Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. È. Gheit, The structural and constructive properties of a function and its conjugate in L,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1972, Number 7, 19–30

https://www.mathnet.ru/eng/ivm4078

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
January 24, 2026, 20:22:16

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1972 МАТЕМАТИКА № 7 (122)

УДК 517.512

В. Э. Гейт

О СТРУКТУРНЫХ И КОНСТРУКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ И ЕЕ СОПРЯЖЕННОЙ В L

§ 1. Обзор результатов

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее тригонометрическое приближение порядка не более $n=0, 1, 2, \ldots$ (конструктивная характеристика), а $\omega_k(f, \delta)\,(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ есть k-й модуль гладкости (структурная характеристика) функции $f \in L_{2\pi}$, всюду в работе вычисляемые по норме $\|f\| = \pi^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$. Пусть, далее, $\tilde{f}$ — тригонометрически сопряженная с f функция (см., например, [3]).

1. В $L_{2\pi}$ рассмотрим классы функций

$$\tilde{L}_{2\pi} = \{f : \tilde{f} \in L_{2\pi}\},$$

$$E^{\varphi} = \{f : E_n(f) = O(\varphi(n^{-1}))\}, \quad \tilde{E}^{\varphi} = \{f : E_n(\tilde{f}) = O(\varphi(n^{-1}))\},$$

$$H_k^{\varphi} = \{f : \omega_k(f, \delta) = O(\varphi(\delta))\}, \quad \tilde{H}_k^{\varphi} = \{f : \omega_k(\tilde{f}, \delta) = O(\varphi(\delta))\},$$

где мажоранта $\varphi(\delta)$ непрерывна на $[0, \pi]$, $\varphi(0)=0$, $0 < \varphi(\delta') \leqslant \varphi(\delta'')$ при $0 < \delta' \leqslant \delta''$ (кратко: $\varphi \in \Phi$ [1], [2]). Здесь рассматривается

Задача. Указать окончательные условия вложений для этих классов (в зависимости от свойств $\varphi(\delta)$).

Приведем сначала известные результаты:

1) $H_k^{\varphi} \subset H_{k+r}^{\varphi}\,(k, r=1, 2, \ldots)$ при $\forall \varphi \in \Phi$;

2) $H_k^{\varphi} \subset E^{\varphi}$ $(k=1, 2, \ldots)$ при $\forall \varphi \in \Phi$.

Включение 1) следует из простого неравенства

$$\omega_{k+r}(f, \delta) \leqslant 2^r \omega_k(f, \delta) \quad (k, r=1, 2, \ldots;\ f \in L_{2\pi}), \tag{1}$$

а 2) — из обобщенного неравенства Джексона (см., например, [17], с. 338)

$$E_n(f) \leqslant C_k \omega_k(f, (n+1)^{-1}) \leqslant C_k \omega_k(f, n^{-1}) \quad (k, n=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

В настоящей работе $C_t > 0\,(C > 0)$ — константы, зависящие лишь от t (абсолютные), вообще говоря, разные в различных неравенствах.

С. Н. Бернштейн, как известно, первым поставил вопрос о справедливости включения, обратного к 2). Его метод доказательства вложения $E^{\varphi} \subset H_1^{\varphi}$ (при $\varphi(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, в $C_{2\pi}$) является основой при отыскании достаточных условий и в общем случае (см. [8], [1], [2], [11], [17]). Известен результат

3) $\left\{\varphi \in B_k : \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi(\nu^{-1}) = O(n^k \varphi(n^{-1}))\right\} \Longleftrightarrow E^{\varphi} = H_k^{\varphi}$ $(k=1, 2, \ldots)$

из [2], где приводится, не меняющееся и в $L_{2\pi}$, доказательство ($\Longrightarrow$) в терминах „эквивалентности“ ([6]; [17], с. 354).

Доказательство ($\Longleftarrow$) публикуется впервые (см. § 3, следствие 1).

Переходя к изложению результатов настоящей работы, отметим, что достаточность указываемых здесь условий либо была известна (теоремы 1, 2), либо просто выводится из известных включений (теоремы 3—6). И только в теореме 7 (и частично в 8) потребуется специальное рассмотрение.

Напротив, доказательство необходимости вводимых условий представляет значительные трудности. Сначала в § 2 на основе оценок $E_n(f)$ и $\omega_k(f, \delta)$ для функций f из некоторых специальных классов будут построены примеры функций с определенными свойствами (см. там f_1, $\tilde{f}_1$ и f_2, $\tilde{f}_2$). Затем, используя эти функции, мы доказываем ряд теорем бернштейновского типа (см. § 3), из которых, в частности, выводятся доказательства утверждений ($\Longleftarrow$) (необходимости) всех теорем § 1.

Теорема 1. $\left\{\varphi \in A : \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi(\nu^{-1}) < +\infty\right\} \Longleftrightarrow E^{\varphi} \subset \tilde{L}_{2\pi}$.

Теорема 2. $\left\{\in B\varphi: \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi(\nu^{-1}) = O(\varphi(n^{-1}))\right\} \Longleftrightarrow E^{\varphi} = \tilde{E}^{\varphi}$.

Утверждения ($\Longrightarrow$) этих теорем можно найти в [1], [11], а ($\Longleftarrow$) суть утверждения 1) и 2) следствия 3 в § 3.

Теорема 3. $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k \Longleftrightarrow E^{\varphi} = \tilde{H}_k^{\varphi}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Здесь ($\Longrightarrow$) — следствие из 3) и ($\Longrightarrow$) теоремы 2, а ($\Longleftarrow$) — это утверждение 1) следствия 2 в § 3.

Ниже $\varphi \in A_k$ (k натуральное) означает почти убывание (см., например, [2]) отношения $\varphi(\delta)/\delta^k$ на $(0, \pi]$.

Теорема 4. $\varphi \in B_k \Longleftrightarrow H_k^{\varphi} = H_{k+r}^{\varphi}$ $(k, r = 1, 2, \ldots;\ \varphi \in A_{k+1})$.

Здесь ($\Longrightarrow$) ясно из включений 1) — 3), а ($\Longleftarrow$) — это следствие 4 из § 3.

Теорема 5. $\varphi \in A \Longleftrightarrow H_k^{\varphi} \subset \tilde{L}_{2\pi}$ ($k = 1$, *k четное*; $\varphi \in A_k$).

Утверждение ($\Longrightarrow$) следует из ($\Longrightarrow$) теоремы 1 и включения 2), а ($\Longleftarrow$) — это утверждение 1) следствия 5 в § 3. В предположении, что $\varphi(\delta)$ — модуль непрерывности и $k = 1$, теорема 5 доказана в [19]. В теореме 5, как и в теоремах 6 и 7, не удалось доказать ($\Longleftarrow$) при $k > 1$ нечетных[1]. Это можно сделать, если условие $\varphi \in A_k$ заменить более ограничительным: $\varphi \in B_k$ (см. 3) леммы 5 в § 3).

Теорема 6. $\varphi \in B \Longleftrightarrow H_k^{\varphi} \subset \tilde{E}^{\varphi}$ ($k = 1$, *k четное*; $\varphi \in A_k$).

Здесь ($\Longrightarrow$) — следствие включения 2) и ($\Longrightarrow$) теоремы 2; по поводу ($\Longleftarrow$) см. следствие 5 в § 3.

Теорема 7. $\varphi \in B \Longleftrightarrow H_k^{\varphi} \subset \tilde{H}_{k+r}^{\varphi}$ ($k = 1$, *k четное*; $\varphi \in A_k$; $r = 1, 2, \ldots$).

Здесь ($\Longleftarrow$) — следствие ($\Longleftarrow$) теоремы 6, а для ($\Longrightarrow$) потребуется специальное доказательство. Как и в $C_{2\pi}$ (см. [2], а также [17]), можно при $k, l, n = 1, 2, \ldots$; $f \in L_{2\pi}$ получить неравенство

$$\omega_k(\tilde{f}, n^{-1}) \leqslant C_k C_l \left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \omega_l(f, \nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \omega_l(f, \nu^{-1}) \right\} \quad (3)$$

[1] Примечание при корректуре. Это доказано автором в [21].

в предположении сходимости указанного ряда. Так как $\omega_l(f, \delta) \in A_l$ для $f \in L_{2\pi}$ (см., например, [17]), то нетрудно понять, что при $k > l$ первое и второе слагаемые в (3) имеют одинаковый порядок. Значит,

$$\omega_{k+r}(\tilde{f}, n^{-1}) \leqslant C_k C_r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\omega_k(f, \nu^{-1}) \ (k, r, n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому, если $f \in H_k^\varphi$, где $\varphi \in B$, то $\omega_{k+r}(\tilde{f}, n^{-1}) = O(\varphi(n^{-1}))$, так что $f \in \tilde{H}_{k+r}^\varphi$, ибо, как и в $C_{2\pi}$ (см., например, [2]),

$$\omega_l(f, n^{-1}) = O(\varphi(n^{-1})) \Longleftrightarrow \omega_l(f, \delta) = O(\varphi(\delta)) \ (\varphi \in \Phi, f \in L_{2\pi}). \quad (4)$$

($\Longrightarrow$) теоремы 7 доказано. Аналогично из (3) и (4) доказывается утверждение ($\Longrightarrow$) следующей теоремы.

Теорема 8. $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k \Longleftrightarrow H_{k+r}^\varphi = \tilde{H}_k^\varphi$ $(k = 1, 2, \ldots;$ $\varphi \in A_k$ $r = 0, 1, \ldots)$.

Утверждение ($\Longleftarrow$) теоремы 8 — то же, что 2), 3) леммы 5 в § 3.

2. В E^φ, $\tilde{E}^\varphi$, H_k^φ, $\tilde{H}_k^\varphi$ рассмотрим следующие подклассы:

$$\mathscr{E}^\varphi = \{f : E_n(f) \sim \varphi(n^{-1})\}, \quad \tilde{\mathscr{E}}^\varphi = \{f : E_n(\tilde{f}) \sim \varphi(n^{-1})\},$$

$$\mathscr{H}_k^\varphi = \{f : \omega_k(f, \delta) \sim \varphi(\delta)\}, \quad \tilde{\mathscr{H}}_k^\varphi = \{f : \omega_k(\tilde{f}, \delta) \sim \varphi(\delta)\},$$

где (например, в $\mathscr{E}^\varphi$) $\sim$ - соотношение означает $E_n(f) = O(\varphi(n^{-1}))$, $\varphi(n^{-1}) = O(E_n(f))$.

Полный обзор результатов для этих классов имеется в [2] (применительно к $C_{2\pi}$).

При доказательстве утверждений ($\Longrightarrow$) теорем 10—12 используется ($\Longrightarrow$) из известного результата

$$\varphi \in B_k \Longleftrightarrow \mathscr{E}^\varphi = \mathscr{H}_k^\varphi \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad (5)$$

который в $L_{2\pi}$ нигде ранее не выписывался. Доказательство ($\Longrightarrow$) аналогично доказательству в $C_{2\pi}$ [2] эквивалентности соотношений $E_n(f) \sim \varphi(n^{-1})$ и $\omega_k(f, \delta) \sim \varphi(\delta)$ при $\varphi \in B_k$ (см. также [6]). Доказательство ($\Longleftarrow$) в (5) (см. § 3, следствие 1) публикуется впервые.

Теорема 9. $\varphi \in B \Longleftrightarrow \mathscr{E}^\varphi = \tilde{\mathscr{E}}^\varphi$.

Доказательство ($\Longrightarrow$) теоремы 9 аналогично доказательству в $C_{2\pi}$ [2] эквивалентности соотношений $E_n(f) \sim \varphi(n^{-1})$ и $E_n(\tilde{f}) \sim \varphi(n^{-1})$ при $\varphi \in B$. По поводу ($\Longleftarrow$) теоремы 9 см. § 3, следствие 3.

Теорема 10. $\varphi \in B_k \Longleftrightarrow \mathscr{H}_{k+r}^\varphi = \mathscr{H}_k^\varphi$ $(k, r = 1, 2, \ldots;$ $\varphi \in A_{k+1})$.

Теорема 11. $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k \Longleftrightarrow \mathscr{E}^\varphi = \tilde{\mathscr{H}}_k^\varphi$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 12. $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k \Longleftrightarrow \mathscr{H}_{k+r}^\varphi = \tilde{\mathscr{H}}_k^\varphi$ $(k = 1, 2, \ldots;$ $\varphi \in A_k;$ $r = 0, 1, \ldots)$.

Утверждение ($\Longrightarrow$) в теореме 10 ясно из (5), ибо $\varphi \in B_k \Longrightarrow \varphi \in B_{k+r}$. ($\Longrightarrow$) теоремы 11 вытекает из (5) и ($\Longrightarrow$) теоремы 9. ($\Longrightarrow$) теоремы 12 — следствие из ($\Longrightarrow$) в (5) и теорем 10 и 11. По поводу ($\Longleftarrow$) теорем 10, 11 и 12 см. § 3, соответственно следствия 4, 2 и 2), 3) леммы 5.

§ 2. Вспомогательные результаты

1. Лемма 1. *Пусть*

$$f(x)=a_0/2+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \quad x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad a_n \to 0, \ n \to \infty,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)|\Delta^2 a_\nu| < +\infty \ (\Delta^2 a_\nu = \Delta a_\nu - \Delta a_{\nu+1}, \ \Delta a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1}). \tag{6}$$

Тогда

$$E_n(f) \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\nu+1)|\Delta^2 a_\nu| \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

В частности, если $a_\nu \to 0$ *и* $0 \leqslant \Delta a_\nu \downarrow$ *при* $\nu \uparrow \infty$, *то*

$$E_n(f) \leqslant a_{n+1} + (n+1)\Delta a_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Доказательство (7), (8) фактически содержится в работе автора [20] (с. 41).

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_{2\pi}$ *и* $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$. *Тогда при* $n=0, 1, 2, \ldots$

$$E_n(f) \geqslant C \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} b_\nu \right|, \tag{9} \qquad E_n(f) \geqslant |a_{n+1}|, \ |b_{n+1}|. \tag{10}$$

Неравенство (10) хорошо известно, а (9) доказано в работе автора [20] (с. 42).

Замечание. Из (8) и (10) можно лишь заключить, что

$$a_{n+1} \leqslant E_n(f) \leqslant a_{n+1} + (n+1)\Delta a_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

для четной функции $f \in L_{2\pi}$ *с* a_ν, Δa_ν, $\Delta^2 a_\nu \geqslant 0$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$. Ценой некоторого усложнения доказательства можно установить *для таких функций* f более точный результат: $a_{n+1} \leqslant E_n(f) \leqslant a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{2n+2}) \leqslant 2a_{n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Лемма 3. *Пусть* $f \sim \Sigma a_\nu(f) \cos \nu x$, $g \sim \Sigma a_\nu(g) \sin \nu x$, f, $g \in L_{2\pi}$, *а* $a_\nu(f)$, $a_\nu(g)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1; *тогда при всех* $n \geqslant 2$

$$\omega_k(\psi, n^{-1}) \leqslant C_k n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n-1} |\Delta\{\nu^k [a_\nu(\psi) + \nu\Delta a_\nu(\psi)]\}| + |a_n(\psi) + n\Delta a_n(\psi)| +$$

$$+ \sup_{|h| \leqslant n^{-1}} \left\| \Delta_h^k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta[a_\nu(\psi) + \nu\Delta a_\nu(\psi)] \{K_\nu^\psi(x) - K_n^\psi(x)\} \right\|,$$

где при k *четном* $\psi = f$, *а* k *нечетном* $\psi = g$; K_ν^f — *ядро Фейера, а* K_ν^g — *сопряженное ядро Фейера* (см., например, [3]).

Доказательство. В условиях леммы (см. [3], гл. X)

$$\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta^2 a_\nu(\psi) K_\nu^\psi(x), \quad x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Заметим, что $(\nu+1)\Delta^2 a_\nu = \Delta[a_\nu + \nu\Delta a_\nu]$. Тогда для k-й разности с шагом h функции ψ (k соответствует выбору ψ, $n=1, 2, \ldots$) будем иметь (опуская значок ψ):

$$\|\Delta_h^k \psi\| = \left\| \Delta_h^k \left\{ \Big(\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n} + \sum_{\nu\geqslant n+1} \Big) \Delta[a_\nu + \nu\Delta a_\nu] K_\nu(x) \right\} \right\| =$$

$$= \left\| \Delta_k^h \sum_{\nu=1}^{n} [a_\nu + \nu\Delta a_\nu] \{K_\nu(x) - K_{\nu-1}(x)\} + \Delta_h^k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta[a_\nu + \nu\Delta a_\nu] \{K_\nu(x) - \right.$$

$$\left. - K_n(x)\} \right\| \leqslant \left\| \Delta_h^k \sum_{\nu=1}^{n} [\ldots]\{\ldots\} \right\| + \left\| \Delta_h^k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta[\ldots]\{\ldots\} \right\| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Займемся преобразованием Σ_1 (см. [20], с. 39):

$$\Sigma_1 = |h|^k \left\| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k [a_\nu + \nu\Delta a_\nu] \nu^{-k-1} (\nu+1)^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{\nu} j^{k+1} ((\sin(jh/2))/(jh/2))^k \cos j(x+kh/2) \right\| = |h|^k \left\| \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta\{\nu^k [a_\nu + \nu\Delta a_\nu]\} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{\nu} t_j(x, k, h) + n^k [a_n + n\Delta a_n] \sum_{j=1}^{n} t_j(x, k, h) \right\| \quad (h \neq 0),$$

$$t_j(x, k, h) = j^{-k-1}(j+1)^{-1} \sum_{m=1}^{j} m^{k+1} ((\sin(mh/2))/(mh/2))^k \cos m(x+kh/2).$$

Очевидно, для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\tau_\nu(k, h) = \left\| \sum_{j=1}^{\nu} t_j(x, k, h) \right\| \leqslant C_k \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n;\ |h| \leqslant n^{-1};\ k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Перестановкой порядка суммирования получаем

$$\tau_\nu(k, h) = \left\| \sum_{m=1}^{\nu} \left\{ m^{k+1} \sum_{j=m}^{\nu} j^{-k-1}(j+1)^{-1} \right\} ((\sin(mh/2))/(mh/2))^k \cos mx \right\|.$$

Обозначив $\{\ldots\} = \alpha_m(k, \nu)$ и применив дважды преобразование Абеля, находим

$$\tau_\nu(k, h) \leqslant \sum_{m=1}^{\nu-2} (m+1) |\Delta^2 \alpha_m(k, \nu)| \|\sigma_m(f_h)\| +$$

$$+ \nu |\Delta\alpha_{\nu-1}(k, \nu)| \|\sigma_{\nu-1}(f_h)\| + \alpha_\nu(k, \nu) \|S_\nu(f_h)\|, \tag{12}$$

где $\sigma_m(f_h)$ и $S_\nu(f_h)$ — суммы Фейера и Фурье функции

$$f_h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} ((\sin(\nu h/2))/(\nu h/2))^k \cos \nu x \quad (h \neq 0;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Непосредственный подсчет показывает, что: a) $|\Delta^2 \alpha_m(k, \nu)| \leqslant C_k \times \times \{m^{k-1}\nu^{-k-1} + m^{-3}\}$ $(1 \leqslant m \leqslant \nu - 2)$, b) $\nu|\Delta\alpha_{\nu-1}(k, \nu)| \leqslant C_k$, c) $\|S_\nu(f_h)\| = O(\nu)$. Кроме того, $\alpha_\nu(k, \nu) = 1/(\nu+1)$ и $\|\sigma_\nu(f_h)\| \leqslant C$ равномерно

по ν, k, $h \neq 0$ (см. [20], следствие 8, с. 43). Учитывая все это, из (12) уже нетрудно вывести (11). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть f и g — четная и нечетная функции из $L_{2\pi}$ с коэффициентами Фурье $a_\nu(f)$, $a_\nu(g) \geqslant 0$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда при всех $n = 1, 2, \ldots$*

$$\omega_k(\psi, n^{-1}) \geqslant \begin{cases} C_k \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} a_\nu(\psi), & \psi = g; \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (13) \\ C_k n^{-k} \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} \nu^{k-1} a_\nu(\psi), & \psi = g \ (k \text{ четное}),\ \psi = f \ (k \text{ нечетное}). \qquad (14) \end{cases}$$

Сопоставляя оценку (9) с неравенством (2), легко получить (13).

Докажем (14). Так как при k четном $\psi = g$, а при k нечетном, по предположению, $\psi = f$, то (см. [20], с. 39)

$$\Delta_h^k \psi(x - kh/2) \sim \pm 2^k \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\psi) \sin \nu x \sin^k(\nu h/2).$$

Отсюда при всех h и $n = 1, 2, \ldots$ получаем $(\psi \in L_{2\pi})$

$$\pi^{-1} \left| \int_0^{2\pi} \Delta_h^k \psi(x - kh/2) \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\sin \nu x}{\nu} dx \right| = 2^k \left| \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{-1} a_\nu(\psi) \sin^k(\nu h/2) \right|.$$

Остается учесть (см. также [20], с. 42—43), что a) $\sin z \geqslant 2z/\pi$ $(0 \leqslant z \leqslant \pi/2)$, b) $\sup\limits_n \sup\limits_x \left| \sum\limits_{j=1}^{n+1} j^{-1} \sin jx \right| < +\infty$ [3]. Лемма 4 доказана.

2. Имея $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0 < \varphi_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty)$, рассмотрим для $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ функцию

$$f_1(x) = f_1(x, \varphi) = \varphi_1/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \quad a_\nu = \sum_{j=\nu}^{\infty} \Delta\varphi_j (1 - \nu/(j+1)). \qquad (15)$$

Коэффициенты a_ν обладают такими свойствами:

$$0 \leqslant a_\nu \to 0, \quad \Delta a_\nu = \sum_{j=\nu}^{\infty} \Delta\varphi_j/(j+1) \geqslant 0, \quad (\nu+1)\Delta^2 a_\nu = \Delta\varphi_\nu \geqslant 0; \qquad (16)$$

$$a_\nu + \nu \Delta a_\nu = \varphi_\nu (\nu = 1, 2, \ldots). \qquad (17)$$

Свойства функций $f_1(x)$ и $\tilde{f}_1(x)$:

a) $f_1 \in L_{2\pi}$ ввиду (16) (см., например, [3], с. 100);

b) $\tilde{f}_1 \in L_{2\pi} \Longleftrightarrow \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi_\nu < +\infty$, ибо $\Sigma \nu^{-1} a_\nu < +\infty \Longleftrightarrow \tilde{f}_1 \in L_{2\pi}$ ([3], с. 652); $\Sigma \nu^{-1} a_\nu < +\infty \Longleftrightarrow \Sigma \nu^{-1} \varphi_\nu < +\infty$.

c) $E_n(f_1) \leqslant \varphi_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ввиду (17) и оценки (8).

d) $E_n(\tilde{f}_1) \geqslant C \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi_\nu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ \tilde{f}_1 \in L_{2\pi})$.

Действительно, по неравенству (9) из (17) имеем

$$E_n(\tilde{f}_1) \geqslant C \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}(\varphi_\nu - \nu\Delta a_\nu) = C \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu - Ca_{n+1} \; (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Учитывая теперь условие (10), получаем d).

e) $E_n(\psi) \geqslant (1/2)\varphi_{2n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, где $\psi = f_1, \tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_1 \in L_{2\pi}$, так как из (10) и (15)

$$E_n(\psi) \geqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \Delta\varphi_j(1-(n+1)/(j+1)) \geqslant (1/2) \sum_{j=2n+1}^{\infty} \Delta\varphi_j \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

e′) $\omega_l(\psi, n^{-1}) \geqslant C_l\varphi_n$ $(l, n=1, 2, \ldots)$, где $\psi = f_1, \tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_1 \in L_{2\pi}$. Это есть следствие из e), (2) и почти убывания $\omega_l(f, \delta)/\delta^l$.

f) $\omega_k(f_1, n^{-1}) = O(\varphi_n)$, если $n^k\varphi_n \uparrow$ при $n \uparrow$ и k четное. Это следует из леммы 3, так как (см. (17))

$$\sup_{|h| \leqslant n^{-1}} \left\| \Delta_h^k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu \{K_\nu^f(x) - K_n^f(x)\} \right\| \leqslant 2^{k+1}\varphi_{n+1},$$

ибо $\|K_\nu^f\| \equiv 1$, а $\|\Delta_h^k F\| \leqslant 2^k \|F\|$.

g) $\omega_k(\tilde{f}_1, n^{-1}) \geqslant C_k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu$ $(k, n=1, 2, \ldots;\ \tilde{f}_1 \in L_{2\pi})$ (см. d), (2)).

h) $\omega_k(\tilde{f}_1, n^{-1}) \leqslant C_k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu$ $(n=1, 2, \ldots;\ \tilde{f}_1 \in L_{2\pi};\ k$ нечетное; $n^k\varphi_n \uparrow$ при $n \uparrow)$.

Доказательство h) опускается (см. доказательство леммы 3 и теоремы 6 из [20]).

i) $\omega_k(\tilde{f}_1, n^{-1}) \geqslant C_k \left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1}\varphi_\nu \right\}$ $(n=1, 2, \ldots;\ k$ четное; $\tilde{f}_1 \in L_{2\pi})$.

Ввиду g) достаточно доказать еще, что

$$\omega_k(\psi, n^{-1}) \geqslant C_k n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi_\nu \quad (n=1, 2, \ldots), \quad \psi = \begin{cases} \tilde{f}_1, & k \text{ четное;} \\ f_1, & k \text{ нечетное.} \end{cases} \tag{18}$$

При помощи (14) получаем сначала неравенство

$$\omega_k(\psi, n^{-1}) \geqslant C_k n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \Delta\varphi_\nu.$$

Привлекая затем e′), заканчиваем доказательство (18).

3. Наряду с $f_1(x, \varphi)$, имея $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 < \varphi_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty)$, рассмотрим функцию

$$f_2(x) = f_2(x, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu \tau_{\nu+1}(x), \quad \tau_{\nu+1}(x) = \sum_{j=1}^{\nu+1} \alpha_j^{(\nu)} \sin jx,$$

$$\alpha_j^{(\nu)} = \{j/(\nu+1), \quad 1 \leqslant j \leqslant (\nu+1)/2;\ 1 - j/(\nu+1), \quad (\nu+1)/2 \leqslant j \leqslant \nu+1\}. \tag{19}$$

Свойства функций $f_2(x)$, $\tilde{f}_2(x)$:

a) $f_2, \tilde{f}_2 \in L_{2\pi}$; $E_n(f_2)$, $E_n(\tilde{f}_2) \leqslant C\varphi_{n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, вследствие равномерных по ν оценок

$$\|\tau_{\nu+1}(x)\|, \quad \|\tilde{\tau}_{\nu+1}(x)\| = O(1),$$

которые следуют, например, из того, что при $(\nu+1)/2 = m$ (m натуральное) $\tau_{\nu+1}(x)$ и $\tilde{\tau}_{\nu+1}(x)$ равны ядру Фейера $K_{m-1}(x)$ ([3], с. 138 $K_m(x)\| \equiv 1$), умноженному соответственно на $\cos mx$ и $\sin mx$ (см также [3], с. 896).

b) $E_n(f_2) \geqslant C\varphi_{2n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; b′) $\omega_l(f_2, n^{-1}) \geqslant C_l\varphi_n$ $(n, l = 1, 2, \ldots)$. Действительно, для коэффициентов Фурье f_2 (см. (19)) имеем

$$b_j = \sum_{j \leqslant \nu < 2j-1} \Delta\varphi_\nu (1 - j/(\nu+1)) + j \sum_{\nu=2j-1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu/(\nu+1) \geqslant j \sum_{\nu=2j-1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu/(\nu+1).$$

Теперь b) ясно (см. (9), (10)) из следующих неравенств:

$$E_n(f_2) \geqslant (n+1) \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu/(\nu+1),$$

$$E_n(f_2) \geqslant C \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=2j-1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu/(\nu+1) = C \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \Delta\varphi_\nu/(\nu+1) \sum_{n+1 \leqslant j \leqslant (\nu+1)/2} 1 \geqslant$$

$$\geqslant C \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \{(\nu+1)/2 - (n+1)\} \Delta\varphi_\nu/(\nu+1).$$

Свойство b′) доказывается так же, как e′) для f_1.

c) $\omega_k(\psi, n^{-1}) \geqslant C_k n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \Delta\varphi_\nu$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\psi = \{f_2$, k четное; $\tilde{f}_2$, k нечетное$\}$.

Эта оценка выводится непосредственно из (14).

d) $\omega_k(\psi, n^{-1}) \leqslant C_k\varphi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, где $n^k\varphi_n \uparrow$ при $n \uparrow$, а $\psi = f_2$ (k нечетное) и $\psi = \tilde{f}_2$ (k четное).

Подробности доказательства d) опускаются (см. доказательство леммы 3 и f) для f_1).

§ 3. Приложения результатов § 2 в теории приближений

1. Установим ряд результатов типа следующей теоремы, которую сформулируем применительно к $L_{2\pi}$.

Теорема С. Н. Бернштейна (см., например, [17], с. 51). *Для всякой последовательности* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющей условиям* $\varphi_n \geqslant 0$ $(n=0, 1, \ldots)$ *и* $\varphi_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$, *существует функция* $f_\varphi \in L_{2\pi}$ *такая, что* $E_n(f_\varphi) = \varphi_n$ *при всяком* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 13. *Для* $\forall \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 < \varphi_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty)$ $\exists f_0 = f_0(x, \varphi)$ *такая, что* 1) $E_n(f_0) \leqslant C\varphi_{n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; 2) *при* $\forall k$ $(k=1, 2, \ldots)$:

$\omega_k(f_0, n^{-1}) \geqslant C_k n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi_\nu$ $(n=1, 2, \ldots)$; 3) $\tilde{f}_0 \in L_{2\pi} \Longleftrightarrow \Sigma \nu^{-1} \varphi_\nu < \wedge +\infty$; 4) *при* $\tilde{f}_0 \in L_{2\pi}$

$$\omega_k(\tilde{f}_0, n^{-1}) \geqslant C_k \left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi_\nu \right\} \quad (n, k=1, 2, \ldots);$$

5) $E_n(f_0) \geqslant C\varphi_{2n+1}$; 6) $E_n(\tilde{f}_0) \geqslant C \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi_\nu$ $(n=0, 1, \ldots;\ \tilde{f}_0 \in L_{2\pi})$.

Доказательство. Рассмотрим $f_0(x, \varphi) = f_1(x) + f_2(x)$. Так как $E_n(f_0) \leqslant E_n(f_1) + E_n(f_2)$, то из c) для f_1 и a) для f_2 следует 1). Далее, a) для $\tilde{f}_2$ и b) для $\tilde{f}_1$ влечет 3). Свойства 5) и 6) ясны из свойств e) и d) функций $f_1, \tilde{f}_1$, так как $E_n(f) \geqslant E_n(\psi)$, $\psi = (1/2)\{f(x) \pm \pm f(-x)\}$ для $\forall f \in L_{2\pi}$.

Докажем 2). Заметим сначала, что для $\forall f \in L_{2\pi}$

$$\omega_k(f, n^{-1}) \geqslant \omega_k(\psi, n^{-1}) \quad (n, k=1, 2, \ldots),\ \psi = (1/2)\{f(x) \pm f(-x)\}. \quad (20)$$

Теперь при k четном рассмотрим нечетную часть f_0, т. е. $f_2(x)$; тогда из c), b′) для f_2, в силу (20), $\Longrightarrow$ 2) теоремы 13. При k нечетном 2) ясно из рассмотрения четной части f_0, т. е. $f_1(x)$ (см. неравенство (18)). Свойство 2) доказано.

Докажем 4). Здесь при k четном достаточно рассмотреть $f_1(x)$ (см. (20) и i) для $\tilde{f}_1(x)$). Пусть k нечетное, тогда 4) легко выводится из g), а также e′) и c) для $\tilde{f}_2$ при помощи (20). Теорема 13 доказана.

Следствие 1. *Для* $\forall k\ (k=1, 2, \ldots)$ *и* $\forall \varphi \in \Phi$ *имеем*: 1) $\exists f_\varphi \in E_\varphi$, *причем* $f_\varphi \notin H_k^\varphi$, *если нарушено условие* $\varphi \in B_k (\varphi \notin B_k)$; 2) $\exists f_\varphi \in \mathscr{E}^\varphi$ *причем* $f_\varphi \notin \mathscr{H}_k^\varphi$ *при* $\varphi \notin B_k$.

В [6] эти утверждения приводятся в эквивалентной форме и применительно к $C_{2\pi}$.

Следствие 2. *Для* $\forall k\ (k=1, 2, \ldots)$ *и* $\forall \varphi \in \Phi$ *имеем*: 1) $\exists f_\varphi \in E^\varphi$, *причем* $f_\varphi \notin \tilde{\mathscr{H}}_k^\varphi$, *если нарушается хотя бы одно из условий* $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k$; 2) $\exists f_\varphi \in \mathscr{E}^\varphi$, *причем* $f_\varphi \notin \tilde{\mathscr{H}}_k^\varphi$, *если нарушается хотя бы одно из условий* $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k$.

Доказательство следствий 1, 2. В утверждениях 1), а если $\varphi \in A_k$, то и в 2), следствий 1, 2 возьмем за f_φ функцию f_0 из теоремы 13 при $\varphi_n = \varphi(n^{-1})$, $n=1, 2, \ldots$ Тогда по 1) теоремы 13 имеем $E_n(f_\varphi) = O(\varphi(n^{-1}))$, а при $\varphi \in A_k$ из 5) получаем $E_n(f_\varphi) \sim \varphi(n^{-1})$. Но ввиду 2) этой теоремы, $f_\varphi \notin H_k^\varphi$ и $f_\varphi \in \mathscr{H}_k^\varphi$, если $\varphi \notin B_k$; а ввиду 3) и 4) $f_\varphi \notin \tilde{H}_k^\varphi$, если нарушается хотя бы одно из условий $\varphi \in B$, $\varphi \in B_k$.

Остается доказать утверждения 2) следствий 1, 2 для функций $\varphi \in \Phi$, не удовлетворяющих условию $\varphi \in A_k$. По указанной выше теореме С. Н. Бернштейна для $\{\varphi(n^{-1})\}_{n=1}^{\infty}$, $\exists f_\varphi$ с $E_n(f_\varphi) \equiv \varphi(n^{-1})$, т. е.

$f_\varphi \in \mathscr{E}^\varphi$; однако соотношение $\omega_k(\psi, \delta) \sim \varphi(\delta)$ $(\psi = f_\varphi, \tilde{f}_\varphi)$ противоречиво с $\varphi \notin A_k$, так как $\omega_k(f, \delta) \in A_k$ при $\forall f \in L_{2\pi}$

Следствие 3. *Для любой* $\varphi \in \Phi$ *имеем*: 1) $\exists f \in E^\varphi$ *такая, что* $f \notin \tilde{L}_{2\pi}$ *при* $\varphi \notin A$; 2) $\exists f_\varphi \in E^\varphi$ *такая, что* $f_\varphi \notin \tilde{E}^\varphi$ *при* $\varphi \notin B$; 3) $\exists f_\varphi \in \mathscr{E}^\varphi$ *такая, что* $f_\varphi \notin \tilde{\mathscr{E}}^\varphi$ *при* $\varphi \notin B$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) подтверждаются рассмотрением функции f_φ, равной f_0 при $\varphi_n \equiv \varphi(n^{-1})$ (см. свойства 1), (3) и 6) функции f_0 из теоремы 13).

Доказательство 3) опирается на только что доказанное утверждение 2), теорему С. Н. Бернштейна и способ рассуждений, изложенный в [2] (с. 509—511). Подробности опускаются.

Теорема 14. *При* $\forall k (k = 1, 2, \ldots)$ *и* $\forall \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty (0 < \varphi_n \downarrow 0, n^{k+1}\varphi_n \uparrow$ *при* $n \uparrow \infty)$ *существует* $f_{\varphi, k}$ *такая, что*: 1) $\omega_{k+r}(f_{\varphi, k}; n^{-1}) \sim \varphi_n$ $(r = 1, 2, \ldots)$; 2) $\omega_k(f_{\varphi, k}; n^{-1}) \geqslant C_k n^{-k} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi_\nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть при k нечетном $f_{\varphi, k} = f_1$; тогда оценка сверху в 1) теоремы 14 следует из f) для f_1 и неравенства (1), а оценка снизу это e′). Оценка 2) это (18). При k четном примем $f_{\varphi, k} = f_2$, учитывая b′), d) (вместе с (1)) и c) функции f_2. Теорема 14 доказана.

Следствие 4. *При* $\forall k (k = 1, 2, \ldots)$ *и* $\forall \varphi \in \Phi$ $(\varphi \in A_{k+1})$, $\exists f_{\varphi, k} \in \mathscr{H}^\varphi_{k+r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *такая, что* $f_{\varphi, k} \notin H^\varphi_k$, *если* $\varphi \notin B_k$.

Доказательство использует такой результат ([10], [2]): *при* $\forall l (l = 1, 2, \ldots)$ *для* $\forall \varphi \in \Phi$, $\exists \varphi_l(\delta) \in \Phi$ $(\varphi_l(\delta) = \delta^l \inf \varphi(t)/t^l$, $0 < t \leqslant \delta)$, *такая, что* $\delta^{-l}\varphi_l(\delta) \downarrow$ *при* $\delta \downarrow$; $\varphi \in A_l \Rightarrow \varphi_l(\delta) \sim \varphi(\delta)$. Полагая в теореме 14 $\varphi_n \equiv \varphi_l(n^{-1})$ при $l = k + 1$ и учитывая тот факт (доказываемый как и в $C_{2\pi}$ [8], [2]), что $\omega_l(f, \delta) \sim \varphi(\delta) \Leftrightarrow \omega_l(f, n^{-1}) \sim \varphi(n^{-1})$; $(\varphi \in \Phi,\ f \in L_{2\pi})$, убеждаемся в справедливости следствия 4.

Теорема 15. *При* $\forall k (k = 1; 2, 4, 6, \ldots)$ *и* $\forall \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty (0 < \varphi_n \downarrow 0$, $n^k\varphi_n \uparrow$ *при* $n \uparrow \infty)$ $\exists f_{\varphi, k}$ *такая, что*: 1) $\omega_k(f_{\varphi, k}; n^{-1}) = O(\varphi_n)$; 2) $\tilde{f}_{\varphi, k} \in L_{2\pi} \Leftrightarrow \Sigma \nu^{-1} \varphi_\nu < +\infty$; 3) *если* $\tilde{f}_{\varphi, k} \in L_{2\pi}$, *то* $E_n(\tilde{f}_{\varphi, k}) \geqslant C_k \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} \varphi_\nu + \beta_n^{(k)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *где* $\beta_n^{(k)} \equiv 0$, *при* k *четном*, $\beta_n^{(1)} = O(\varphi_n)$.

Доказательство. При k четном возьмем $f_{\varphi, k} = f_1$. Остается сослаться на свойства f) и b), d) для f_1 и $\tilde{f}_1$.

Пусть $k = 1$. В предположениях относительно $\{\varphi_n\}$, используя один результат С. Б. Стечкина (см. в [12] лемму 1, а также доказательство леммы 2), имеем: $\exists \{G_n\}_{n=1}^\infty (0 \leqslant G_n \downarrow 0)$ такая, что: a) $G_n = A_n - A_{n-1}$ $(A_0 = 0,\ A_n \uparrow)$; b) $n\varphi_n \leqslant A_n \leqslant 2n\varphi_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теперь за $f_{\varphi, 1}$ возьмем функцию $f_1 = f_1(x, G)$ из (15), где вместо φ_ν положено G_ν. Тогда 2) и 3) теоремы 15 $(k = 1)$ ясны из свойств b), d) для $\tilde{f}_1$ и свойств a), b) для G_n. Учитывая далее свойство c) для f_1 и обращенное неравенство Джексона (см., например, [17], с. 344) (вместе с a) и b) для G_n), получаем 1) теоремы 15.

Следствие 5. *Для* $\forall\varphi\in\Phi$ $(\varphi\in A_k)$, *где* $k=1$, k *четное*, $\exists f_{\varphi,k}\in H_k^{\varphi}$ *такая, что*: 1) $f_{\varphi,k}\notin\tilde{L}_{2\pi}$ *при* $\varphi\notin A$; 2) $f_{\varphi,k}\notin\tilde{E}^{\varphi}$ (*и, значит*, $f_{\varphi,k}\notin\tilde{H}_l^{\varphi}$, $l=1, 2, \ldots$), *если* $\varphi\notin B$.

Доказательство. Достаточно в теореме 15 положить $\varphi_n\equiv\varphi_k(n^{-1})$ (см. доказательство следствия 4).

Лемма 5. *Для* $\forall k\,(k=1, 2, \ldots)$ *и* $\forall\varphi\in\Phi$ *имеем*: 1) *если* k *четное, а* $\varphi\in A_k$, *то* $\exists f_{k,\varphi}\in\mathscr{H}_{k+r}^{\varphi}\,(r=0, 1, \ldots)$ *такая, что* $f_{\varphi,k}\notin\tilde{H}_k^{\varphi}$, *если нарушается хотя бы одно из условий* $\varphi\in B$, $\varphi\in B_k$; 2) *если* k *нечетное, а* $\varphi\in A_k$, *то* $\exists f_{\varphi,k}\in\mathscr{H}_{k+r}^{\varphi}$ $(r=0, 1, \ldots)$ *такая, что* $f_{\varphi,k}\notin\tilde{H}_k^{\varphi}$, *если* $\varphi\notin B_k$, *независимо от того, будет или нет* $\varphi\in B$; 3) *если* k *нечетное, а* $\varphi\in B_k$, *то* $\exists f_{\varphi,k}\in\mathscr{H}_{k+r}^{\varphi}$ $(r=0, 1, \ldots)$ *такая, что* $f_{\varphi,k}\notin\tilde{L}_{2\pi}$ *при* $\varphi\notin A$; $f_{\varphi,k}\notin\tilde{E}^{\varphi}$ (*и, значит*, $f_{\varphi,k}\notin\tilde{H}_l^{\varphi}$, $l=1, 2, \ldots$), *если* $\varphi\notin B$.

Из предыдущего доказательство леммы 5 очевидно.

2. В заключение отметим, что здесь приведены лишь следствия, относящиеся к доказательству теорем § 1. Легко понять, что теоремы § 3 содержат в себе фактически также решения задач о точности ряда неравенств теории приближений в духе исследований С. Б. Стечкина [11], [12]. Кроме того, теоремы § 3 применимы при выяснении окончательных условий справедливости некоторых теорем „об эквивалентности" с r-ми производными (так же, как это делается в [2], но в $L_{2\pi}$).

г. Свердловск

Поступило
11 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. ИАН СССР. Сер. матем., т. 19, № 5, 1955, с. 285—302.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. о-ва, вып. 5, 1956, с. 483—522.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.
4. Бари Н. К. О локальном наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами. Учен. зап. МГУ, вып. 181, Математика, т. VIII, 1956, с. 107—138.
5. Бернштейн С. Н. Конструктивная теория функций (1905—1930). Собр. соч. Т. 1. М., Изд. АН СССР, 1952.
6. Лозинский С. М. Обращение теорем Джексона. ДАН СССР, т. 83, № 5, 1952, с. 645—647.
7. Privaloff I. Sur les fonctions conjuguées. Bull. Soc. Math. France, v. 44, 1916, p. 100—103.
8. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. ИАН СССР. Сер. матем., т. 15, № 3, 1951, с. 219—242.
9. Стечкин С. Б. О наилучших приближениях непрерывных функций тригонометрическими полиномами. ДАН СССР, т. 83, № 5, 1952, с. 651—654.
10. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение). ИАН СССР. Сер. матем., т. 19, № 4, 1955, с. 221—246.
11. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами. ИАН СССР. Сер. матем., т. 20, № 2, 1956, с. 197—206.
12. Стечкин С. Б. О приближении периодических функций суммами Фейера. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 62, 1961, с. 48—60.
13. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebener Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Diss., Göttingen, 1911.

14. Vallée Poussin Ch. de la. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable rèelle. Paris, 1919.

15. Zygmund A. O module ciaglosci sumy szeregy sprzeżonego z szeregiem Fouriera. Prace Mat.-fiz., t. 33, 1924, s. 125—132.

16. Zygmund A. Smooth functions. Duke Math. J., v. 12, 1945, p. 47—76.

17. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.

18. Quade E. Trigonometric approximation in the mean. Duke Math. J., v. 3, 1937, p. 529—543.

19. Петровская М. Б. О рядах по системе Хаара и функциях класса $H^1_{\omega(\delta)}$. Сиб. матем. журн., т. IX, № 4, 1968, с. 863—879.

20. Гейт В. Э. О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов Фурье. Изв. вузов, Матем., 1969, № 7, с. 39—47.

21. Гейт В. Э. Структурные и конструктивные свойства функции и ее сопряженной. Автореф. кандид. диссерт., Свердловск, 1970.