Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, А. Л. Штарас, Метод осреднения для уравнений с частными производными и его применения, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 1988, том 34, 215–241

УДК 517.955.8+517.958:530.145.7

VI. МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, А. Л. Штарас

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В статье рассматриваются численно-асимптотические методы решения уравнений в частных производных с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и их применение при решении ряда задач механики. Статья состоит из трех глав.

В первой главе строятся простейшие математические модели полей и процессов в неоднородных периодических средах и формулируются основные результаты асимптотического анализа таких моделей, исследуются особенности неоднородных структур в случае, когда физические свойства компонентов различаются на один или несколько порядков.

Во второй главе излагаются асимптотические и численно-асимптотические методы решения задач механики неоднородных структур. Применение этих методов к модельным задачам сопровождается краткими обобщающими резюме.

Третья глава посвящена асимптотическому анализу слабо нелинейных задач.

Далее используется одинарная система ссылок на формулы внутри данного параграфа и на параграфы внутри данной главы. При ссылке на формулу из другого параграфа его номер дописывается слева через точку. Таким же образом обозначаются ссылки на параграфы из других глав. Например: формула (1.2) — это формула (2) § 1 данной главы, формула (2.1.3.) — формула (3) § 1 главы 2, § 2.1 — § 1 главы 2.

Глава 1

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Среды с периодически расположенными неоднородностями

Под средой с периодической структурой будем понимать среду, составленную из периодически повторяющегося элемента (ячейки). К таким средам относятся композиционные материалы, состоящие из двух и более однородных веществ; объемы таких веществ периодически чередуются с периодом, много большим характерного размера молекул, но в то же время много меньшим характерного пространственного размера задачи. Далее характерный пространственный размер задачи принимается за единицу; тогда сторона (ребро) ячейки периодичности может рассматриваться как безразмерный малый параметр ε.

Приведем примеры геометрических моделей простейших периодических структур: слоистой, волокнистой и дисперсной. При этом под геометрической моделью понимается разбиение пространства R^s ($s=1$, 2 или 3) на множества, занимаемые каждым из компонентов композиционного материала. В примерах рассматривается двухкомпонентный случай, и указанное разбиение R^s задается описанием одного из множеств. Это множество (обозначается B_ε) соответствует части пространства, занимаемой компонентом, называемым наполнителем, неоднородностями, или армирующим материалом, а компонент, «занимающий» дополнение, называется матрицей.

а) *Слоистая структура* — объединение слоев $C_j = \{x \in R^s \mid x_1 \in (j\varepsilon, (j+\theta)\varepsilon)\}$, $0 < \theta < 1$, т. е. $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=-\infty}^{\infty} C_j$.

б) *Волокнистая структура.* Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_M$ — ограниченные двухмерные области, $B_1^0, \ldots, B_M^0$ — цилиндры $B_j^0 = \{\xi \in R^3 \mid (\xi_2, \xi_3) \in \beta_j, \xi_1 \in R\}$, B_j^γ — цилиндр, получаемый из B_j^0 некоторым ортогональным преобразованием, переводящим ось ξ_1 в прямую с направляющими косинусами $(\gamma_1^j, \gamma_2^j, \gamma_3^j)$, $B_{jk_1k_2k_3}^\gamma = \{\xi \in R^3 \mid (\xi_1 - k_1, \xi_2 - k_2, \xi_3 - k_3) \in B_j^\gamma\}$, k_1, k_2, k_3 — целые. Предполагается, что при несовпадающих наборах (j, k_1, k_2, k_3) замыкания цилиндров $\overline{B}_{jk_1k_2k_3}^\gamma$ совпадают, либо не имеют общих точек, и что с единичным кубом пересекается конечное число различных цилиндров $\overline{B}_{jk_1k_2k_3}^\gamma$. Объединение по всем целым k_1, k_2, k_3 цилиндров $B_{jk_1k_2k_3}^\gamma$ обозначим B_j, а объединение B_j по j от 1 до M обозначим B. B — 1-периодическое множество, являющееся объединением непересекающихся цилиндров, ориентированных в M направлениях. В качестве геометрической модели системы волокон примем множество $B_\varepsilon = \{x \in R^3 \mid x/\varepsilon \in B\}$, ε — малый положительный параметр.

в) *Дисперсная структура.* Пусть G_0 — строго внутренняя подобласть единичного куба $Q = (0, 1)^s$, $G_{k_1 \ldots k_s} = \{\xi \in R^s \mid (\xi_1 - k_1, \ldots, \xi_s - k_s) \in G_0\}$, $k_1, \ldots, k_s$ — целые, тогда $B = \bigcup\limits_{k_1, \ldots, k_s = -\infty}^{\infty} G_{k_1 \ldots k_s}$ — 1-периодическое продолжение области G_0 на все пространство. Множество $B_\varepsilon = \{x \in R^s \mid x/\varepsilon \in B\}$ принимается за геометрическую модель системы зерен.

Теплофизические, физико-механические и другие характеристики сред с периодической структурой (как функции точки $x \in R^s$) являются периодическими с периодом ε по всем x_i, $i = 1, \ldots, s$. Как правило, эти функции кусочно-постоянны: если $x \in B_\varepsilon$ (точка x находится в части пространства, занятой наполнителем), то такая функция принимает значение соответствующей характеристики наполнителя; если $x \in R^s \setminus B_\varepsilon$ (точка x находится в части пространства, занятой матрицей), то функция равна значению такой же характеристики матрицы. Например, коэффициент теплопроводности

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K_a & \text{при } x \in B_\varepsilon, \\ K_M & \text{при } x \in R^s \setminus B_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

где K_a, K_M — коэффициенты теплопроводности наполнителя и матрицы соответственно.

В рассматриваемых выше примерах множество $B = \{\xi \in R^s \mid \varepsilon\xi \in B_\varepsilon\}$ не зависит от ε и периодично с периодом 1,

$K_\varepsilon(x) = K(x/\varepsilon)$, где $K(\xi)$—1-периодическая по $\xi_1, \ldots, \xi_s$ функция, принимающая значения K_a при $\xi \in B$, K_M — при $\xi \in R_s \setminus B$. Таким образом, различные физические характеристики материала являются быстро осциллирующими функциями аргумента x, изменяющимися на величину порядка единицы при изменении аргумента x на величину порядка ε.

Различные поля и процессы в средах с периодической структурой описываются дифференциальными, интегродифференциальными, операторными уравнениями с быстро осциллирующими ε-периодическими коэффициентами. Одним из основных вопросов механики неоднородных структур является вопрос о возможности приближения решений таких уравнений решениями так называемых *осредненных уравнений* с постоянными или гладкими коэффициентами, описывающими аналогичные поля и процессы в некоторой однородной среде. Возможность такого приближения постулировалась в ряде работ по механике композитов (так называемая *гипотеза эквивалентной гомогенности*, см. [13]), однако как отмечается в данной работе, эта гипотеза в ряде важных случаев оказывается неприменимой. Ниже на примере некоторых задач механики композитов обсуждается вопрос о построении осредненных уравнений и близости их решений к решениям исходных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Основным моментом в доказательстве такого рода утверждений является построение асимптотик решений исходных задач при $\varepsilon \to 0$. Методы построения таких асимптотик изложены в главе 2; подробные доказательства формулируемых теорем имеются в [1].

1.1. Стационарное температурное поле. Выше уже был рассмотрен в качестве примера физической характеристики коэффициент теплопроводности вида (1). Температура как функция точки x удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad x \notin \partial B_\varepsilon; \tag{2}$$

по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до s. На границе ∂B_ε множества B_ε выполняются условия сопряжения:

$$[u] = 0, \quad \left[K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0, \tag{3}$$

где через $[\,\cdot\,]$ обозначается скачок функции на границе B_ε (∂B_ε в этом случае предполагается гладкой). Такой задаче соответствует обобщенная постановка в виде интегрального тождества. Это замечание относится и к формулируемым ниже аналогичным задачам.

Пусть образец занимает область G, не зависящую от ε, на границе которой задана температура $\varphi(x)$, также не зависящая от ε:

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial G. \tag{4}$$

Задача (2)—(4) описывает стационарное температурное поле в образце из композиционного материала.

Более общая постановка задачи, учитывающая возможную анизотропию теплопроводящих свойств наполнителя и матрицы, сложность геометрии компонентов и наличие тепловых источников, распределенных в композите, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x), \quad x\in G, \tag{5}$$

$$u|_{\partial G}=\varphi|_{\partial G}, \tag{6}$$

где $a_{ij}(\xi)$ — 1-периодические по $\xi_1, \ldots, \xi_s$ ограниченные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие условиям симметрии $\forall\xi\in R^s \; a_{ij}(\xi)=a_{ji}(\xi)$
и эллиптичности:

$$\forall\eta\in R^s, \; \xi\in R^s \; a_{ij}(\xi)\eta_i\eta_j\geqslant\varkappa\eta_i\eta_i$$

с положительной константой $\varkappa$, не зависящей от η, ξ, ε.

При $s>1$ и реализуемых на практике значениях малого параметра ε непосредственное численное решение задачи (5), (6) практически неосуществимо, поскольку требуется слишком густая сетка, «улавливающая» характерную изменяемость коэффициентов (число узлов при этом намного превосходит ε^{-s}). В этой связи возникает необходимость асимптотического исследования задачи (5), (6) при $\varepsilon\to 0$. Такого типа проблемы были поставлены и решены в 1973—1974 гг. в работах Санчес—Паленсии, Де Джорджи и Спаньоло, Н. С. Бахвалова [1], [14], [15]. Для задачи (5), (6) из этих работ следует, что главное приближение решения при $\varepsilon\to 0$ можно определить по такому алгоритму:

1) решаются s ($r=1, \ldots, s$ — индекс-параметр) *ячеечных задач* относительно 1-периодических функций $N_r(\xi)$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j}(N_r+\xi_r)\right)=0, \quad \xi\in R^s; \tag{7}$$

2) определяются величины $\hat{a}_{ij}=\int\limits_Q a_{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_k}(N_j+\xi_j)\,d\xi$;

3) решается *осредненная задача*: эллиптическое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}\right)\frac{\partial v_0}{\partial x_j}=f(x), \quad x\in G, \tag{8}$$

с граничным условием

$$v_0|_{\partial G}=\varphi|_{\partial G}. \tag{9}$$

Пусть $\partial G\in C^\infty$, $f(x)$, $\varphi(x)\in C^\infty(\overline{G})$, $a_{ij}(\xi)$ не зависят от ε. Тогда решение v_0 задачи (8), (9) является главным членом асимптотики $u(x)$ при $\varepsilon\to 0$; именно, справедлива оценка

$$\max_{x\in\overline{G}}|u-v_0|=O(\varepsilon). \tag{10}$$

Задача (8), (9) не содержит быстро осциллирующих коэффициентов и поэтому может быть решена численно на сетке с крупным шагом. Как видно из алгоритма построения *осредненного уравнения* (8), для определения его коэффициентов $\hat{a}_{ij}$ необходимо решить вспомогательные ячеечные задачи вида (7). Под решением (7) понимается функция N_r из пополнения $\hat{W}_2^1$ множества 1-периодических бесконечно гладких функций по норме $W_2^1(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству $\forall\varphi\in\hat{W}_2^1$:

$$\int\limits_Q a_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(N_r+\xi_r)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\,d\xi=0.$$

Задачи (7) решаются численно; в этой связи метод построения приближенного решения задачи (5), (6) является *численно-асимптотическим*. Для определения так называемых *эффективных коэффициентов* $\hat{a}_{ij}$ созданы наборы стандартных программ. Оценка (10) доказывает, что если коэффициенты $a_{ij}(\xi)$ не зависят от ε, то гипотеза эквивалентной гомогенности оказывается справедливой.

1.2. Система уравнений теории упругости. Те же рассуждения, что в начале § 1, показывают, что такая физико-механическая характеристика, как тензор модулей упругости a_{ij}^{kl}, определяющий связь напряжений σ_i^k и деформаций e_j^l по линейному закону Гука ($\sigma_i^k=a_{ij}^{kl}e_j^l$), в средах с периодической структурой является ε-периодической функцией вида $a_{ij}^{kl}(x/\varepsilon)$, где $a_{ij}^{kl}(\xi)$ — 1-периодична по $\xi_1,\ldots,\xi_s$. В случае двухкомпонентного композита тензор $a_{ij}^{kl}(\xi)$ кусочно-постоянен и принимает значения a_{ij}^{kla} при $\xi\in B$, a_{ij}^{klm} при $\xi\notin B$. Линейная стационарная система уравнений теории упругости в перемещениях имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x),\quad x\in G,\tag{11}$$

где $A_{ij}(\xi)$ — кусочно-гладкие, ограниченные, 1-периодические $s\times s$-матрицы-функции с элементами $a_{ij}^{kl}(\xi)$, удовлетворяющими условиям $\forall\xi\in R^s$

$$a_{ij}^{kl}(\xi)=a_{kj}^{il}(\xi)=a_{ji}^{lk}(\xi),$$

$$a_{ij}^{kl}(\xi)\,\eta_i^k\eta_j^l\geqslant\varkappa\eta_i^k\eta_i^k$$

для любой симметричной матрицы $\|\eta_i^k\|$, $\varkappa>0$ — константа; $u(x)$, $f(x)$ — s-мерные вектор-функции, $f(x)\in C^\infty(\bar{G})$, $\partial G\in C^\infty$, G — ограниченная область в R^s. Пусть на границе области G перемещения u равны 0:

$$u|_{\partial G}=0.\tag{12}$$

Постановка задачи (11), (12) понимается в смысле соответствующего интегрального тождества.

Если $a_{ij}^{kl}(\xi)$ не зависят от ε, то, как и в п. 1.1, справедлива *гипотеза эквивалентной гомогенности*, т. е. решение задачи (11), (12) близко к решению некоторой задачи теории упругости с постоянными коэффициентами, описывающей напряженно-деформированное состояние однородного материала:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{A}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\right)=f(x), \quad x\in G, \qquad (13)$$

$$v_0|_{\partial G}=0.$$

Именно, $\|u-v_0\|_{L_2(G)}=O(\sqrt{\varepsilon})$. Постоянные $s\times s$-матрицы-коэффициенты $\hat{A}_{ij}$ осредненной задачи (13) определяются по алгоритму, указанному выше, со следующими изменениями: функции N_j являются s-мерными квадратными матрицами, а сумма $N_r+\xi_r$, фигурирующая в формуле (7), заменяется на $N_r+\xi_r E$, E — единичная матрица. Задачи (7) решаются численно с помощью набора программ для расчета эффективного тензора упругости $\hat{A}_{ij}$.

1.3. Нестационарные задачи. Решение нестационарного уравнения теплопроводности

$$c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x, t), \; x\in G, \; t\in(0, t_0)$$

с граничным условием

$$u|_{\partial G}=0$$

и начальным условием

$$u|_{t=0}=0,$$

где $c(\xi)$ — 1-периодическая кусочно-гладкая функция, $c(\xi)\geqslant\varkappa>0$, $f\in C^\infty(\bar{G}\times[0, t_0])$, близко к решению осредненной задачи

$$\hat{c}\frac{\partial v_0}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\right)=f(x, t), \quad x\in G, \quad t\in(0, t_0),$$

$$v_0|_{\partial G}=0, \quad v_0|_{t=0}=0, \quad \hat{c}=\int_Q c(\xi)\,d\xi;$$

выполняется оценка $\|u-v_0\|_{L_2(G\times(0,t_0))}=O(\sqrt{\varepsilon})$.

Решение нестационарной системы уравнений теории упругости

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x, t), \quad x\in G, \quad t\in(0, t_0)$$

с граничным условием

$$u|_{\partial G}=0$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0}=0, \quad \partial u/\partial t|_{t=0}=0,$$

где $\rho(\xi)$ — 1-периодическая кусочно-гладкая функция, $\rho(\xi)\geqslant\rho_0>0$, $f\in C^\infty(\bar G\times[0,t_0])$, близко к решению осредненной задачи

$$\hat\rho\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat A_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\right)=f(x,t),\quad x\in G,\quad t\in(0,t_0),$$

$$v_0|_{\partial G}=0,\quad v_0|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

$$\hat\rho=\int\limits_Q\rho(\xi)\,d\xi;\quad \|u-v_0\|_{L_2(G\times(0,t_0))}=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

В ряде задач механики композитов возникает необходимость вычисления напряжений

$$\sigma_i^k=a_{ij}^{kl}(x/\varepsilon)\,\partial u^l/\partial x_j,$$

где u^l — l-я компонента вектора u. Можно доказать, что

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}-\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_j}+\frac{\partial N_r}{\partial\xi_j}\,\frac{\partial v_0}{\partial x_r}\right)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}\right\|_{L_2}=O(\sqrt{\varepsilon}),$$

откуда следует формула для вычисления напряжений

$$\sigma_i^k=\tilde a_{ij}^{kl}(x/\varepsilon)\,\hat e_j^l+O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где $\hat e_j^l=0{,}5(\partial v_0^l/\partial x_j+\partial v_0^j/\partial x_l)$ — средние деформации, а $\tilde a_{ij}^{kl}(\xi)$ — элементы матриц

$$\tilde A_{ij}(\xi)=A_{ir}(\xi)\,\frac{\partial}{\partial\xi_r}\,(N_j(\xi)+\xi_jE).$$

Осредненные задачи могут быть получены и для нелинейных задач теплопроводности, теории упругости, а также для ряда нелокальных задач.

§ 2. Сильно неоднородные среды

Результаты предыдущего параграфа относятся к случаю, когда в задаче присутствует лишь один малый параметр ε. Реально же в модели неявно входят и другие безразмерные параметры, малые или большие. Так, композиционные материалы, как правило, конструируются по принципу контрастности физических свойств компонентов. В математическом плане это означает, что, наряду с малым параметром ε, характеризующим отношение периода структуры к характерному размеру области G, в задаче фактически присутствует параметр ω, характеризующий отношение физических констант компонентов. В модельном примере (1.2)—(1.4) мы будем предполагать, что ω — большой параметр, $K(\xi)=\omega$ при $\xi\in B$, $K(\xi)=1$ при $\xi\notin B$.

2.1. Волокнистая структура: масштабный эффект. Оказывается, что введение в задачу (1.2)—(1.4) второго параметра существенно влияет на качественное поведение решения. Так, в случае *волокнистой структуры* B_ε *гипотеза эквивалентной гомогенности* справедлива не всегда (а только когда $\varepsilon^2\omega$ — малый параметр). При $\varepsilon^2\omega \ll 1$ в ряде случаев удается получить явные формулы для *эффективных коэффициентов* уравнения, определяющего главный член асимптотики решения при $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$. Это обстоятельство устраняет необходимость численного решения ячеечных задач (1.7) (или их части). Для разности решений задачи (1.2)—(1.4) и новой осредненной задачи получается оценка, в которую наряду с ε входят параметры ω^{-1} и $\varepsilon^2\omega$.

Перейдем к более аккуратным формулировкам. Обозначим

$$\hat{K}_{ij} = \sum_{q=1}^{M} \theta_q \gamma_i^q \gamma_j^q, \tag{1}$$

где $\theta_q = \operatorname{mes}(B_q^\gamma \cap Q)$ — объемная доля цилиндров q-го направления, γ_1^q, γ_2^q, γ_3^q — их направляющие косинусы.

Лемма 1. Для того чтобы матрица $\|\hat{K}_{ij}\|$ была положительно определена и симметрична, необходимо и достаточно, чтобы среди M векторов $(\gamma_1^q, \gamma_2^q, \gamma_3^q)$, $q = 1, \ldots, M$, имелись три некомпланарных.

Далее предполагается, что это условие выполнено.

Теорема 1. Пусть цилиндры B_q^γ имеют границу из класса C^∞ и пусть существуют такие $\alpha, \beta > 0$, что $\omega = O(\varepsilon^\alpha)$, $\varepsilon^2\omega = O(\varepsilon^\beta)$, тогда существует единственное решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{K}_{ij}\frac{\partial v_{00}}{\partial x_j}\right) = 0, \quad x \in G, \quad v_{00}|_{\partial G} = \varphi|_{\partial G},$$

$$v_{00} \in C^\infty(\bar{G}),$$

$$\max_{x \in \bar{G}} |u - v_{00}| = O(\varepsilon + \omega^{-1} + \varepsilon^2\omega).$$

Теорема 1 обосновывает *гипотезу эквивалентной гомогенности с эффективными коэффициентами*, определяемыми по явным формулам (1), в случае $\varepsilon^2\omega \ll 1$.

Теорема 2. Найдутся такие множество B, область G и функция φ, что для любой функции $v(x)$, не зависящей от ε и ω, $\max_{x \in \bar{G}} |u - v| \not\to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$, $\varepsilon^2\omega \to \infty$.

Для системы уравнений теории упругости (1.11) с коэффициентами порядка ω в B_ε в [1] получены явные формулы для эффективных коэффициентов, аналогичные (1).

2.2. Дисперсная структура. Вновь рассмотрим задачу (1.2)—(1.4), когда B_ε — *дисперсная структура* с гладкой границей. В этом случае оказывается, что изложенный выше эффект отсутствия осредненного описания задачи при $\varepsilon^2\omega \to \infty$ (*мас-*

штабный эффект) не имеет места. Главный член асимптотики $v_0(x)$ отыскивается по следующему алгоритму:

1) решаются три *ячеечные задачи* относительно 1-периодических функций

$$\Delta \overline{N}_r = 0, \quad \xi \in R^3 \setminus B,$$

$$\overline{N}_r + \xi_r = 0, \quad \xi \in \partial B,$$

$r = 1, 2, 3$ — индекс-параметр;

2) решаются три *ячеечные задачи* относительно $N_r^1(\xi)$

$$\Delta N_r^1 = 0, \quad \xi \in G_0,$$

$$\frac{\partial N_r^1}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(\overline{N}_r + \xi_r), \quad \xi \in \partial G_0,$$

$$r = 1, 2, 3;$$

3) определяются величины

$$\hat{a}_{ij}^0 = \int\limits_{\partial G_0} (N_j^1 + \xi_j)\, n_i ds + (1 - \mathrm{mes}\ G_0)\, \delta_{ij},$$

(n_1, n_2, n_3) — вектор внешней нормали к ∂G_0;

4) решается *осредненная задача*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}^0 \frac{\partial v_{00}}{\partial x_j}\right) = 0, \quad x \in G; \quad v_{00}\,|_{\partial G} = \varphi\,|_{\partial G}. \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть существуют такие $\alpha, \beta > 0$, что $\varepsilon = O(\omega^{-\alpha})$, $\omega^{-1} = O(\varepsilon^{\beta})$, тогда существует единственное решение задачи (2) из $C^\infty(\overline{G})$ и $\max\limits_{x \in \overline{G}} |u - v_{00}| = O(\varepsilon + \omega^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$.

2.3. Другие сильно неоднородные структуры. В [1] строятся полные асимптотические разложения решений систем уравнений теории упругости с быстро осциллирующими сильно изменяющимися коэффициентами, заданных во всем пространстве. Рассматриваются уравнения и системы эллиптического и гиперболического типов.

Другим большим классом сильно неоднородных структур являются так называемые каркасные структуры, содержащие два малых параметра. Их осредненное описание получено в [1].

Перфорированные среды (среды с периодически расположенными пустотами) изучались в [1], [2], [15].

Вопрос о вычислении эффективных характеристик неоднородных сред с периодической структурой ставился еще в классических работах Пуассона, Максвелла, Рэлея, Фойгта, Рейсса, и, таким образом, имеет давнюю историю. В §§ 1, 2 был рассмотрен подход к исследованию процессов в неоднородных средах, основанный на асимптотическом анализе уравнений в частных производных, описывающих эти процессы на микроуровне.

Такой подход подробно изложен в монографиях [1], [2], [12], [15].

Другой подход, основанный на аналитическом решении двумерных задач теории упругости методами теории функций комплексной переменной, развит в [4], [5]. Отметим также, что близкие к осреднению процессов в композитах вопросы асимптотического исследования уравнений в областях с мелкозернистой границей изучались в [8]. Непериодические неоднородные среды рассматривались в [6], [12].

Глава 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР

К асимптотическим по малому параметру ε методам, применяемым в дифференциальных (или более общих функциональных) уравнениях, обычно предъявляются два требования:

1) Каждая из последовательности рекуррентных задач, получаемых при асимптотическом решении, должна быть проще исходной — например, нелинейная задача должна заменяться линейной, дифференциальная — алгебраической, неинтегрируемая в квадратурах — интегрируемой и т. д..

2) Каждую из этих задач можно записать так, чтобы в нее явно не входил параметр ε.

Оба этих требования отражают исторически сложившиеся традиции решения задач с малым параметром. Эти традиции возникли в годы, когда не было мощной вычислительной техники, и соответствовали классическому представлению о разрешимости задач. Задача считалась решенной, если получались явные аналитические формулы для решения, в свою очередь, такие формулы получить проще, когда в задаче меньше неопределенных параметров.

Появление ЭВМ и соответствующего математического обеспечения, основанного на эффективных численных методах, позволило считать элементарными многие математические задачи, которые раньше не решались практически. Этот новый класс методов, сочетающих асимптотические переходы с численным решением элементарных задач, естественно назвать *численно-асимптотическим*. Ниже приводятся несколько примеров таких методов. Для упрощения изложения эти методы иллюстрируются примерами их применения к линейным уравнениям в частных производных, хотя они успешно используются и при решении нелинейных задач и операторных уравнений [1], [2], [15].

§ 1. Разделение быстрых и медленных переменных

Изложим метод на примере эллиптического уравнения

$$L^{\varepsilon}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) - f(x) = 0, \quad x \in R^s, \tag{1}$$

где $a_{kl}(\xi)$—1-периодические функции из § 1.1, $f(x)$ — достаточно гладкая T-периодическая по $x_1, \ldots, x_s$ функция с нулевым средним $\langle f \rangle_{x, T} = 0$. Здесь и далее через $\langle \cdot \rangle_{y, a}$ обозначается интеграл по s-мерному кубу $y \in (0, a)^s$. Отыскивается T-периодическое по $x_1, \ldots, x_s$ решение уравнения с нулевым значением $(\langle u \rangle_{x, T} = 0)$.

Асимптотическое решение (ас. р.) ищется в виде ряда

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, \xi)\,|_{\xi = x/\varepsilon}, \tag{2}$$

где $u_i(x, \xi)$ — 1-периодические по $\xi_1, \ldots, \xi_s$ функции. Подставляем (2) в (1), применяем формулу дифференцирования сложной функции, группируем слагаемые при одинаковых степенях ε и приравниваем их суммы к нулю. Имеем последовательность уравнений относительно u_i:

$$L_{\xi\xi}u_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(a_{kl}(\xi)\frac{\partial u_i}{\partial \xi_l}\right) = T_i(x, \xi), \tag{3}$$

где T_i зависят от u_{i-1} и u_{i-2}. Условием существования решения в классе 1-периодических по ξ_r функций является равенство

$$\langle T_i \rangle_{\xi, 1} = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) определяется с точностью до произвольной гладкой функции x:

$$u_i(x, \xi) = w_i(x, \xi) + v_i(x),$$

где $\langle w_i \rangle_{\xi, 1} = 0$. Выполнение условия (4) обеспечивается за счет соответствующего выбора функций v_j при $j < i$. Равенства (3), (4) равносильны рекуррентной цепочке уравнений

$$L_{\xi\xi}w_i = T_i(x, \xi), \quad \hat{L}v_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\hat{a}_{kl}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right) = f_i(x), \tag{5}$$

где T_i зависят от $w_0, \ldots, w_{i-1}$, $v_0, \ldots, v_{i-1}$, $f_i(x)$ — от $w_0, \ldots, w_i$, $v_0, \ldots, v_{i-1}$; $f_0 = f$. Постоянные коэффициенты $\hat{a}_{kl}$ определяются по алгоритму из § 1, п. 1. Из (5) последовательно определяются все w_i, v_i, а стало быть, u_i. Таким образом, задача (1), содержащая малый параметр ε, асимптотически (т. е. с точностью до членов порядка любой степени ε) редуцируется к последовательности задач (5), не содержащих малого параметра. Эти задачи решаются численными методами. Используя априорные оценки для исходной задачи, можно доказать, что разность точного решения исходной задачи и N-й усеченной суммы ряда имеет порядок $O(\varepsilon^N)$ в норме $W_2^1((0, T)^s)$ и, в частности, $u = v_0 + O(\varepsilon)$ в норме $L_2((0, T)^s)$, где v_0 — решение осредненного уравнения

$$\hat{L}v_0 = f(x), \quad \langle v_0 \rangle_{x,T} = 0, \tag{6}$$

v_0 — T-периодична по $x_1, \ldots, x_s$.

Замечание 1. Уравнение (1) рассматривается во всем пространстве R^s. В случае краевой задачи (1.1.4), (1.1.5) ряд $u^{(\infty)}$ удовлетворяет граничному условию лишь с погрешностью $O(\varepsilon)$ и, таким образом, перестает быть формальным асимптотическим разложением решения; удается получить лишь оценки для нулевого и первого приближений (типа (1.10)). Для краевой задачи в полупространстве или слое асимптотическое разложение решения строится в § 4.

Метод предназначен для решения уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами [1], [12]. Ас. р. $u^{(\infty)}$, как и в методе многих масштабов, отыскивается в виде ряда по степеням ε^l с коэффициентами, зависящими от быстрых ($\xi = x/\varepsilon$) и медленных (x, t) переменных. Подстановка ряда $u^{(\infty)}$ в уравнение, группировка слагаемых при одинаковых степенях ε и приравнивание полученных коэффициентов к нулю дают рекуррентную цепочку уравнений относительно u_l (*ячеечные уравнения*). Эти уравнения разрешимы неоднозначно, с точностью до некоторых функций v_l, и лишь при правых частях, удовлетворяющих условиям разрешимости. Условия разрешимости и образуют рекуррентную цепочку уравнений относительно функций v_l, «параллельную» цепочке для u_l. Таким образом, построение ас. р. $u^{(\infty)}$ сводится к решению двух цепочек задач, не зависящих от параметра.

§ 2. Метод осредненного уравнения бесконечного порядка

Продемонстрируем работу метода на примере задачи из § 1. Формальное ас. р. уравнения (1.1) отыскивается в виде

$$u^{(\infty)} \sim \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{|i|=l} N_i(\xi) D^i v(x) \right) \Bigg|_{\xi = \frac{x}{\varepsilon}}, \tag{1}$$

где $i = (i_1, \ldots, i_l)$; $i_j \in \{1, \ldots, s\}$, — мультиндекс, $|i| = l$ — число компонент мультиндекса, называемое длиной, $D^i v = \partial^l v / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}$, $N_i(\xi)$ — периодические по $\xi_1, \ldots, \xi_s$ с периодом 1 функции, $v(x)$ — функция, T — периодическая по $x_1, \ldots, x_s$, не зависящая от быстрых переменных x_j/ε, $N_\varnothing = 1$.

Подставляя формальный ряд (1) в (1.1) и используя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$L^{\varepsilon}u^{(\infty)} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{|i|=l} H_i(\xi) D^i v \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} - f(x), \tag{2}$$

где

$$H_i(\xi) = L_{\xi\xi} N_{i_1 \ldots i_l} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} (a_{ki_1}(\xi) N_{i_2 \ldots i_l}) +$$

$$+ a_{i_1 j}(\xi) \frac{\partial N_{i_2 \ldots i_l}}{\partial \xi_j} + a_{i_1 i_2}(\xi) N_{i_3 \ldots i_l}, \quad |i| \geqslant 2;$$

$$H_{i_1}(\xi) = L_{\xi\xi} N_{i_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} a_{ki_1}(\xi); \quad H_{\varnothing}(\xi) = 0.$$

Определим h_i, исходя из требования постоянства коэффициентов $H_i(\xi)$ при степенях ε и производных $D^i v$ в разложении (2): $H_i(\xi) \equiv h_i = \mathrm{const}$. Упорядочивая N_i так, чтобы выполнялось соотношение $N_j \prec N_i$ (приоритет N_i выше приоритета N_j), если $|j| < |i|$ (i «длиннее» j), получаем рекуррентную цепочку уравнений относительно N_i:

$$L_{\xi\xi} N_i + T_i(\xi) = h_i, \quad \xi \in R^s, \tag{3}$$

где

$$T_i(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (a_{ki_1}(\xi) N_{i_2 \ldots i_l}) + a_{i_1 j} \frac{\partial N_{i_2 \ldots i_l}}{\partial \xi_j} + a_{i_1 i_2} N_{i_3 \ldots i_l}. \tag{4}$$

Решения уравнений (3) отыскиваются в классе 1-периодических функций из $\hat{W}_2^1$. Для существования решений уравнений (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$h_i = \int_Q \left(a_{i_1 j} \frac{\partial N_{i_2 \ldots i_l}}{\partial \xi_j} + a_{i_1 i_2} N_{i_3 \ldots i_l} \right) d\xi.$$

Таким образом, величины h_i и T_i зависят от N_j при $|j| < |i|$; это обстоятельство дает возможность, последовательно проводя индукцию по $|i|$, определять $T_i(\xi)$, h_i, а затем, решая уравнение (3), находить $N_i(\xi) \in \hat{W}_2^1$.

После того, как найдены все N_i (и параллельно h_i), имеем:

$$L^{\varepsilon}u^{(\infty)} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{|i|=l} h_i D^i v - f(x).$$

Определяем $v(x)$ как ас. р. соотношения

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{|i|=l} h_i D^i v - f(x) \sim 0, \tag{5}$$

называемого «*осредненным уравнением бесконечного порядка*». Оказывается, что $h_i = 0$ при $|i| = 0, 1$, $h_{i_1 i_2} = \hat{a}_{i_1 i_2}$, так что главный член осредненного уравнения (5) совпадает с (1.6). Ас. р. (5) отыскивается в виде ряда

$$v \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(x), \tag{6}$$

где $v_j(x)$ не зависят от ε. Подстановка этого ряда в (5) позволяет получить рекуррентную цепочку «моментных уравнений», из которых определяются $v_j(x)$: $\hat{L}v_j = f_j(x)$, f_j зависят от функций $v_0, \ldots, v_{j-1}$ и их производных, $f_0(x) = f(x)$.

Метод применяется к широкому классу задач с быстро осциллирующими коэффициентами, в частности, к задачам главы 1 данной работы (см. [1]), однако сохраняет силу замечание 1 из предыдущего параграфа.

Итак, метод пригоден для решения уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Вводится в рассмотрение неизвестная функция (в общем случае вектор-функция), регулярно зависящая от малого параметра, и ставится цель получения относительно нее асимптотического уравнения, не содержащего быстрых переменных $\xi = x/\varepsilon$, так называемого *осредненного уравнения бесконечного порядка*. Ас. р. $u^{(\infty)}$ исходной задачи отыскивается в виде ряда по степеням ε с 1-периодическими по ξ коэффициентами, зависящими от быстрых переменных ξ и производных этой функции v, причем порядок этих производных тем выше, чем выше соответствующая степень ε. Подставляем такой ряд в исходное уравнение и группируем слагаемые при одинаковых степенях ε (с учетом формулы дифференцирования сложной функции); накладываем требование, чтобы коэффициенты ряда, получающегося в результате подстановки, не зависели от быстрых переменных. Такое требование дает рекуррентную цепочку уравнений (*ячеечные уравнения*), из которых можно последовательно определить коэффициенты ряда $u^{(\infty)}$.

§ 3. Разложение по двум параметрам

В качестве примера задачи с двумя параметрами рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K^{\omega}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x), \quad x \notin \partial B_\varepsilon \quad (s=3) \tag{1}$$

с условиями сопряжения (1.1.3), где $K_\omega(\xi)$ — функция из § 1.2, принимающая значение ω на множестве B_ε *дисперсной структуры* (∂B_ε предполагается гладкой, см. § 1.1); $f(x)$ — T-периодическая по x_1, x_2, x_3 функция из $C^\infty(R^3)$, $\int_0^T\int_0^T\int_0^T f(x)\,dx = 0$; решение отыскивается в классе T-периодических функций.

Приведем алгоритм построения асимптотического разложения решения задачи (1), (1.1.3), (1.1.4) при $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$, $\varepsilon = O(\omega^{-\alpha})$, $\omega^{-1} = O(\varepsilon^\beta)$, α, β — положительные числа.

Как и в § 2, ас. р. ищем в виде (2.1), где

$$N_i(\xi) \sim \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \omega^{-k} N^1_{i,k}(\xi) \text{ при } \xi \in B, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \omega^{-k+1} N^2_{i,k}(\xi) \text{ при } \xi \notin B, \end{cases} \qquad (2)$$

$N^j_{i,k}$ — 1-периодические функции ξ_1, ξ_2, ξ_3,

$$v(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^j \omega^{-r} v_{jr}(x), \qquad (3)$$

$v_{jr}(x)$ — T-периодические по x_1, x_2, x_3 функции из $C^\infty(R^3)$, не зависящие от ε, ω.

На первом этапе построения разложения подставляем формально ряд (2.1) в (1) и так же, как в § 2, получаем рекуррентную цепочку ячеечных уравнений (2.3).

Эти задачи на втором этапе решаются асимптотически: ряды (2) подставляем в уравнение (2.3) и условия сопряжения. При этом по индукции доказывается, что правые части T_i и постоянные h_i имеют разложения

$$T_i(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k+1} T_{i,k}(\xi), \quad h_i \sim \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k+1} h_{i,k}.$$

После группировки слагаемых при одинаковых степенях ω приравниваем их к нулю и получаем рекуррентную цепочку задач для $N^r_{i,k}$:

1) $N^2_{i,k}$ отыскиваются как 1-периодические решения задач

$$\Delta N^2_{i,k} + T_{i,k} = h_{i,k}, \quad \xi \in R^3 \setminus B,$$
$$N^2_{i,k} = N^1_{i,k-1}, \ \xi \in \partial B;$$

2) $N^1_{i,k}$ — 1-периодические решения уравнения

$$\Delta N^1_{i,k} + T_{i,k} = h_{i,k}, \quad \xi \in B \qquad (4)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial N^1_{i,k}}{\partial n} = \frac{\partial N^2_{i,k}}{\partial n} + n_{i_1}(N^2_{i_2 \dots i_l, k} - $$
$$- N^1_{i_2 \dots i_l, k}), \quad \xi \in \partial B. \qquad (5)$$

После построения функций $N^1_{i,k}$ и N^2_{ik} получаем, что условия сопряжения (1.1.3) удовлетворяются асимптотически точно (т. е. с точностью до любых степеней $\varepsilon + \omega^{-1}$), а соотношение (2.2) переходит в *осредненное уравнение бесконечного порядка* вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}^0_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-f+\sum_{k=2}^{\infty}\omega^{-k+1}\sum_{|i|=2}h_{i,k}D^i v+$$

$$+\sum_{l=3}^{\infty}\varepsilon^{l-2}\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-k+1}\sum_{|i|=k}h_{i,k}D^i v\sim 0, \qquad (6)$$

тическое «решение» которого на третьем этапе ищем (3). Подстановка (3) в (6) после приведения подобных дает цепочку эллиптических уравнений для определения a

$$\widehat{L}^0 v_{mk}=f_{mk}(x),\; x\in R^3,\; \int_{(0,T)^3} v_{mk}dx=0$$

с условиями T-периодичности v_{mk} по x_1, x_2, x_3, где $\hat{L}^0=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}^0_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, $f_{mk}(x)$ — гладкие T-периодические функции с нулевым средним по $(0, T)^3$, $f_{00}=f$, f_{mk} — линейные комбинации производных $v_{m_1k_1}$ при $m_1+k_1<m+k$, $m_1\leqslant m$, $k_1\leqslant k$.

В случае, когда B_ε — волокнистая структура, решение также строится в два этапа, однако процедура построения асимптотик решений ячеечных задач усложняется: необходимость удовлетворения условиям разрешимости задач типа (4), (5) в каждом из цилиндров $B^{\gamma j}_{jk_1k_2k_3}$ приводит к возрастанию порядка по ω решений N_i, а следовательно, и постоянных h_i.

Метод предназначен для решения уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, зависящими дополнительно от одного или нескольких малых (больших) параметров. На первом этапе применяется метод разделения быстрых и медленных переменных или метод осредненного уравнения бесконечного порядка в предположении конечности дополнительных параметров. На втором этапе ячеечные уравнения (задачи), зависящие только от дополнительных параметров, решаются асимптотически. Здесь могут быть использованы различные асимптотические методы; особенностью их применения является необходимость согласования с исходным разложением по ε (периоду структуры). После подстановки ас. р. *ячеечных задач* в ряд $u^{(\infty)}$ получаем осредненное уравнение бесконечного порядка, содержащее и основной, и дополнительный параметры. На третьем этапе ас. р. осредненного уравнения ищем в виде регулярного ряда по основному и дополнительным параметрам, а также их комбинациям.

§ 4. Метод пограничного слоя в задачах осреднения.

Продемонстрируем работу метода на примере уравнения (1.1), заданного в полупространстве $\{x_1>0\}$ с граничным условием

$$u|_{x_1=0}=g(x'),\qquad (1)$$

где $x'=(x_2,\ldots,x_s)$, $|f(x)|\leqslant \tilde{c}_1 e^{-c_2 x_1}$, f, g — T-периодичны по $x_2,\ldots,x_s\,(T\sim 1)$, f, $g\in C^\infty$; коэффициенты (1.1) удовлетворяют условиям из § 1, c_1 $c_2>0$.

Как и в § 2, ищем асимптотику в виде (2.1), однако отказываемся от требования 1-периодичности $N_i(\xi)$ по $\xi_1,\ldots,\xi_s$, заменяя его требованием, чтобы $N_i(\xi)$ являлись суммой $N_i^0(\xi)+$ $+N_i^1(\xi)$; здесь $N_i^0(\xi)$ — 1-периодические функции $\xi_1,\ldots,\xi_s$, совпадающие с функциями $N_i(\xi)$ из § 2, $M_i^1(\xi)$ — «погранслойные добавки», 1-периодические по $\xi_2,\ldots,\xi_s$, экспоненциально быстро стремящиеся к нулю при $\xi_1\to+\infty$ вместе с первыми производными. После подстановки такого ряда (2.1) в оператор L^ε и граничное условие (1) потребуем независимости коэффициентов полученных разложений от быстрых переменных. Тогда, наряду с уравнениями (2.3), для N_i получаем условия $N_i(0,\xi')=h_i^1=$ $=\text{const}$. Поскольку N_i^0 определены в § 3, имеем цепочку уравнений для N_i^1:

$$L_{\xi\xi}N_i^1+T_i^1(\xi)=0,\quad \xi\in R_+^s=(0,+\infty)\times R^{s-1}\qquad (2)$$

с граничным условием

$$N_i^1(0,\xi')=-N_i^0(0,\xi')+h_i^1,\quad \xi_1=0.\qquad (3)$$

Здесь N_i^1 упорядочиваются, как в § 2, T_i^0 определяются равенствами (2.4) с точностью до переобозначения N_i на N_i^1, константа h_i^1 выбирается (однозначно) из условия существования у задачи (2), (3) экспоненциально быстро стремящегося к нулю при $\xi_1\to+\infty$ 1-периодического по $\xi_2,\ldots,\xi_s$ решения. После приравнивания $L^\varepsilon u^{(\infty)}-f$ и $u^{(\infty)}|_{x_1=0}-g$ асимптотически к нулю получаем *осредненное уравнение бесконечного порядка* (2.5) и *осредненное граничное условие* вида

$$\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\sum_{|i|=l}h_i^1(D^i v)|_{x_1=0}-g(x')\sim 0.\qquad (4)$$

Далее ас. р. этой задачи отыскивается в виде регулярного ряда (2.6). После подстановки (2.6) в (2.5), (4) получаем рекуррентную цепочку задач для v_j.

Метод предназначен для решения задач о контакте нескольких периодических сред и краевых задач для уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, заданных в слое или полупространстве. Как и в методе осредненного уравнения бесконечного порядка, вводится функция v, регулярно зависящая от параметра, и ас. р. $u^{(\infty)}$ отыскивается в виде ряда по степеням ε с коэффициентами, зависящими от быстрых переменных ξ и производных функций v. Эти коэффициенты равны сумме периодической по ξ и погранслойной составляющих (вторая стремится к нулю при удалении от границы). После подстановки $u^{(\infty)}$ в уравнение и граничные условия определяем периодическую и погранслойную составляющие из требований независимости коэффициентов рядов, полученных в результате такой подстановки, от быстрых переменных. В результате получаем асимптотические уравнения и граничное условие (*осредненную задачу*) для неизвестной функции v.

Другой вариант метода предполагает поиск решения в виде ряда из § 1, где функции u_l также являются суммами двух составляющих: периодической и «погранслойной». Далее, после подстановки, получаем рекуррентную цепочку задач относительно составляющих u_l, а условия их разрешимости в соответствующих классах дают «параллельную цепочку» краевых задач для v_l, аналогичную полученной в § 1.

В заключение остановимся на основных идеях обоснования методов и доказательства теорем типа главы 1. Формализм построения ас. р. таков, что при подстановке в уравнение частной суммы ряда $u^{(\infty)}$ достаточно большой длины можно получить невязку любого степенного по параметрам порядка. Используя априорные оценки для исходной задачи, удается показать близость точного решения и частной суммы $u^{(\infty)}$. При доказательстве результатов 1 главы возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью учета невязки в граничных условиях. Эти трудности преодолеваются либо с помощью использования принципа максимума, либо техники «срезающих» пограничный слой функций (см. [1]).

§ 5. Описание процессов в периодических средах посредством функций, зависящих от быстрых переменных

Характерной особенностью рассмотренных выше методов является получение осредненного уравнения, не содержащего быстрых переменных. Однако в ряде случаев такой подход может оказаться слишком сложным. Так, для некоторых нелинейных задач построение осредненных уравнений и их решение требуют неоправданно больших затрат вычислительной работы. Более целесообразным может оказаться описание таких процессов с помощью функций, зависящих как от быстрых, так и от медленных переменных, с характерным размером изменения по обеим группам переменных, не стремящимся к нулю при $\varepsilon\to0$ (метод многих масштабов).

Рассмотрим простейшую одномерную модель для задач пластичности в одномерной периодической среде: вектор перемещений u и первый столбец σ тензора напряжений связаны уравнением

$$R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0; \qquad (1)$$

первый столбец тензора относительных удлинений $e = \partial u / \partial x$ и вектор σ связаны уравнением

$$\frac{\partial e}{\partial t} - G\left(\frac{x}{\varepsilon}, e, \sigma, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) = 0, \tag{2}$$

$R(\xi)$, $G(\xi, ., ., .)$ — периодические функции ξ. Ас. р. ищем в виде

$$u \sim u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t, x/\varepsilon) + \ldots$$
$$\sigma \sim \sigma_0(x, t) + \varepsilon \sigma_1(x, t, x/\varepsilon) + \ldots, \tag{3}$$

где $u_i(x, t, \xi)$, $\sigma_i(x, t, \xi)$ — 1-периодические функции ξ.

Подстановка (3) в (1), (2) после соответствующих преобразований приводит к системе уравнений относительно неизвестных функций u_0, σ_0 и $e_1(x, t, \xi) = \partial u_1 / \partial \xi$:

$$\langle R \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial (e_0 + e_1)}{\partial t} - G\left(\xi, e_0 + e_1, \sigma_0, \frac{\partial \sigma_0}{\partial t}\right) = 0,$$
$$e_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \tag{4}$$
$$\langle e_1 \rangle = 0.$$

Наряду с функциями u_0, σ_0, не зависящими от ξ, система (4) содержит неизвестную функцию e_1, зависящую от ξ.

Глава 3

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Как отмечалось во второй главе статьи, развитие численных методов обусловило появление новых возможностей в разработке и применении асимптотических методов и, в частности, методов построения равномерно пригодных асимптотических разложений для искомых решений.

Ниже один из методов — метод осреднения — излагается в виде, где требование 1) из второй главы не всегда выполнено. Используемые ниже соображения в частных случаях применялись и раньше, см. [3], [7], [9], [11]. Заметим, что и в наиболее известном варианте метода осреднения — методе Крылова — Боголюбова — Митропольского (КБМ) [3] — оба требования также не всегда выполнены. Например, системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon F(u, t). \tag{1}$$

ставится в соответствие осредненная система

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \langle F(v_0) \rangle, \tag{2}$$

где $\tau=\varepsilon t$, $\langle F(u)\rangle=\lim\limits_{T\to\infty}T^{-1}\int\limits_0^T F(u,t)\,dt$. В общем случае (2) является системой интегродифференциальных уравнений и в этом отношении сложнее системы (1). С другой стороны, решением (2) является функция $v_0(\tau)$ — главное приближение ас. р., а для следующего приближения $v_1(\tau)$ получается система

$$\frac{dv_1}{d\tau}=\langle F(v_1)\rangle+\varepsilon\langle G(v_1)\rangle, \tag{3}$$

где $G(u,t)$ — некоторая функция, которая находится по функции $F(u,t)$. Система (3) так же, как и аналогичные системы для следующих приближений, явно содержит ε.

Многочисленные примеры показывают, что нарушение требований 1), 2) не препятствует успешному применению метода КБМ. То же самое можно сказать и о многих других асимптотических методах.

Рассмотрим обобщение (1) — систему эволюционных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=\varepsilon f[u], \tag{4}$$

где $u=(u_1,\dots,u_n)^T$ — искомое решение, зависящее от времени t и, возможно, от пространственных переменных $(x_1,\dots,x_s)\equiv\equiv x$; L — линейный, f — нелинейный оператор.

Пусть для $u(t)$ (зависимость от x будет для краткости опускаться) поставлено начальное условие

$$u(0)=u_0. \tag{5}$$

Ас. р. задачи (4), (5), равномерно пригодное при $t=O(\varepsilon^{-1})$, строится из решений однородного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}+Lv=0 \tag{6}$$

и неоднородного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t}+Lw=F(t). \tag{7}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия

У1. Существует такой линейный оператор $M=M(t,s)$, что для любой функции $F(t)$ уравнение (7) имеет частное решение

$$w=\int\limits_0^t MF(s)\,ds.$$

У2. Любое решение уравнения (6) ограничено при $t\to\infty$.

У3. Если $v(t)$ — любое решение уравнения (6), а $F(t)=f[v(t)]$, то при t, $s\to\infty$ функция $MF(s)$ ограничена.

У4. Для определенных в У3 функций MF справедливо тождество

$$\int_{t_0}^{t} MF(s)\,ds=(t-t_0)\langle F\rangle_0+G(t), \tag{8}$$

где функция G ограничена при $t\to\infty$,

$$\langle F\rangle_0=\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_{t_0}^{t_0+T} MF(s)\,ds, \tag{9}$$

предел в (9) не зависит от t_0. Предполагается также, что этот предел равномерен по t_0 и другим переменным, от которых зависит $MF(s)$, и равенство (9) можно дифференцировать по этим переменным, переставляя местами операции дифференцирования и предельного перехода. Пусть также справедливо равенство $L(tv)=tLv$ для любых функций $v(t)$, удовлетворяющих уравнению (6).

Эти условия, а также предположения о достаточной гладкости оператора f и решения u позволяют применять метод двухмасштабных разложений и строить ас. р. в виде

$$u\sim v_0(t,\tau)+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k[v_k(t,\tau)+w_k(t,\tau)],\quad \tau=\varepsilon t, \tag{10}$$

где функции v_k удовлетворяют уравнению (6) по переменным t, x. Для v_0 получаем осредненную задачу

$$\partial v_0/\partial\tau=\langle f[v_0]\rangle_0,\quad v_0(0,0)=u_0. \tag{11}$$

Функция w_1 представляется в виде

$$w_1=\int_0^t M(f[v_0]-\partial v_0/\partial\tau)\,ds.$$

Из (8), (9) и (11) следует, что функция w_1 ограничена при $t\to\infty$.

Для следующих членов ас. р. получаем осредненные задачи

$$\partial v_k/\partial\tau=\langle Av_k+g_k\rangle_0,\quad v_k(0,0)=0, \tag{12}$$

и явные выражения

$$w_{k+1}=\int_0^t M\left(Av_k-\frac{\partial v_k}{\partial\tau}+g_k\right)ds. \tag{13}$$

Выше через A обозначена производная Фреше оператора f в точке v_0, а функции $g_k(t,\tau)$ определяются ранее найденными членами ас. р. (10). Формулы (12), (13) имеют смысл, если достаточно гладки оператор f, члены ас. р., и если на каждом шаге асимптотического интегрирования выполнены условия, аналогичные условиям У3, У4.

Как следует из (11), (12), для построения ас. р. необходимо решать задачи Коши для систем интегродифференциальных уравнений, причем в определении средних участвует оператор

M, который может иметь весьма сложный аналитический вид. Кроме того, решения *осредненных задач* должны искаться среди функций, удовлетворяющих уравнению (6). Это показывает, что в общем случае практическое построение ас. р. (10) нетривиально. Однако такую сложность нельзя считать недостатком метода — эта сложность является «платой» за точность получаемых результатов. Можно высказать даже более сильное утверждение — главный член ас. р. должен удовлетворять уравнениям (6) и (11), иначе в ас. р. обязательно будут секулярные члены.

В простейших случаях из (10)—(13) получаются формулы известных асимптотических методов. Например, если $L\equiv 0$ и $f=f(u, t, \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, периодически зависящая от t, то функция v_0 совпадает с главным приближением, получаемым в методе КБМ [3]. То же самое верно и в случае, когда $L=\mathrm{diag}\,[i\lambda_1, \ldots, i\lambda_n]$, где λ_j, $j=1, \ldots, n$, — вещественные числа. Если

$$L=\mathrm{diag}\,[\lambda_1(\varepsilon t), \ldots, \lambda_n(\varepsilon t)], \quad \varepsilon f=f_0(\varepsilon t)+\varepsilon H(\varepsilon t)\,u,$$

H — квадратная матрица порядка n, то из (10)—(13) выводятся формулы метода регуляризации [7]. Если $L=P_r\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$, (где $P_r(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ — полином r-ой степени с постоянными коэффициентами), а искомое решение 1-периодично по x, то оператор M можно построить при помощи разложений в ряды Фурье и тем самым обобщить результаты [9]. Таким способом получается удовлетворительное описание слабонелинейного взаимодействия сильнодиспергирующих волн. Если же в рассматриваемой системе дисперсия тоже мала, что имеет место, например, при $m=1$, $L=\mathrm{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\,\partial/\partial x$, то использование рядов Фурье сопряжено со значительными трудностями. Такие задачи можно рассмотреть при помощи метода осреднения вдоль характеристик [11], который также является частным случаем метода (10)—(13). Рассмотрим простейший пример — задачу Коши для системы уравнений газовой динамики, записанной в инвариантах Римана,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial t}-\lambda(\varepsilon(r-s))\frac{\partial r}{\partial x}=0, \quad r(0, x)=r_0(x, \varepsilon),\\ &\frac{\partial s}{\partial t}+\lambda(\varepsilon(r-s))\frac{\partial s}{\partial x}=0, \quad s(0, x)=s_0(x, \varepsilon), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\lambda(\xi)=1+\lambda_1\xi+\ldots$. В случае гладких решений осредненная задача для главного члена ас. р. — функций $v_{01}(y, \tau)$, $v_{02}(z, \tau)$, $y=x+t$, $z=x-t$, имеет вид

$$\frac{\partial v_{01}}{\partial \tau}+\lambda_1(v_{01}-\langle v_{02}\rangle_0)\frac{\partial v_{01}}{\partial y}=0, \quad v_{01}(y, 0)=r_0(y, 0), \tag{15}$$

$$\frac{\partial v_{02}}{\partial \tau}+\lambda_1(v_{02}-\langle v_{01}\rangle_0)\frac{\partial v_{02}}{\partial z}=0, \quad v_{02}(z, 0)=s_0(z, 0),$$

Используя дивергентность уравнений (15), можно показать, что $\langle v_{01}\rangle_0=\langle r_0(y,\ 0)\rangle_0$, $\langle x_{02}\rangle_0=\langle s_0(z,\ 0)\rangle_0$, и тем самым разбить систему (15) на две независимых задачи Коши. Это обстоятельство существенно упрощает решение нелинейной задачи (15).

В описываемой методике, несмотря на ее абстрактность, основным понятием является классическое понятие секулярного члена: условие У4 позволяет при помощи осреднения извлекать секулярные члены из решений неоднородных уравнений (7), а метод двухмасштабных разложений позволяет строить ас. р., не содержащие секулярные члены. Задачи (4), (5), для которых еще должны быть выполнены условия У1—У4, являются лишь простейшими примерами задач, в которых возникают секулярные члены. Рассмотрим класс задач, в которых возможно появление более сильных, по сравнению с рассмотренными выше, секулярных членов.

Пусть задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Lu=\varepsilon f\,[u], \tag{16}$$

$$u(0)=u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0)=u_1, \tag{17}$$

где относительно u, L и f делаются те же предположения что и выше. Класс рассматриваемых задач опишем при помощи условий

У5. $u_0\in\Gamma_0$, $u_1\in\Gamma_1$, где Γ_0, Γ_1 — такие множества начальных данных, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+Lv=0, \quad v(0)=\tilde{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0)=\tilde{u}_1 \tag{18}$$

ограничено при $t\to\infty$, $\tilde{u}_0\in\Gamma_0$, $\tilde{u}_1\in\Gamma_1$.

У6. Существует такой линейный оператор $M=M(t,\ s)$, что для любой функции $F(t)$ уравнение $\partial^2 w/\partial t^2+Lw=F(t)$ имеет частное решение $w=\int\limits_0^t MF(s)\,ds$.

У7. Если v — любое ограниченное решение задачи (18), а $F(s)=f[v(s)]$, то $MF(s)=sM_1F(s)+M_2F(s)$, где M_1, M_2 — такие нелинейные операторы, что функции $M_1F(s)$, $M_2F(s)$ ограничены при t, $s\to\infty$. Кроме того, $M_1F(s)\equiv 0$, если $\{F\}=0$, здесь $\{\cdot\}$ — некоторое среднее такое, что $\{F\}=F$ для F, не зависящих от t.

У8. Если $\{F\}=0$, то для такой функции F справедливо условие У4.

Ас. р. задачи (16), (17) ищется в виде

$$u\sim v_0(t,\ \eta)+V_0(\tau,\ \eta)+\sum_{k\geqslant 1}\mu^k[v_k(t,\ \eta)+V_k(\tau,\ \eta)+$$
$$+w_k(t,\ \tau,\ \eta)+W_k(t,\ \tau,\ \eta)], \quad \tau=\mu t, \quad \eta=\mu^2 t, \quad \mu=\sqrt{\varepsilon}, \tag{19}$$

где функции v_k, V_k, w_k удовлетворяют уравнению (18) и $W_1 \equiv 0$. Подстановка (19) в (16) приводит к цепочке уравнений, первое из которых принимает вид

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}+LW_2=-2\frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \tau}-2\frac{\partial^2 v_0}{\partial t \partial \eta}-\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2}+f\,[v_0+V_0]. \tag{20}$$

Для построения частного решения уравнения (20) естественно воспользоваться условием У6. Существенно, что два первых члена в правой части (20) можно проинтегрировать «явно». Для W_2 получим

$$W_2=-t\left(\frac{\partial w_1}{\partial \tau}+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)+\int\limits_0^t M\left(f\,[v_0+V_0]-\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2}\right)ds. \tag{21}$$

Как следует из условия У7, интеграл в (21) может иметь порядок t^2 при $t \to \infty$. Исключая такие квадратичные секулярности, получим первое осредненное уравнение

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2}=\{f\,[v_0+V_0]\}. \tag{22}$$

Для исключения в (21) линейных секулярностей используем условие У8 и получим

$$\partial w_1/\partial \tau=\langle f[v_0+V_0]-\partial^2 V_0/\partial \tau^2\rangle-\partial v_0/\partial \eta.$$

Дальше ас. р. может строится по-разному. Пока предположим, что выполнены условия

У9. Все решения уравнения (22) ограничены при $\tau \to \infty$;

У10. Если v_0 — любое ограниченное решение уравнения (18), а V_0 — любое решение уравнения (22), то функция $F_1(t, \tau, \eta)$ тоже ограничена при $\tau \to \infty$ и справедливо равенство:

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} F_1(t, s, \eta)\,ds=(\tau-\tau_0)\,\langle F_1 \rangle_1+G_1(t, \tau, \eta),$$

где функция G_1 ограничена при $\tau \to \infty$,

$$\langle F_1 \rangle_1=\lim_{T \to \infty} T^{-1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+T} F_1(t, s, \eta)\,ds \tag{23}$$

и свойства равенства (23) аналогичны свойствам равенства (9).

Теперь функция w_1 будет ограниченной при $\tau \to \infty$, если $\partial v_0/\partial \eta=\langle\langle f[v_0+V_0]-\partial^2 V_0/\partial \tau^2\rangle\rangle_1$.

Если же условия У9, У10 не выполнены, то функцию v_0 следует определять не зависящей от η. Можно также считать, что и остальные члены ас. р. от η не зависят. Это упрощает процедуру асимптотического интегрирования, однако позволяет получить равномерно пригодное ас. р., вообще говоря, лишь при $t=O(\mu^{-1})=O(\varepsilon^{-0,5})$.

Для следующих членов ас. р. получаются аналогичные осредненные уравнения, если на каждом шаге выполнены некоторые дополнительные условия типа У7, У8, У10. Получим

$$\frac{\partial^2 V_k}{\partial \tau^2}=\{A(v_k+V_k)+h_k\},$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial \eta}=\ll A(v_k+V_k)+h_k-\frac{\partial^2 V_k}{\partial \tau^2}\gg_1,$$

здесь функции $h_k(t, \tau, \eta)$ определяются уже найденными членами ас. р. Для w_{k+2}, W_{k+2} имеем явные формулы

$$w_{k+1}=\int_0^\tau\left(\left\langle A(v_k+V(s,\eta))-\frac{\partial^2 V_k}{\partial \tau^2}(s,\eta)+h_k(t,s,\eta)\right\rangle-\frac{\partial v_k}{\partial \eta}\right)ds,$$

$$W_{k+2}=-t\left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial \tau}+\frac{\partial v_k}{\partial \eta}\right)+\int_0^t M\Big(A(v_k(s,\eta)+V_k)-\frac{\partial^2 V_k}{\partial \tau^2}+ \tag{24}$$

$$+h_k(s,\tau,\eta)\Big)\,ds,$$

причем функции W_{k+2} ограничены при $t\to\infty$ в силу (24).

При подстановке (19) в начальные условия получаем

$$v_k(0,0)+V_k(0,0)+\omega_{k1}(0)=\delta_{0k}u_0,$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}(0,0)+\frac{\partial V_{k-1}}{\partial \tau}(0,0)+\omega_{k2}(0)=\delta_{0k}u_1, \tag{25}$$

где $\omega_{k1}=\omega_k+W_k$, $\omega_{k2}=\partial\omega_{k1}/\partial t+\partial\omega_{k-1,1}/\partial\tau+\partial\omega_{k-2,1}/\partial\eta+\partial v_{k-2}/\partial\eta+$ $+\partial V_{k-2}/\partial\eta$. Так как функция ω_{k1} определяется раньше, чем функции v_k и V_k, то из (25) следует, что $V_k(0,0)$ можно выбрать так, чтобы $v_k(0,0)\in\Gamma_1$. Так как $\partial w_k/\partial t$ $(0, 0, 0)=0$, то и $\omega_{k2}(0)$ определяется раньше, чем функция V_{k-1}. Поэтому при $k\geqslant 1$ можно выбрать $\partial V_{k-1}/\partial\tau$ $(0, 0)$ так, чтобы $\partial v_k/\partial t$ $(0, 0)\in\Gamma_1$.

Простейший пример задач вида (16), (17) можно получить при $L\equiv 0$ и $f=f(u, t, \varepsilon)$, где нелинейная функция f периодически зависит от t. Однако более известны задачи с частными производными — уравнения колебаний струн, балок, стержней и т. д. В [9] рассмотрен ряд таких задач, в которых не возникают квадратичные секулярные члены, что позволяет обойтись без промежуточного параметра $\mu=\sqrt{\varepsilon}$ и переменной $\tau=\mu t$. Для примера возьмем модельную задачу — уравнения Клейна—Гордона

$$\partial^2 u/\partial t^2-\partial^2 u/\partial x^2=\varepsilon f(u).$$

Главное приближение для $u(t, x)$ состоят из трех слагаемых: $v_{01}(y, \eta)$, $v_{02}(z, \eta)$, $V_0(\tau, \eta)$, где $y=x+t$, $z=x-t$. Для этих функций получаем осредненную систему

$$\partial^2 V_0/\partial\tau^2=\int_0^1\int_0^1 f\,(v_{01}(y,\eta)+v_{02}(z,\eta)+V_0(\tau,\eta))\,dydz,$$

$$\partial^2 v_{01}/\partial\eta\partial y=0{,}5\left\langle\int_0^1[f\,(v_{01}(y,\eta)+v_{02}(z,\eta)+V_0(\tau,\eta))-\right.$$

$$-\partial^2 V_0/\partial\tau^2]\,dz\,\rangle_1, \qquad (26$$

$$\partial^2 v_{02}/\partial\eta\partial z = -0{,}5\,\langle \int_0^1 [f\,(v_{01}(y,\eta)+v_{02}(z,\eta)+V_0(\tau,\eta))-$$

$$-\partial^2 V_0/\partial\tau^2]\,dy\,\rangle_1.$$

Здесь предполагается, что начальные данные для $u(t, x)$ 1-периодичны по x и что все решения уравнения (26) ограничены при $\tau\to\infty$. Как видно из приведенного примера, обойтись без переменной τ и параметра μ можно лишь в случае, когда у (26) есть решения, не зависящие от τ. Это налагает весьма жесткие ограничения на функцию $f(u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.*, Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984, 352 с.
2. *Бердичевский В. Л.*, Вариационные принципы механики сплошной среды. М.:Наука, 1983, 448 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
4. *Ван Фо Фы Г. А.*, Теория армированных материалов. М.: Наука, 1971, 230 с.
5. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.*, Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970, 230 с.
6. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник А. А., Ха Тьен Нгоан.*, Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. Успехи мат. наук, 1979, *34*, вып. 5, 63—133
7. *Ломов С. А.*, Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 398 с.
8. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.*, Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974, 279 с.
9. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.*, Асимптотическое решение уравнений в частных производных. Киев: Вища школа, 1976, 590 с.
10. *Победря Б. Е.*, Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984, 336 с.
11. *Штарас А. Л.*, Асимптотическое интегрирование слаболинейных уравнений с частными производными. Докл. АН СССР, 1977, *237*, № 3, 525—528
12. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.*, Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1978, 301 pp.
13. *Christensen R. M.*, Mechanics of Composite Materials. N.-Y. — Chichester — Brisbane — Toronto: A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, 1979 (Пер на рус. яз. под ред Ю. М. Тарнопольского: *Кристенсен Р.*, Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982, 334 с.)
14. *De Giorgi E., Spagnolo S.*, Sulla convergenza degli integrali dell energia per operatori ellittici del secondo ordine. Boll. Unione mat. ital., 1973, № 8, 391—411
15. *Sanchez-Palencia E.*, Non-Homogeneous media and vibration theory. N.— Y.: Springer — Verlag, 1980 (Пер. на рус. яз. под ред. О. А. Олейник: *Санчес-Паленсия Е.*, Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984, 472 с.)

УДК 517.955.8

I М. В. Федорюк, Уравнения с быстро осциллирующими решениями. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 5—56

Изложен метод канонического оператора Маслова, позволяющий построить асимптотику решений в большом для линейных уравнений с частными производными. Эти уравнения содержат малые параметры при старших производных, решения носят осциллирующий характер. Приведены приложения к задачам квантовой механики и другим. Рассмотрены некоторые классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными с быстроосциллирующими решениями. Библ. 25.

УДК 517.965.8

II. Б. Р. Вайнберг, Асимптотическое поведение при $t\to\infty$ решений внешних смешанных задач для гиперболических уравнений и квазиклассика. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1987, 57—92

Исследованы асимптотические свойства решений внешних краевых задач: коротковолновая и длинноволновая асимптотика решений и аналитические свойства резольвенты эллиптических задач, асимптотика спектральной функции для уравнений во всем пространстве, квазиклассическая асимптотика решения задачи рассеяния и амплитуды рассеяния, асимптотическое поведение при неограниченном возрастании времени решений внешних смешанных задач для гиперболических уравнений. Устанавливается связь между уходом волновых фронтов и убыванием локальной энергии. Доказательства проводятся схематически или иллюстрируются на простых примерах. Библ. 74.

УДК 517.955.8

III. В. М. Бабич, Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения. «Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 93—134

В статье изложены основные асимптотические методы теории дифракции волн. Рассмотрены лучевой метод, структура поля вблизи каустики, гауссовы пучки, метод суммирования гауссовых пучков, волны типа шепчущей галереи. Библ. 31.

УДК 517.955.8+517.984.66

IV. В. Ф. Лазуткин. Квазиклассическая асимптотика собственных функций. «Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 135—174

Статья содержит изложение квазиклассического метода для получения асимптотики дискретного спектра многомерного дифференциального оператора «типа Шрёдингера». Основой для построений служит колмогоровское инвариантное множество в фазовом пространстве соответствующей классической динамической системы (это множество диффеоморфно произведению тора на канторово множество, существование колмогоровских множеств устанавливается в теории КАМ). Количество аппроксимируемых асимптотикой собственных чисел оценивается мерой Лиувилля колмогоровского множества, деленной на объем «квантовой ячейки». Излагается история вопроса и приводится обзор литературы. Библ. 51, ил. 5.

УДК 517.955.8+517.958:532.526

V. А. М. Ильин. Пограничный слой. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 175—214

Излагаются методы решения некоторых классов краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих малый параметр. Эти задачи характерны тем, что их решения резко меняются в узких областях вблизи границы (пограничный слой) или около других множеств меньшей размерности. Основное внимание уделяется методу согласования асимптотических разложений, который носит также названия: метод сращивания, метод склейки, сшивки и т. п. Методы иллюстрируются на конкретных примерах краевых задач. Библ. 45.

УДК 517.955.8+517.958:530.145.7

VI. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, А. Л. Штарас, Метод осреднения для уравнений с частными производными и его применения. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 215—240

Рассматриваются асимптотические и численно-асимптотические методы решения уравнений в частных производных, описывающих поля и процессы в неоднородных средах, исследуются слабо нелинейные задачи. Библ. 15.