постоянной интенсивности λ в области G уравнение (7) имеет точное решение (см. [10]):

$$p_t(\lambda|N_t^G) = \lambda^N e^{-\lambda St}\,p_0(\lambda)\left[\int\limits_0^\infty x^N e^{-xSt}\,p_0(x)\,dx\right]^{-1},$$

где $N=\int_0^t\int_G N(d\tau, d\xi)$, $S=\int_G d\xi$ и $p_0(\lambda)$ — априорная плотность. Если $p_0(\lambda)=$ $=\tau\exp(-\lambda\tau)$, $\lambda\geqslant 0$ и $p_0(\lambda)=0$, $\lambda<0$, то $p_t(\lambda|N_t^G)$ представляет собой плотность гамма-распределения, которое, как известно, асимптотически (при больших N) нормально. В более сложных случаях необходимо привлекать численные решения, как это сделано, например, в [18, 19], где определены границы применимости метода гауссовской аппроксимации при фильтрации некоторых типовых сигналов из смеси с аддитивным белым гауссовским шумом. Во всех случаях необходимо помнить, что приближенные уравнения фильтрации выведены при условиях $\beta_x/\sqrt{D_t}\ll 1$, $\sqrt{\beta_D/D_t}\ll 1$. Сопоставляя эти неравенства с (10), (15) и (16), получим

$$(20)\qquad \begin{aligned} D_t &\ll \left\{\max_{\xi,\hat{x}_t}\frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\frac{1}{\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}\right\}^{-2},\\ D_t &\ll \left\{\max_{\xi,\hat{x}_t}\frac{\partial^2\ln\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t^2}\right\}^{-2}. \end{aligned}$$

Эти соотношения должны выполняться во все моменты времени, начиная с $t=0$. Однако практически представляют интерес лишь такие оценки, точность которых по мере накопления результатов наблюдений возрастает (или по крайней мере не уменьшается). Если к тому же правые части неравенств (20) не зависят от времени, то достаточно, чтобы эти соотношения выполнялись для априорной дисперсии.

Точность оценки в процессе наблюдений будет возрастать, если оцениваемый параметр x_t изменяется медленно по сравнению с темпом появления событий наблюдаемого поля. Количественные соотношения получим, потребовав, чтобы математическое ожидание правой части уравнения (16) было неположительным. Считая приближенно $\mathrm{M}\{D_t^2\}\approx(\mathrm{M}D_t)^2$, будем иметь

$$\frac{a_t'}{I}+\sqrt{\frac{a_t'^2}{I}+\frac{b_t^2}{I}}\leqslant \mathrm{M}D_t,$$

где

$$I=\int_G\left[\frac{\partial\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}{\partial\hat{x}_t}\right]^2\frac{d\xi}{\lambda(t,\xi,\hat{x}_t)}.$$

Этим неравенством, с одной стороны, накладывается ограничение на коэффициенты сноса и диффузии процесса x_t, а с другой — устанавливается минимальное значение дисперсии оценки, которое может быть достигнуто при $t\to\infty$.

§ 4. Пример 1. Оценка положения движущегося источника излучения

Пусть источник излучения движется с постоянной скоростью, величина которой неизвестна, и создает на прямой распределение интенсивности $\lambda(\xi-x_t)$, причем наблюдение производится на отрезке $[a, b]$ этой прямой, а $\lambda(\xi-x_t)$ отличается от постоянной лишь на небольшом участке $|\xi-x_t|<\varepsilon$ внутри $[a, b]$, т. е. $\lambda(a-x_t)=$ $=\lambda(b-x_t)$, $\lambda'(a-x_t)=\lambda'(b-x_t)=0$. Координата x_t, определяющая положение источника излучения, и его скорость c удовлетворяют уравнениям $dx_t=c\,dt$, $dc=0$. Применяя

(18), (19), получим уравнения для оценок $\hat{x}_t$, $\hat{c}_t$ и элементов матрицы ковариаций

$$\mathbf{D}=\begin{Vmatrix} D_{xx} & D_{xc} \\ D_{xc} & D_{cc} \end{Vmatrix}$$

в следующем виде:

$$\text{(21)}\quad \begin{aligned} d\hat{x}_t &= \hat{c}_t\,dt-(D_{xx}+D_{xc}t)\int\limits_a^b \frac{\lambda'(\xi-\hat{x}_t)}{\lambda(\xi-\hat{x}_t)}N(dt,d\xi),\\ d\hat{c}_t &= -(D_{xc}+D_{cc}t)\int\limits_a^b \frac{\lambda'(\xi-\hat{x}_t)}{\lambda(\xi-\hat{x}_t)}N(dt,d\xi),\end{aligned}$$

$$dD_{xx}=2D_{xc}\,dt+(D_{xx}+D_{xc}t)^2\int\limits_a^b[\ln\lambda(\xi-\hat{x}_t)]''N(dt,d\xi),$$

$$dD_{cc}=(D_{xc}+D_{cc}t)^2\int\limits_a^b[\ln\lambda(\xi-\hat{x}_t)]''N(dt,d\xi),$$

$$\text{(22)}\quad dD_{xc}=D_{cc}\,dt+(D_{xx}+D_{xc}t)(D_{xc}+D_{cc}t)\int\limits_a^b[\ln\lambda(\xi-\hat{x}_t)]''N(dt,d\xi).$$

В частности, если c известно, то $D_{cc}=D_{cx}=0$, и уравнения упрощаются:

$$\text{(23)}\quad d\hat{x}_t=c\,dt-D_{xx}\int\limits_a^b\frac{\lambda'(\xi-\hat{x}_t)}{\lambda(\xi-\hat{x}_t)}N(dt,d\xi),$$

$$\text{(24)}\quad dD_{xx}=D_{xx}^2\int\limits_a^b[\ln\lambda(\xi-\hat{x}_t)]''N(dt,d\xi).$$

Пользуясь формулой замены переменных (9) и учитывая, что $\beta_{D_{xx}}/D_{xx}\ll 1$, можно показать

$$\text{(25)}\quad \int\limits_0^t\frac{dD_{xx}}{D_{xx}^2}\approx\int\limits_0^t d\left(-\frac{1}{D_{xx}}\right)=-\frac{1}{D_{xx}}+\frac{1}{D_{xx}(0)},$$

где $D_{xx}(0)$ – дисперсия априорного распределения. Тогда из (24) получим выражение для условной дисперсии

$$\text{(26)}\quad D_{xx}\approx\left\{-\int\limits_0^t\int\limits_a^b[\ln\lambda(\xi-\hat{x}_\tau)]''N(d\tau,d\xi)+\frac{1}{D_{xx}(0)}\right\}^{-1}.$$

Чтобы определить безусловно дисперсию $\bar{D}_{xx}$, которая характеризует точность оценки $\hat{x}_t$, необходимо усреднить (26) по всем реализациям случайного поля N_t^G. Поскольку оценки достаточно точные, можно полагать $\lambda(\xi-\hat{x}_t)\approx\lambda(\xi-x_t)$, $\lambda'(\xi-\hat{x}_t)\approx\approx\lambda'(\xi-x_t)$, $\mathbf{M}(1/D_{xx})\approx 1/\bar{D}_{xx}$ (см. [20]). Тогда из (26) следует

$$\text{(27)}\quad \bar{D}_{xx}\approx\left\{\int\limits_0^t\int\limits_a^b\frac{[\lambda'(\xi-x_\tau)]^2}{\lambda(\xi-x_\tau)}d\xi\,d\tau+\frac{1}{D_{xx}(0)}\right\}^{-1}.$$

На рис. 1 представлена одна из реализаций $\hat{x}_t$, полученная путем численного решения уравнений (23), (24) при

$$\lambda=0{,}05+0{,}05\exp[-0{,}18(\xi-x)^2],\qquad c=0.$$

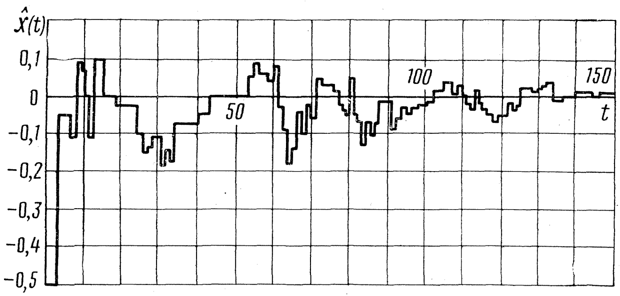

Рис. 1. Реализация, полученная при численном решении уравнений оценки положения источника излучения

Истинное значение параметра $x=0$, априорные значения $\hat{x}_0=-0{,}5$; $D_{xx}(0)=1$. При вычислениях шаги h_ξ, h_t по переменным ξ и t выбирались так, чтобы выполнялось условие $\lambda(\xi, t)h_\xi h_t<0{,}1$. Благодаря этому моделирование пуассоновского случайного поля сводилось к тому, что для каждой точки отсчета (ξ_i, t_i) производилось разыгрывание случайной величины, принимающей лишь значения 0 и 1 с вероятностями $1-\lambda(\xi_i, t_i)h_\xi h_t$ и $\lambda(\xi_i, t_i)h_\xi h_t$ соответственно.

§ 5. Пример 2. Оценка мощности источника излучения при наличии мешающего фона

Пусть источник излучения создает в области G-плоскости распределение интенсивности $\lambda_1 f(\xi)$, где $f(\xi)$ — известная функция, такая, что $\int\limits_G f(\xi)\,d\xi=1$, λ_1 — параметр, характеризующий мощность источника. Пусть также имеется мешающее фоновое излучение, порождающее в области G постоянную интенсивность λ_0, величина которой неизвестна.

Пользуясь (18), (19), получим для оценок $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$ и элементов матрицы ковариаций

$$\mathbf{D}=\begin{Vmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{01} & D_{11}\end{Vmatrix}$$

следующие уравнения:

(28)
$$d\hat{\lambda}_0=-(D_{01}+D_{00}S)\,dt+\int\limits_G \frac{D_{01}f(\xi)-D_{00}}{\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\hat{\lambda}_0}N(dt, d\xi),$$
$$d\hat{\lambda}_1=-(D_{11}+D_{01}S)\,dt+\int\limits_G \frac{D_{11}f(\xi)+D_{01}}{\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\hat{\lambda}_0}N(dt, d\xi),$$

(29)
$$dD_{00}=-\int\limits_G [D_{01}f(\xi)+D_{00}]^2\frac{N(dt, d\xi)}{[\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\hat{\lambda}_0]^2},$$
$$dD_{11}=-\int\limits_G [D_{11}f(\xi)+D_{01}]^2\frac{N(dt, d\xi)}{[\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\hat{\lambda}_0]^2},$$
$$dD_{01}=-\int\limits_G [D_{11}f(\xi)+D_{01}][D_{01}f(\xi)+D_{00}]\frac{N(dt, d\xi)}{[\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\hat{\lambda}_0]^2}.$$

Здесь S — площадь области G.

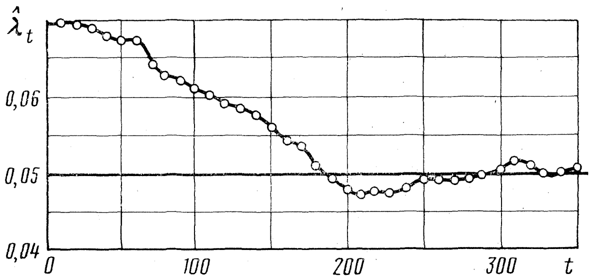

Рис. 2. Реализация, полученная при численном решении уравнений оценки мощности источника излучения

Если λ_0 известно, то $D_{00}=D_{01}=0$, и уравнения упрощаются:

$$d\hat{\lambda}_1 = -D_{11}\,dt + D_{11}\int\limits_G \frac{f(\xi)}{\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\lambda_0} N(dt, d\xi), \tag{30}$$

$$dD_{11} = -D_{11}^2 \int\limits_G \frac{f^2(\xi)}{[\hat{\lambda}_1 f(\xi)+\lambda_0]^2} N(dt, d\xi). \tag{31}$$

Так же, как в предыдущем примере, из (31) можно получить выражение для безусловной дисперсии $\bar{D}_{11}$, характеризующей точность оценки параметра λ_1:

$$\bar{D}_{11} \approx \left[t \int\limits_G \frac{f^2(\xi)}{\lambda_1 f(\xi)+\lambda_0} d\xi + \frac{1}{D_{11}(0)} \right]^{-1}.$$

Здесь $D_{11}(0)$ — дисперсия априорного распределения.

На рис. 2 представлена одна из реализаций $\hat{\lambda}_1$, полученная путем численного решения уравнений (30), (31) при $\lambda=0{,}05+\lambda_1 \exp[-0{,}18\xi^2]$, истинном значении $\lambda_1=0{,}05$ и априорных значениях $\lambda_1(0)=0{,}07$; $D_{11}(0)=6\cdot 10^{-4}$. Область наблюдения G представляла собой отрезок прямой, методика моделирования пуассоновского случайного поля была той же, что и в предыдущем случае. На рис. 2 решение изображено в виде непрерывной зависимости, хотя в действительности оно представляет собой ступенчатую кривую; отдельные скачки не показаны ввиду малого масштаба.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стратонович Р. Л.* К теории оптимальной нелинейной фильтрации. Теория вероятн. и ее примен., 1959, 4, *2*, 239—242.
2. *Стратонович Р. Л.* Условные процессы Маркова. Теория вероятн. и ее примен., 1960, 5, *2*, 172—195.
3. *Стратонович Р. Л.* Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов. Радиотехника и электроника, 1960, 5, *11*, 1751—1763.
4. *Бакут А. П. и др.* Некоторые вопросы теории приема световых сигналов. Проблемы передачи информации, 1966, 2, *4*, 39—55.
5. *Helstrom C. W.* The Detection and Resolution of Optical Signals. IEEE Trans. Inform. Theory, 1964, 10, *4*, 275—287.
6. *Крафт В. В., Терпугов А. Ф.* О потенциальных возможностях систем частотного телеграфирования, использующих световые сигналы. 3-я Конф. по теории кодирования и передачи информации. Ташкент, «Фан», 1967, 207—211.
7. *Шереметьев А. Г.* Статистическая теория лазерной связи. М., «Связь», 1971.
8. *Bar-David I.* Communication under the Poisson Regime. IEEE Trans. Inform. Theory, 1969, 15, *1*, 31—37.
9. *Гальчук Л. И.* Фильтрация марковских процессов со скачками. Успехи матем. наук, 1970, 25, *5*, 237—238.
10. *Snyder D. L.* Filtering and Detection for Doubly Stochastic Poisson Processes. IEEE Trans. Inform. Theory, 1972, 18, *1*, 91—102.
11. *Григелионис Б. И.* О стохастических уравнениях нелинейной фильтрации случайных процессов. Литовский матем. сб., 1972, 12, *4*, 37—51.

12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
13. *Григелионис Б. И.* О представлении целочисленных случайных мер как стохастических интегралов по пуассоновской мере. Литовский матем. сб., 1971, 11, *1*, 93–108.
14. *Дуб Д. Л.* Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит-ры., 1956.
15. *Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H.* Stochastic Differential Equations of the Non-Linear Filtering Problem. Osaka J. Math., 1972, 9, *1*, 19–40. (Русск. перев.: *Фудзисаки М., Каллианпур Г., Кунита X.* Стохастические дифференциальные уравнения в задачах нелинейной фильтрации. Математика (сб. перев.), 1973, 17, *2*, 108–128).
16. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
17. *Гихман И. И., Дороговцев А. Я.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. Укр. матем. ж., 1965, 17, *6*, 3–20.
18. *Ярлыков М. С., Миронов М. А.* О применимости гауссовой аппроксимации в марковской теории оптимальной нелинейной фильтрации. Радиотехника и электроника, 1972, 17, *11*, 2285–2294.
19. *Миронов М. А., Ярлыков М. С.* Оценка точности метода гауссовой аппроксимации в марковской теории оптимальной нелинейной фильтрации для случая импульсных сигналов. Радиотехника и электроника, 1973, 18, *11*, 2302–2310.
20. *Stratonovich R. L.* Detection and Estimation of Signals in Noice when One or Both are Non-Gaussian. Proc. IEEE, 1970, 58, *5*, 670–679.

Поступила в редакцию
22 марта 1974 г.
После переработки
28 марта 1975 г.