Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ф. Л. Черноусько, А. С. Шамаев, Эволюционные уравнения для медленных переменных в теории сингулярно возмущенных систем,
Докл. АН СССР, 1984, том 277, номер 2, 315–318

https://www.mathnet.ru/dan9558

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
13 мая 2025 г., 06:48:57

УДК 517.919

Ф.Л. ЧЕРНОУСЬКО, А.С. ШАМАЕВ

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 10 IX 1983)

Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, которые называются сингулярно возмущенными системами. Как известно из теории таких систем [1, 2], их асимптотическое решение состоит из регулярной (медленно изменяющейся) части и функций типа пограничного слоя, быстро изменяющихся в окрестности начальной точки. В данной работе установлено, что эволюция решения вне пограничного слоя в каждом приближении может быть описана некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, порядок которой равен числу медленных переменных. Эти системы можно назвать системами эволюционных уравнений. Указан алгоритм их построения, который связан с теорией интегральных многообразий [3, 4]. Отметим, что результат, близкий к утверждению доказанной ниже теоремы, сформулирован в [5].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$(1)\qquad \epsilon\frac{dz}{dt}=F(z,y,t,\epsilon),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t,\epsilon)$$

с начальными условиями

$$(2)\qquad z(0,\epsilon)=z^0,\quad y(0,\epsilon)=y^0,$$

где $z=(z',\ldots,z^n)$, $y=(y',\ldots,y^m)$. Предположим, что система уравнений (1) удовлетворяет условиям I–IV ([2], стр. 47–48, 78), в частности, вспомогательная система уравнений

$$\frac{d\tilde z}{d\tau}=F(\tilde z,y,t,0)$$

имеет при фиксированных y, t изолированную устойчивую по первому приближению точку покоя $\tilde z=\varphi(y,t)$.

Рассмотрим формальное равенство, введенное в [4],

$$(3)\qquad \epsilon\sum_{i=0}^{\infty}\epsilon^i\left(\frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial H_i}{\partial x}f\left(\sum_{i=0}^{\infty}\epsilon^iH_i(x,t),x,t,\epsilon\right)\right)=$$
$$=F\left(\sum_{i=0}^{\infty}\epsilon^iH_i(x,t),x,t,\epsilon\right),$$
$$x=(x^1,\ldots,x^m),\quad H_i=(H_i^1,\ldots,H_i^n).$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях ϵ в левой и правой частях равенства (3), можно последовательно определить функции $H_0(x,t)$, $H_1(x,t)$, ... Нетрудно понять, что

$$H_1(x,t)=F_z^{-1}(\varphi(x,t),x,t,0)[\varphi_x(x,t)f(\varphi(x,t),x,t,0)+\varphi_t(x,t)].$$

Здесь и далее g_z, g_y, g_t и т.д. обозначают соответствующие матрицы частных производных вектор-функции g.

Т е о р е м а. *Пусть* $y(t,\epsilon)$, $z(t,\epsilon)$ – *решение задачи Коши* (1), (2), *причем система* (1) *удовлетворяет условиям* I–IV из [2] (*см. стр.* 47–48, 78). *Пусть далее*

m-мерная вектор-функция $x_N(t, \epsilon)$ при $N=0, 1, \ldots$ удовлетворяет системе уравнений

$$(4)\qquad \frac{dx_N}{dt} = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i H_i(x_N, t), x_N, t, \epsilon\right),$$

где функции H_i определены формальным тождеством (3), и начальным условиям

$$(5)\qquad x_N(0, \epsilon) = x^*_{\epsilon, N}, \quad x^*_{\epsilon, N} = y^0 + \epsilon y^0_1 + \ldots + \epsilon^N y^0_N,$$

где $y^0_1, y^0_2, \ldots$ – некоторые постоянные векторы, n-мерная вектор-функция $u_N(t, \epsilon)$ определена равенствами

$$(6)\qquad u_N(t, \epsilon) = \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i H_i(x_N(t, \epsilon), t).$$

Тогда существует такая последовательность векторов $\{y^0_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, что для любого $N = 0, 1, \ldots$ и любого $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, где $\epsilon_0 = \mathrm{const} > 0$ – достаточно малое число, справедливы неравенства

$$(7)\qquad |y(t,\epsilon) - x_N(t, \epsilon)| \leqslant C_N \epsilon^{N+1}, \quad t \in [t_0, T],$$

$$(8)\qquad |z(t, \epsilon) - u_N(t, \epsilon)| \leqslant C_N \epsilon^{N+1}, \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь $t_0 > 0, C_N > 0$ – постоянные, не зависящие от ϵ.

Доказательство теоремы основано на теореме А.Б. Васильевой об асимптотическом разложении решения задачи (1), (2) (см. [2]). Согласно [2] решение $y(t, \epsilon), z(t, \epsilon)$ задачи (1), (2) может быть представлено в виде

$$z(t, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left(\bar{z}_i(t) + \Pi_i z\left(\frac{t}{\epsilon}\right)\right), \quad y(t, \epsilon) = \bar{y}_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \left(\bar{y}_i(t) + \Pi_i y\left(\frac{t}{\epsilon}\right)\right),$$

где функции $\bar{y}_0$ и $\bar{z}_0$ удовлетворяют уравнениям

$$(9)\qquad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = f(\varphi(\bar{y}_0, t), \bar{y}_0, t, 0), \quad \bar{y}_0(0) = y^0, \quad \bar{z}_0(t) = \varphi(\bar{y}_0(t), t),$$

а функции $\bar{y}_k(t), \bar{z}_k(t), k = 1, 2, \ldots$, являются решениями систем уравнений

$$(10)\qquad \frac{d\bar{y}_k}{dt} = \bar{f}_k, \quad \frac{d\bar{z}_{k-1}}{dt} = \bar{F}_k.$$

Здесь $\bar{f}_k$ и $\bar{F}_k$ суть функции от $t, \bar{z}_i, \bar{y}_i, i = 0, 1, \ldots, k$, которые определяются как коэффициенты при ϵ^k в разложении по степеням ϵ выражений

$$f(\bar{z}_0 + \epsilon\bar{z}_1 + \ldots, \bar{y}_0 + \epsilon\bar{y}_1 + \ldots, t, \epsilon), F(\bar{z}_0 + \epsilon\bar{z}_1 + \ldots, \bar{y}_0 + \epsilon\bar{y}_1 + \ldots, t, \epsilon).$$

Легко видеть, что $\bar{f}_k = f_z\bar{z}_k + f_y\bar{y}_k + \tilde{f}_k$, $\bar{F}_k = F_z\bar{z}_k + F_y\bar{y}_k + \tilde{F}_k$, где $\tilde{f}_k$ и $\tilde{F}_k$ зависят от $\bar{z}_i$, $\bar{y}_i$, $i = 0, \ldots, k-1$. Первая система (10) есть группа дифференциальных, вторая – группа алгебраических уравнений. Вектор $\bar{y}_k$ удовлетворяет при этом начальным условиям $\bar{y}_k(0) = y^0_k$. Постоянные y^0_k, $k = 1, 2, \ldots$, определяются через функции пограничного слоя (см. [2]). Доказано [2], что для $N = 0, 1, \ldots$ имеют место неравенства

$$(11)\qquad |z(t, \epsilon) - \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i \bar{z}_i(t)| + |y(t, \epsilon) - \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i \bar{y}_i(t)| \leqslant c_N \epsilon^{N+1},$$

где постоянная $c_N > 0$ не зависит от $\epsilon > 0, t \in [t_0, T]$, $t_0 > 0$. Предположим, что построено k функций Φ_i $(\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{k-1}, t)$, $i = 0, \ldots, k-1$, таких, что $\bar{z}_i(t) = \Phi_i(\bar{y}_0(t), \ldots, \bar{y}_i(t), t)$, $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда вторую систему (10) можно записать в виде

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\Phi_{k-1}(\bar{y}_0(t), \ldots, \bar{y}_{k-1}(t), t) = F_z\bar{z}_k + F_y\bar{y}_k + \tilde{F}_k(\Phi_0, \ldots, \Phi_{k-1}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{k-1}, t).$$

Первую систему (10) можно представить в виде

$$(13)\quad \frac{d\bar{y}_i}{dt} = \bar{f}_i(\Phi_0, \ldots, \Phi_i, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_i, t), \quad i = 0, \ldots, k-1.$$

С помощью равенства (13) можно выразить $\frac{d\bar{y}_i}{dt}$ в левой части равенства (12) через $\Phi_0, \ldots, \Phi_i$. Разрешая (12) относительно $\bar{z}_k$, получим равенство $\bar{z}_k = \Phi_k(\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_k, t)$. Определяя описанным образом последовательно функции Φ_i, можно свести задачу о нахождении функций $\bar{y}_i(t)$ к интегрированию уравнений (13), не содержащих $\bar{z}_i$.

Рассмотрим теперь уравнение (4) с малым параметром ϵ. Решение этого уравнеия при начальных условиях (5) существует в силу гладкости функций H_i [4]. Уравнение (4) является регулярно возмущенным, поэтому его решение $x_N(t, \epsilon)$ при начальных условиях (5) можно искать в виде асимптотического ряда

$$(14)\quad x_N(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \ldots$$

Определим выражения $W_0(x_0, t), W_1(x_0, x_1, t), \ldots, W_N(x_0, \ldots, x_N, t)$ как коэффициенты при степенях ϵ в разложении

$$(15)\quad \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i H_i(x_0 + \epsilon x_1 + \ldots + \epsilon^N x_N, t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i W_i(x_0, x_1, \ldots, x_i, t).$$

Подставляя (13) в систему (4), получаем для определения $x_i(t)$ уравнения

$$(16)\quad \frac{dx_i}{dt} = \bar{f}_i(W_0, \ldots, W_i, x_0, \ldots, x_i, t),$$

где $\bar{f}_i$ — те же функции своих аргументов, что и в уравнениях (13). Проводя индукцию по $i = 0, 1, 2, \ldots$, можно показать, что $W_i \equiv \Phi_i$. Таким образом, диффереациальные уравнения (13) и (16) совпадают. Положим теперь $x^*_{\epsilon, N} = y^0 + \epsilon y^0_1 + \ldots + \epsilon^N y^0_N$, где y^0_k — те же, что и для (10). Тогда начальные условия для уравнений (13) и (16) совпадут, и поэтому $\bar{y}_i(t) \equiv x_i(t)$. Для разложения (14) решения регулярно возмущенной системы (4) можно записать неравенство

$$|x_N(t, \epsilon) - \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i x_i(t)| \leqslant c'_N \epsilon^{N+1}, \quad t \in (0, T).$$

Из этого неравенства и оценки (11) с учетом $\bar{y}_i = x_i$ получим неравенство (7). Аналогично, на основании равенства $\bar{z}_i(t) = W_i(x_0, \ldots, x_i, t)$ и оценки (11) получим (8). Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Асимптотический метод решения сингулярно возмущенных систем [2] требует для построения каждого последующего приближения интегрировать системы (10), а также определить функции типа пограничного слоя. Таким образом, для построения N-го приближения нужно последовательно проинтегрировать N систем m-го порядка для медленных переменных. Доказанная выше теорема указывает одну систему (4) m-го порядка, которой удовлетворяет решение N-го приближения. При этом, однако, определение начальных условий (5) для системы (4) по-прежнему требует построения функций типа пограничного слоя. Поэтому в общем случае установленная теорема не позволяет упростить методику [2], хотя в некоторых случаях, отмеченных ниже, она может быть полезна.

2. Эволюционная система (4) может быть использована для качественного или приближенного исследования решения вне пограничного слоя, когда представляют интерес свойства решений, не зависящие от начальных условий. В этом случае нет необходимости определять начальные данные для системы (4).

3. В ряде практических задач имеется возможность измерения (наблюдения) фазового состояния исследуемой динамической системы, так что можно определить вектор $y(t_0)$ в некоторый момент $t_0 > 0$. Тогда для дальнейшего описания движения системы, в частности для численного интегрирования, можно воспользоваться эволюционной системой (4), приняв в качестве начального условия $x(t_0) = y(t_0)$. Нетрудно видеть, что при этом будут иметь место прежние оценки (7), (8).

4. В работах [3, 4] доказаны теормы о близости решений исходной системы (1) вне пограничного слоя к интегральному многообразию, определяемому равенством

$$(17) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i H_i(y, t).$$

Теорема, доказанная в настоящей работе, отличается тем, что устанавливает близость искомого решения системы (1) к некоторому индивидуальному решению эволюционного уравнения (4), лежащему на интегральном многообразии (17).

5. Эволюционные уравнения для медленных переменных, полученные в данной работе, неоднократно использовались ранее в конкретных задачах при исследовании динамики твердых тел с вязкими, упругими и вязкоупругими элементами. По-видимому, впервые данный подход применен в [6] при исследовании движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в случае малых чисел Рейнольдса. В [7] дано обоснование этого подхода применительно к рассматриваемой задаче. Этот же подход использован для исследования динамики твердого тела с демпфером (см. [8]). В работах [9–12] получены эволюционные уравнения для задач динамики твердого тела и систем твердых тел с сосредоточенными или распределенными вязкоупругими элементами. Обоснование этого подхода в случае систем с сосредоточенными параметрами дано в [13].

Отметим, что эволюционные уравнения для механических систем, полученные в [6, 7–12], имеют наглядный смысл: они представляют собой уравнения движения твердых тел, на которые действуют некоторые возмущающие силы и моменты, обусловленные наличием вязких или вязкоупругих элементов. Теорема, полученная в данной работе, позволяет в любом приближении дать строгое обоснование эволюционных уравнений для упомянутых выше механических систем в случае конечного числа степеней свободы.

Институт проблем механики
Академии наук СССР, Москва

Поступило
31 X 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* – Матем. сб., 1952, 31 (73), № 3, с. 575–586. 2. *Васильева А.Б., Бутузов Б.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем. М.: Наука, 1973. 272 с. 3. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.В.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с. 4. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* – Космич. иссл., 1976, т. 14, вып. 3, с. 366–371. 5. *Викторов Б.В.* – ДАН, 1977, т. 236, № 2, с. 296–299. 6. *Черноусько Ф.Л.* – ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 6, с. 1049–1070. 7. *Кобрин А.И.* – ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 431–440. 8. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., 1968. 232. 9. *Черноусько Ф.Л.* – Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 33–44. 10. *Черноусько Ф.Л.* – ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 34–42. 11. *Черноусько Ф.Л.* – Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 22–26. 12. *Черноусько Ф.Л.* – Там же, 1983, № 4, с. 101–113. 13. *Черноусько Ф.Л., Шамаев А.С.* – Там же, 1983, № 3, с. 33–42.