Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Yu. P. Bibilo, R. R. Gontsov, Some properties of Malgrange isomonodromic deformations of linear 2×2 systems,
Trudy Mat. Inst. Steklova, 2012, Volume 277, 22–32

https://www.mathnet.ru/eng/tm3384

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.89
December 13, 2025, 20:03:27

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2012, т. 277, с. 22–32

УДК 517.927

Некоторые свойства изомонодромных деформаций Мальгранжа линейных (2×2)-систем[1]

©2012 г. Ю. П. Бибило[2], Р. Р. Гонцов[3]

Поступило в январе 2012 г.

Изучаются подвижные особенности изомонодромной деформации Мальгранжа системы двух линейных дифференциальных уравнений с двумя иррегулярными особыми точками ранга Пуанкаре 1 и произвольным числом фуксовых особенностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать *линейную мероморфную* (2×2)-*систему* на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. систему из двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с особыми точками $a_1^0, \dots, a_n^0 \in \mathbb{C}$ и, возможно, ∞. При помощи дробно-линейного преобразования всегда можно добиться, чтобы особые точки располагались только в конечной части комплексной плоскости. Другими словами, систему всегда можно привести к системе вида

$$\frac{dy}{dz} = A(z)\,y, \qquad A(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i+1} \frac{A_{ij}^0}{(z-a_i^0)^j}, \tag{1}$$

где $y(z) \in \mathbb{C}^2$, A_{ij}^0 суть (2×2)-матрицы и справедливо равенство $\sum_{i=1}^n A_{i1}^0 = 0$, означающее, что ∞ не входит в число особенностей.

Неотрицательные целые числа $r_1, \dots, r_n$ называются *рангами Пуанкаре* особых точек $a_1^0, \dots, a_n^0$ соответственно. Будем считать, что ранги Пуанкаре $r_1, \dots, r_m$ положительны и $r_{m+1} = \dots = r_n = 0$ (т.е. особые точки $a_{m+1}^0, \dots, a_n^0$ *фуксовы*) для некоторого $0 \le m \le n$.

В работе рассматривается *нерезонансный* случай (случай общего положения). Это значит, что старший коэффициент A_{i,r_i+1}^0, соответствующий каждой нефуксовой особой точке a_i^0, $i = 1, \dots, m$, имеет два различных собственных значения (таким образом, особые точки $a_1^0, \dots, a_m^0$ иррегулярные).

Систему (1) можно представлять как мероморфную связность ∇^0 (более точно, как уравнение, определяющее горизонтальные относительно данной связности сечения) в голоморфно тривиальном векторном расслоении E^0 ранга 2 над $\overline{\mathbb{C}}$. Как известно (см. [9, § 21]), в окрестности каждой (нерезонансной) иррегулярной особой точки a_i^0 локальная форма $\omega^0 = A(z)\,dz$ связности ∇^0 формально эквивалентна 1-форме

$$\omega_{\Lambda_i^0} = \sum_{j=1}^{r_i+1} \frac{\Lambda_{ij}^0}{(z-a_i^0)^j}\,dz,$$

где $\Lambda_{i1}^0, \dots, \Lambda_{i,r_i+1}^0$ — диагональные матрицы и старший коэффициент Λ_{i,r_i+1}^0 сопряжен к A_{i,r_i+1}^0. Это значит, что найдется обратимый формальный матричный ряд Тейлора $\widehat{F}(z)$ по степеням

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00339) и грантов Президента РФ (проекты НШ-5998.2012.1, МК-4270.2011.1).

[2]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

[3]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

$z - a_i^0$ такой, что преобразование $\widetilde{y} = \widehat{F}^{-1}(z)y$ переводит 1-форму ω^0 в $\omega_{\Lambda_i^0}$:

$$\omega_{\Lambda_i^0} = \widehat{F}^{-1}\omega^0\widehat{F} - \widehat{F}^{-1}(d\widehat{F}).$$

Следует также отметить, что формально эквивалентные системы в окрестности $O_{a_i^0}$ иррегулярной особой точки a_i^0 не обязательно голоморфно или мероморфно эквивалентны. Система (1) имеет в $O_{a_i^0}$ формальную фундаментальную матрицу вида

$$\widehat{Y}(z) = \widehat{F}(z)(z - a_i^0)^{\Lambda_{i1}^0} e^{Q(z)}, \qquad Q(z) = -\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\Lambda_{i,j+1}^0}{j}(z - a_i^0)^{-j}. \tag{2}$$

Окрестность $O_{a_i^0}$ можно покрыть множеством достаточно малых секторов $S_1, \dots, S_N$ с вершиной в точке a_i^0 так, что в каждом секторе S_k найдется единственная фундаментальная матрица $Y_k(z) = F_k(z)(z - a_i^0)^{\Lambda_{i1}^0} e^{Q(z)}$ системы такая, что формальный ряд $\widehat{F}(z)$ является асимптотическим разложением матричной функции $F_k(z)$ в секторе S_k (см. [9, § 21]). В каждом пересечении $S_k \cap S_{k+1}$ фундаментальные матрицы $Y_k(z)$, $Y_{k+1}(z)$ связаны невырожденной постоянной матрицей C_k: $Y_{k+1}(z) = Y_k(z)C_k$, которая называется *матрицей Стокса*. Если особенность a_i^0 нерезонансна, то две формально эквивалентные системы голоморфно эквивалентны в $O_{a_i^0}$ тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же набор матриц Стокса (см. [9, § 21]).

Далее изучаются деформации системы (1) (деформации пары (E^0, ∇^0)), допускающие изменение класса

$$\omega_{\Lambda_i} = \sum_{j=2}^{r_i+1} \frac{\Lambda_{ij}}{(z - a_i)^j}\, dz + \frac{\Lambda_{i1}^0}{z - a_i}\, dz, \qquad i = 1, \dots, m,$$

локальной формальной эквивалентности такое, что диагональные матрицы $\Lambda_{i2}, \dots, \Lambda_{i,r_i+1}$ принадлежат некоторой окрестности исходных значений $\Lambda_{i2}^0, \dots, \Lambda_{i,r_i+1}^0$, а матрица Λ_{i1}^0 остается неизменной. Таким образом, для набора $\Lambda_i = \{\Lambda_{i2}, \dots, \Lambda_{i,r_i+1}\}$ из r_i диагональных матриц обозначим через ∇_{Λ_i} мероморфную связность (в голоморфно тривиальном векторном расслоении ранга 2 над O_{a_i}), определяемую соответствующей 1-формой ω_{Λ_i}. Для того чтобы описать данные деформации подробнее, остановимся сначала на пространстве параметров деформации.

Для натурального числа k обозначим через Z^k подмножество пространства $\mathbb{C}^k$, состоящее из точек с попарно различными координатами. Тогда Z^n можно рассматривать как множество положений полюсов системы, а множество

$$\mathcal{C}_i = \underbrace{\mathbb{C}^2 \times \ldots \times \mathbb{C}^2}_{r_i - 1} \times Z^2, \qquad i = 1, \dots, m,$$

будет служить пространством параметров, определяющих класс локальной формальной эквивалентности 1-форм в окрестности особой точки a_i (всякий класс определяется $r_i - 1$ диагональными матрицами $\Lambda_{i2}, \dots, \Lambda_{i,r_i}$ и диагональной матрицей Λ_{i,r_i+1}, собственные значения которой различны). Определим пространство $\mathcal{D}$ параметров деформации как универсальное накрытие декартова произведения $Z^n \times \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_m$, т.е.

$$\mathcal{D} = \widetilde{Z}^n \times \widetilde{\mathcal{C}}_1 \times \ldots \times \widetilde{\mathcal{C}}_m.$$

На множестве $\mathcal{D}$ определены стандартные проекции

$$a = (a_1, \dots, a_n)\colon \mathcal{D} \to Z^n, \qquad \Lambda_i = (\Lambda_{i2}, \dots, \Lambda_{i,r_i+1})\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Для каждого $t \in \mathcal{D}$ обозначим i-ю координату образа точки t под действием первой проекции через $a_i(t)$, а образ точки t под действием второй проекции через $\Lambda_i(t)$. Обозначим также через t^0 базисную точку пространства $\mathcal{D}$, соответствующую системе (1), т.е. $a(t^0) = (a_1^0, \dots, a_n^0)$, $\Lambda_i(t^0) = (\Lambda_{i2}^0, \dots, \Lambda_{i,r_i+1}^0)$. Кроме того, определим сингулярные гиперповерхности

$$X_i = \bigl\{(z,t) \in \overline{\mathbb{C}} \times \mathcal{D} \mid z = a_i(t)\bigr\} \subset \overline{\mathbb{C}} \times \mathcal{D}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Теперь для $i = 1, \dots, m$ рассмотрим расслоение $\mathcal{M}_i \to \mathcal{C}_i$ такое, что слоем над каждой точкой $\Lambda_i \in \mathcal{C}_i$ является пространство параметров, определяющих класс локальной *голоморфной* эквивалентности связностей, которые все формально эквивалентны связности ∇_{Λ_i}. Каждая точка слоя (каждый класс локальной голоморфной эквивалентности связностей) определяется соответствующим набором матриц Стокса. Пусть $\sigma_i^0 \in \mathcal{M}_i$ обозначает класс голоморфной эквивалентности связности $\nabla^0|_{O_{a_i^0}} \sim \nabla_{\Lambda_i^0}$, и пусть σ_i — горизонтальное сечение (оно единственно) расслоения $\mathcal{M}_i \to \mathcal{C}_i$ такое, что $\sigma_i(\Lambda_i^0) = \sigma_i^0$.

Согласно Б. Мальгранжу [12, Theorem 3.1] (см. также [14, Theorem 2.9]) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует единственная*[4] *изомонодромная деформация* (E, ∇) *пары* (E^0, ∇^0), *т.е. голоморфное векторное расслоение* E *ранга* 2 *над* $\overline{\mathbb{C}} \times \mathcal{D}$ *и интегрируемая мероморфная связность* ∇ *с простыми особенностями ранга* r_i *вдоль* X_i, $i = 1, \dots, n$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

- *ограничение пары* (E, ∇) *на* $\overline{\mathbb{C}} \times \{t^0\}$ *изоморфно паре* (E^0, ∇^0);
- *для любого* $t \in \mathcal{D}$ *ограничение связности* ∇ *на* $\overline{\mathbb{C}} \times \{t\}$ *формально эквивалентно локальной связности* $\nabla_{\Lambda_i(t)}$ *около* $z = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, *и принадлежит классу* $\sigma_i(\Lambda_i(t)) \in \mathcal{M}_i$ *локальной голоморфной эквивалентности.*

Требование того, что связность ∇ имеет простые особенности ранга r_i вдоль X_i, означает, что около X_i локальная 1-форма Ω связности ∇ имеет вид

$$\Omega = \frac{A_i(z,t)}{(z - a_i(t))^{r_i+1}}\, d(z - a_i(t)) + \sum_k \frac{\widetilde{A}_{ik}(z,t)}{(z - a_i(t))^{r_i}}\, dt_k,$$

где A_i, $\widetilde{A}_{ik}$ — голоморфные матрицы и собственные значения матрицы $A_i(a_i(t), t)$ различны $(i = 1, \dots, m)$.

Согласно теореме Мальгранжа–Хельминка–Палмера (см. [14, § 3] или [12, § 3]) множество

$$\Theta = \bigl\{t \in \mathcal{D} \bigm| E|_{\overline{\mathbb{C}} \times \{t\}} \text{ нетривиально}\bigr\}$$

является либо пустым множеством, либо аналитическим подмножеством $\Theta \subset \mathcal{D}$ коразмерности 1. Если множество Θ непусто, то найдется функция τ, голоморфная на всем пространстве $\mathcal{D}$, множество нулей которой совпадает с Θ. Множество Θ называют Θ-*дивизором Мальгранжа*, а функцию τ называют τ-*функцией* изомонодромной деформации.

Таким образом, изомонодромная деформация Мальгранжа пары (E^0, ∇^0) определяет изомонодромную деформацию

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i+1} \frac{A_{ij}(t)}{(z - a_i(t))^j}\right) y, \qquad A_{ij}(t^0) = A_{ij}^0, \tag{3}$$

системы (1) при $t \in D(t^0)$, где $D(t^0)$ — окрестность точки t^0 в пространстве параметров $\mathcal{D}$. Матричные функции $A_{ij}(t)$, голоморфные в $D(t^0)$, могут быть мероморфно продолжены на все пространство $\mathcal{D}$, и множество их полюсов совпадает с Θ.

[4] При некотором дополнительном предположении, упоминаемом в дальнейшем.

В случае фуксовой системы ($m = 0$)

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^0}{z - a_i^0}\right) y \tag{4}$$

наиболее изученными являются изомонодромные деформации Шлезингера [16, 17]. Удовлетворяя начальным условиям $A_i(a^0) = A_i^0$, $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$, матрицы-вычеты $A_i(a)$ изменяются в соответствии с *уравнением Шлезингера*

$$dA_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[A_i(a), A_j(a)]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j), \qquad i = 1, \dots, n,$$

и могут быть продолжены из окрестности $D(a^0)$ начальной точки a^0 как мероморфные матричные функции на все пространство деформации $\widetilde{Z}^n$.

А.А. Болибрухом [2; 4, теорема 16.2] был получен следующий результат о порядке полюсов матриц $A_i(a)$.

Теорема 2. *Пусть представление монодромии* (2×2)*-системы* (4) *неприводимо и точка* $a^* \in \Theta$ *такова, что ограничение* $E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{a^*\}}$ *имеет вид*

$$E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{a^*\}} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1).$$

Тогда в окрестности $D(a^*)$ *точки* a^* Θ*-дивизор является аналитическим подмногообразием и матричные функции* $A_i(a)$ *имеют полюсы не выше второго порядка вдоль* $D(a^*) \cap \Theta$.

Другими словами, утверждается, что произведения $\tau^2(a)A_i(a)$ являются голоморфными матричными функциями в $D(a^*)$. Доказательство теоремы 2 (сформулированной в более общем случае) приведено также в [7].

Продолжая идеи А.А. Болибруха на случай систем с иррегулярными особенностями, мы предлагаем локальное описание Θ-дивизора изомонодромной деформации Мальгранжа и обобщение теоремы 2, когда исходная система имеет не более двух иррегулярных особенностей и их ранги Пуанкаре равны 1 (теорема 3).

2. ГОЛОМОРФНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ПРОБЛЕМА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Если $t^* \in \Theta$, то ограничение $E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}}$ голоморфного векторного расслоения E из теоремы 1 не является голоморфно тривиальным. Это ограничение принадлежит семейству $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений над сферой Римана, снабженных мероморфными связностями. Данное семейство появляется при исследовании соответствующей проблемы Римана–Гильберта — вопроса о существовании глобальной мероморфной линейной системы с заданными особыми точками $a_1^* = a_1(t^*), \dots, a_n^* = a_n(t^*)$ рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ соответственно, которая

1) имеет ту же монодромию, что и исходная система;
2) мероморфно эквивалентна локальной системе

$$dy = \omega_i^* y, \tag{5}$$

определяемой классом локальной голоморфной эквивалентности $\sigma_i(\Lambda_i(t^*))$ около каждой иррегулярной особой точки a_i^*.

В рассматриваемой ситуации проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (в двумерном случае для ее положительной разрешимости достаточно, чтобы одна из иррегулярных особенностей была нерезонансна, см. [5]). Это означает, что в семействе $\mathcal{F}$ найдется

голоморфно тривиальное векторное расслоение. Здесь будет естественным напомнить вкратце построение семейства $\mathcal{F}$ (подробности см. в [5]).

По представлению монодромии (порожденному матрицами монодромии $G_1,\dots,G_n$) исходной системы (1) построим над проколотой сферой Римана $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a_1^*,\dots,a_n^*\}$ голоморфное векторное расслоение $\widetilde{F}$ ранга 2 с голоморфной связностью $\widetilde{\nabla}$, имеющей данную монодромию. Это расслоение определяется при помощи набора $\{U_\alpha\}$ достаточно малых дисков, покрывающих $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a_1^*,\dots,a_n^*\}$, и постоянного коцикла $\{g_{\alpha\beta}\}$, соответствующего данному покрытию. Связность $\widetilde{\nabla}$ определяется набором $\{\omega_\alpha\}$ матричных дифференциальных 1-форм $\omega_\alpha\equiv 0$. Таким образом, в пересечениях $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ выполнены условия склейки

$$\omega_\alpha=(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}+g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Далее, продолжим пару $(\widetilde{F},\widetilde{\nabla})$ на всю сферу Римана. В окрестностях $O_{a_i^*}$ иррегулярных особых точек a_i^*, $i=1,\dots,m$, продолжение связности $\widetilde{\nabla}$ задается соответствующими локальными матричными дифференциальными 1-формами ω_i^* коэффициентов систем (5). В окрестностях $O_{a_i^*}$ фуксовых особых точек a_i^*, $i=m+1,\dots,n$, продолжение связности $\widetilde{\nabla}$ задается матричными дифференциальными 1-формами $E_i\,dz/(z-a_i^*)$. Здесь $E_i=(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\ln G_i$, при этом выбирается такая ветвь логарифма от матрицы монодромии G_i, что собственные значения ρ_i^k матрицы E_i удовлетворяют условию

$$0\le\operatorname{Re}\rho_i^k<1. \tag{6}$$

Получается так называемое *каноническое* расширение $(\widetilde{F}^0,\widetilde{\nabla}^0)$ пары $(\widetilde{F},\widetilde{\nabla})$ в смысле Мальгранжа [13] (или в смысле Делиня [8] в фуксовом случае).

Наконец, рассмотрим формальную фундаментальную матрицу (см. (2))

$$\widehat{Y}_i(z)=\widehat{F}_i(z)(z-a_i^*)^{\Lambda_{i1}^0}e^{Q_i(z)},\qquad Q_i(z)=-\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\Lambda_{i,j+1}^*}{j}(z-a_i^*)^{-j},\qquad \Lambda_{i,j+1}^*=\Lambda_{i,j+1}(t^*),$$

каждой локальной иррегулярной системы (5), $i=1,\dots,m$, и запишем ее в виде

$$\widehat{Y}_i(z)=\widehat{F}_i(z)(z-a_i^*)^{D_i^0}(z-a_i^*)^{\widehat{E}_i}e^{Q_i(z)},\qquad D_i^0=[\operatorname{Re}\Lambda_{i1}^0]. \tag{7}$$

Диагональные элементы целочисленной матрицы D_i^0 называются *формальными нормированиями* системы. По построению диагональные элементы ρ_i^k матрицы $\widehat{E}_i$ удовлетворяют условию (6). Из аналога леммы Соважа (см. [15, лемма 11.2]) для формальных матричных рядов следует, что для любой диагональной целочисленной матрицы D_i найдется матрица $\Gamma_i'(z)$, мероморфно обратимая в $O_{a_i^*}$ и такая, что

$$\Gamma_i'(z)\widehat{F}_i(z)(z-a_i^*)^{D_i^0-D_i}=(z-a_i^*)^{\widetilde{D}_i}\widehat{H}_i(z), \tag{8}$$

где $\widetilde{D}_i$ — диагональная целочисленная матрица и $\widehat{H}_i(z)$ — обратимый формальный (матричный) ряд Тейлора по степеням $z-a_i^*$.

Теперь построим семейство $\mathcal{F}$ продолжений пары $(\widetilde{F},\widetilde{\nabla})$, заменяя 1-форму ω_i^* в построении пары $(\widetilde{F}^0,\widetilde{\nabla}^0)$ на 1-форму

$$\omega^{D_i}=(d\Gamma_i)\Gamma_i^{-1}+\Gamma_i\omega_i^*\Gamma_i^{-1},\qquad \Gamma_i(z)=(z-a_i^*)^{-\widetilde{D}_i}\Gamma_i'(z),\qquad i=1,\dots,m,$$

и 1-форму $E_i\,dz/(z-a_i^*)$ на 1-форму

$$\omega^{D_i}=(d\Gamma_i)\Gamma_i^{-1}+\Gamma_i\frac{E_i\,dz}{z-a_i^*}\Gamma_i^{-1},\qquad \Gamma_i(z)=(z-a_i^*)^{D_i}C_i,\qquad i=m+1,\dots,n,$$

где D_i — диагональная целочисленная матрица, диагональные элементы которой (для $i = m+1,\dots,n$) образуют невозрастающую последовательность, и C_i — невырожденная матрица, приводящая матрицу E_i к верхнетреугольному виду $E_i' = C_iE_i(C_i)^{-1}$. Из (7), (8) следует, что формальная фундаментальная матрица локальной иррегулярной системы $dy = \omega^{D_i}y$, $i = 1,\dots,m$, имеет вид

$$\widehat{Y}_i'(z) = \Gamma_i(z)\widehat{Y}_i(z) = \widehat{H}_i(z)(z-a_i^*)^{D_i}(z-a_i^*)^{\widehat{E}_i}e^{Q_i(z)}. \tag{9}$$

Ее особая точка $z = a_i^*$ снова имеет ранг Пуанкаре, равный r_i. В то же время локальная система $dy = \omega^{D_i}y$, $i = m+1,\dots,n$, фуксова:

$$\omega^{D_i} = \left(\frac{D_i}{z-a_i^*} + (z-a_i^*)^{D_i}\frac{E_i'}{z-a_i^*}(z-a_i^*)^{-D_i}\right)dz.$$

Будем называть матрицы $D_1,\dots,D_n,C_{m+1},\dots,C_n$, участвующие в приведенном выше построении, *допустимыми* матрицами. Таким образом, семейство $\mathcal{F}$ состоит из пар $(F^{D,C},\nabla^{D,C})$, полученных при помощи всевозможных наборов $(D,C) = \{D_1,\dots,D_n,C_{m+1},\dots,C_n\}$ допустимых матриц. Хотя матрицы $\Gamma_1'(z),\dots,\Gamma_m'(z)$ (см. (8)) также участвуют в построении пары $(F^{D,C},\nabla^{D,C})$, следует заметить, что в нашем (нерезонансном) случае расслоение $F^{D,C}$ не зависит от выбора этих матриц (при фиксированном наборе (D,C)).

Теперь ограничение $(E,\nabla)|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}}$ можно рассматривать как элемент семейства $\mathcal{F}$:

$$(E,\nabla)|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}} \cong \left(F^{D^0,C^0},\nabla^{D^0,C^0}\right), \qquad D^0 = \{D_1^0,\dots,D_n^0\}, \quad C^0 = \{C_{m+1}^0,\dots,C_n^0\},$$

где матрицы $D_1^0,\dots,D_m^0$ определены в (7), а наборы допустимых матриц $D_{m+1}^0,\dots,D_n^0$ и $C_{m+1}^0,\dots,C_n^0$ берутся из разложения Левеля [11] фундаментальной матрицы $Y(z)$ исходной системы (1) в соответствующих фуксовых особенностях $a_{m+1}^0,\dots,a_n^0$:

$$Y(z) = U_i(z)(z-a_i^0)^{D_i^0}C_i^0(z-a_i^0)^{E_i}, \qquad i = m+1,\dots,n,$$

где матрица $U_i(z)$ голоморфно обратима в точке a_i^0. Матрицы $D_{m+1}^0,\dots,D_n^0$ сохраняются при деформации (см. [3]). И обычно требуют, чтобы матрицы $C_{m+1}^0,\dots,C_n^0$ также сохранялись, тогда деформация Мальгранжа является единственной изомонодромной деформацией пары (E^0,∇^0) (см. теорему 1).

3. ТЕОРЕМА О Θ-ДИВИЗОРЕ

Рассмотрим линейную мероморфную (2×2)-систему с n особыми точками, среди которых $m \le 2$ иррегулярных и их ранги Пуанкаре равны 1, т.е. систему вида (1), где $r_{1,2} \le 1$, $r_3 = \ldots = r_n = 0$:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{A_{12}^0}{(z-a_1^0)^2} + \frac{A_{22}^0}{(z-a_2^0)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i1}^0}{z-a_i^0}\right)y. \tag{10}$$

Θ-дивизор и матрицы $A_{ij}(t)$ коэффициентов изомонодромной деформации Мальгранжа (3) такой системы обладают следующими свойствами.

Теорема 3. *Пусть представление монодромии* (2×2)*-системы* (10) *неприводимо и точка* $t^* \in \Theta$ *такова, что*

$$E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}} \cong \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(1).$$

Тогда в окрестности $D(t^*)$ *точки* t^* *Θ-дивизор является аналитическим подмногообразием и матричные функции* $A_{ij}(t)$ *имеют полюсы не выше второго порядка вдоль* $D(t^*)\cap\Theta$.

Прежде чем доказывать теорему 3, приведем алгоритм вычисления локальной τ-функции изомонодромной деформации Мальгранжа (E,∇) системы (10).

Рассмотрим точку $t^*\in\Theta$. Хотя соответствующая пара $(E,\nabla)|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}}\cong(F^{D^0,C^0},\nabla^{D^0,C^0})$ такова, что векторное расслоение

$$F^{D^0,C^0}\cong\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(1)$$

не является голоморфно тривиальным, можно построить вспомогательную систему

$$\frac{dy}{dz}=\left(\frac{B_{12}^0}{(z-a_1^*)^2}+\frac{B_{22}^0}{(z-a_2^*)^2}+\sum_{i=1}^n\frac{B_{i1}^0}{z-a_i^*}\right)y \tag{11}$$

с иррегулярными нерезонансными особыми точками $a_1^*=a_1(t^*)$, $a_2^*=a_2(t^*)$ ранга Пуанкаре 1 и фуксовыми особыми точками $a_3^*=a_3(t^*),\dots,a_n^*=a_n(t^*)$. Эта система голоморфно эквивалентна локальной системе, определенной связностью ∇^{D^0,C^0}, в окрестности каждой особой точки, но, кроме того, имеет одну дополнительную *ложную* фуксову особенность в бесконечности (матрица монодромии в которой единична). Фундаментальная матрица такой системы в окрестности бесконечности имеет вид $Y^*(z)=U(z)z^K$, где

$$U(z)=I+U_1\frac{1}{z}+U_2\frac{1}{z^2}+\dots,\qquad K=\operatorname{diag}(-1,1). \tag{12}$$

Следовательно, матрица-вычет в бесконечности равна $-K$ и $\sum_{i=1}^n B_{i1}^0=K$ (существование такой системы в фуксовом случае показано, например, в доказательстве теоремы 2 из [6]; здесь объяснение аналогично).

Столбцы фундаментальной матрицы $Y^*(z)$ системы (11) определяют базис горизонтальных (относительно связности ∇^{D^0,C^0}) сечений расслоения F^{D^0,C^0} над $\mathbb{C}$. Рассмотрим матрицу $V(z)$, голоморфно обратимую в окрестности O_∞ бесконечности, столбцы которой определяют этот базис над O_∞. Тогда отношение $Y^*(z)V^{-1}(z)=g_{0\infty}$ задает коцикл расслоения F^{D^0,C^0}. С другой стороны, коцикл расслоения F^{D^0,C^0} есть z^K, поэтому

$$U(z)z^K=z^KV(z). \tag{13}$$

Включим вспомогательную систему (11) в изомонодромное семейство Мальгранжа

$$\frac{dy}{dz}=\left(\frac{B_{12}(t)}{(z-a_1(t))^2}+\frac{B_{22}(t)}{(z-a_2(t))^2}+\sum_{i=1}^n\frac{B_{i1}(t)}{z-a_i(t)}\right)y,\qquad B_{ij}(t^*)=B_{ij}^0. \tag{14}$$

Соответствующая матричная мероморфная дифференциальная 1-форма, задающая это семейство (см. [10, гл. 4, § 1]), имеет вид

$$\omega=\sum_{i=1}^2\frac{B_{i2}(t)}{(z-a_i(t))^2}\,d(z-a_i(t))+\sum_{i=1}^n\frac{B_{i1}(t)}{z-a_i(t)}\,d(z-a_i(t))+\dots(d\Lambda). \tag{15}$$

Заметим, что имеет место соотношение $\sum_{i=1}^n B_{i1}(t)=K$. Действительно, дифференциальная 1-форма ω удовлетворяет условию интегрируемости Фробениуса ($d\omega=\omega\wedge\omega$). Непосредственно проверяется, что вычет (в смысле Лере) внешнего произведения $\omega\wedge\omega$ вдоль $\{z=\infty\}$ равен нулю, а вычет 2-формы $d\omega$ вдоль $\{z=\infty\}$ равен $d\sum_{i=1}^n B_{i1}(t)$.

Пусть $Y(z,t)$ — фундаментальная матрица пфаффовой системы $dy=\omega y$ в окрестности бесконечности, записанная в виде

$$Y(z,t)=U(z,t)z^K,\qquad U(z,t)=I+U_1(t)\frac{1}{z}+U_2(t)\frac{1}{z^2}+\dots, \tag{16}$$

и $Y(z,t^*)=Y^*(z)$ (по аналогии с фуксовым случаем [1]).

Из (15) следует, что

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i}Y^{-1} = -\sum_{j=1}^{r_i+1}\frac{B_{ij}(t)}{(z-a_i)^j} = -\sum_{j=1}^{r_i+1}\frac{B_{ij}(t)}{z^j\bigl(1-\frac{a_i}{z}\bigr)^j}. \tag{17}$$

Разложив левую и правую части равенства (17) в ряд Тейлора в окрестности бесконечности, получим

$$\frac{\partial U_1(t)}{\partial a_i}\frac{1}{z} + o(z^{-1}) = \Bigl(-B_{i1}(t)\frac{1}{z} + o(z^{-1})\Bigr)\Bigl(I + U_1(t)\frac{1}{z} + o(z^{-1})\Bigr),$$

следовательно,

$$\frac{\partial U_1(t)}{\partial a_i} = -B_{i1}(t), \qquad i = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Далее, соотношение

$$\frac{\partial Y}{\partial z}Y^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i+1}\frac{B_{ij}(t)}{z^j\bigl(1-\frac{a_i}{z}\bigr)^j}$$

влечет за собой

$$\begin{aligned}
&-U_1(t)\frac{1}{z^2} + o(z^{-2}) + \Bigl(I + U_1(t)\frac{1}{z} + o(z^{-1})\Bigr)\frac{K}{z} = \\
&\qquad = \Bigl(\frac{K}{z} + \Bigl(\sum_{i=1}^{n}B_{i1}(t)a_i + B_{12}(t) + B_{22}(t)\Bigr)\frac{1}{z^2} + o(z^{-2})\Bigr)\Bigl(I + U_1(t)\frac{1}{z} + o(z^{-1})\Bigr),
\end{aligned}$$

откуда

$$-U_1 + [U_1, K] = \sum_{i=1}^{n}B_{i1}(t)a_i + B_{12}(t) + B_{22}(t).$$

Таким образом, верхний правый элемент $u_1(t)$ матрицы $U_1(t)$ совпадает с таким же элементом матрицы $\sum_{i=1}^{n}B_{i1}(t)a_i + B_{12}(t) + B_{22}(t)$.

Лемма 1. *Функция $u_1(t)$ не равна тождественно нулю и обращается в нуль в точке $t = t^*$.*

Доказательство. Поскольку матрица $U_1(t^*)$ есть матрица U_1 из разложения (12), то равенство нулю функции $u_1(t)$ в точке t^* следует из соотношения (13).

Покажем, что функция $u_1(t)$ не равна нулю тождественно. Обозначим через $b_{ij}(t)$ верхние правые элементы матриц $B_{ij}(t)$. Тогда

$$u_1(t) = b_{12}(t) + b_{22}(t) + \sum_{i=1}^{n}b_{i1}(t)a_i$$

и, как следует из (18),

$$\frac{\partial u_1(t)}{\partial a_i} = -b_{i1}(t), \qquad i = 1,\dots,n.$$

Поэтому если $u_1(t) \equiv 0$, то выполняются равенства

$$b_{i1}(t) \equiv 0, \quad i = 1,\dots,n, \qquad b_{12}(t) + b_{22}(t) \equiv 0.$$

Покажем, что тогда дополнительно выполнено соотношение $b_{12}(t) = b_{22}(t) \equiv 0$, что противоречит неприводимости монодромии семейства (14).

Перейдем к новой независимой переменной $\xi = z^{-1}$, для того чтобы исследовать поведение матричной дифференциальной 1-формы $B(z,t)\,dz$ коэффициентов семейства (14) в окрестности ложной особенности $z=\infty$ (после замены соответственно в окрестности ложной особенности $\xi = 0$):

$$B(z,t)\,dz = -\frac{B(\xi^{-1},t)}{\xi^2}\,d\xi,$$

$$-\frac{B(\xi^{-1},t)}{\xi^2} = -\sum_{i=1}^{2}\frac{B_{i2}(t)}{(1-a_i\xi)^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{B_{i1}(t)}{\xi(1-a_i\xi)} =$$

$$= -\frac{1}{\xi}\left(K + \sum_{i=1}^{n} B_{i1}(t)a_i\xi + \sum_{i=1}^{n} B_{i1}(t)a_i^2\xi^2 + o(\xi^2)\right) - \left(\sum_{i=1}^{2} B_{i2}(t) + 2\sum_{i=1}^{2} B_{i2}(t)a_i\xi + o(\xi)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\xi}K - \left(\sum_{i=1}^{n} B_{i1}(t)a_i + \sum_{i=1}^{2} B_{i2}(t)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} B_{i1}(t)a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{2} B_{i2}(t)a_i\right)\xi + o(\xi) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\xi} + \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & -2\sum_{i=1}^{2} b_{i2}(t)a_i \\ * & * \end{pmatrix}\xi + o(\xi).$$

Калибровочное преобразование $\widetilde{y} = \xi^K y$ переводит эту матрицу в матрицу вида

$$\frac{1}{\xi}\begin{pmatrix} 0 & -2\sum_{i=1}^{2} b_{i2}(t)a_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(1).$$

Матрица монодромии фуксовой особой точки $\xi = 0$ преобразованной системы равна единичной матрице. С другой стороны, оба собственных значения ее матрицы-вычета равны нулю. Следовательно, матрица монодромии равна экспоненте матрицы-вычета, т.е.

$$\exp\left\{2\pi\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2\sum_{i=1}^{2} b_{i2}(t)a_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = I.$$

Тогда выполнено равенство $b_{12}(t)a_1 + b_{22}(t)a_2 \equiv 0$, которое (с учетом того, что $b_{12}(t) + b_{22}(t) \equiv 0$) влечет за собой $b_{12}(t) = b_{22}(t) \equiv 0$. $\square$

Лемма 2. *Функция $u_1(t)$ является локальной τ-функцией изомонодромной деформации Мальгранжа системы* (10), *т.е. локально задает Θ-дивизор в окрестности точки $t^* \in \Theta$.*

Доказательство. Если $u_1(t) \neq 0$, то рассмотрим голоморфно обратимую в $\mathbb{C}$ (по z) матрицу

$$\Gamma_1'(z,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{u_1(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

По построению матрица $U'(z,t) = \Gamma_1'(z,t)U(z,t)$ имеет вид

$$U'(z,t) = \left(U_0'(t) + U_1'(t)\frac{1}{z} + \dots\right)z^{-K}, \qquad U_0'(t) = \begin{pmatrix} 0 & u_1(t) \\ -\frac{1}{u_1(t)} & \frac{f(t)}{u_1(t)} \end{pmatrix},$$

где $f(t)$ — голоморфная в точке $t = t^*$ функция.

Калибровочное преобразование

$$y_1 = \Gamma_1(z,t)y, \qquad \Gamma_1(z,t) = U_0'(t)^{-1}\Gamma_1'(z,t), \tag{19}$$

переводит систему (14) в новую систему с фундаментальной матрицей $Y^1(z,t) = \Gamma_1(z,t)Y(z,t)$, голоморфно обратимой в бесконечности. Поскольку столбцы матрицы $Y(z,t)$ образуют базис горизонтальных (относительно ограничения связности ∇ на $\overline{\mathbb{C}} \times \{t\}$) сечений расслоения $E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t\}}$ над $\mathbb{C}$, то последнее соотношение показывает, что это расслоение голоморфно тривиально.

Если $u_1(t) = 0$, то матрица

$$V_\infty(z) = z^{-K}U(z,t)z^K = z^{-K}\left(I + \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\frac{1}{z} + \dots\right)z^K$$

голоморфно обратима в бесконечности, следовательно, $Y(z,t) = z^K V_\infty(z)$ и $E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t\}} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \oplus\, \mathcal{O}(1)$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Покажем сначала, что $du_1(t^*) \not\equiv 0$. Действительно, в противном случае выполнялись бы равенства

$$b_{i1}(t^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad b_{12}(t^*) + b_{22}(t^*) = 0.$$

Но тогда, как и при доказательстве леммы 1, мы получили бы, что дополнительно имеет место соотношение $b_{12}(t^*) = b_{22}(t^*) = 0$, а это противоречит неприводимости монодромии семейства (14). Итак, Θ-дивизор изомонодромной деформации Мальгранжа системы (10) является аналитическим подмногообразием в окрестности $D(t^*)$ точки t^*.

Теперь оценим порядки полюсов матриц $A_{i1}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{22}(t)$ вдоль $\Theta \cap D(t^*)$. Обратимся к доказательству леммы 2. Семейство, полученное из (14) после калибровочного преобразования (19), совпадает с изомонодромной деформацией Мальгранжа (при $t \in D(t^*) \setminus \Theta$) исходной системы (10). (Действительно, данное преобразование не меняет матрицы связи в фуксовых особенностях, а также не меняет классы голоморфной эквивалентности семейства в иррегулярных особых точках.) Следовательно, матрица коэффициентов изомонодромной деформации Мальгранжа исходной системы (10) имеет вид

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1} + \Gamma_1\left(\frac{B_{12}(t)}{(z-a_1(t))^2} + \frac{B_{22}(t)}{(z-a_2(t))^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{B_{i1}(t)}{z-a_i(t)}\right)\Gamma_1^{-1}.$$

Поскольку матрица $\Gamma_1(z,t)$ голоморфно обратима (по z) в $\mathbb{C}$, получаем

$$A_{i1}(t) = \Gamma_1(a_i(t),t)\, B_{i1}(t)\Gamma_1^{-1}(a_i(t),t), \qquad i = 3, \dots, n,$$

а также для $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} A_{i2}(t) &= \Gamma_1(a_i(t),t)\, B_{i2}(t)\Gamma_1^{-1}(a_i(t),t), \\ A_{i1}(t) &= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial z}(a_i(t),t)\, B_{i2}(t)\Gamma_1^{-1}(a_i(t),t) + \Gamma_1(a_i(t),t)\, B_{i1}(t)\Gamma_1^{-1}(a_i(t),t) + \\ &\quad + \Gamma_1(a_i(t),t)\, B_{i2}(t)\frac{\partial \Gamma_1^{-1}}{\partial z}(a_i(t),t). \end{aligned}$$

Так как

$$\Gamma_1(z,t) = U_0'(t)^{-1}\Gamma_1'(z,t) = \begin{pmatrix} \frac{f(t)}{u_1(t)} & -u_1(t) \\ \frac{1}{u_1(t)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{u_1(t)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + \frac{f(t)}{u_1(t)} & -u_1(t) \\ \frac{1}{u_1(t)} & 0 \end{pmatrix}$$

и матрицы $B_{ij}(t)$ голоморфны в окрестности точки $t = t^*$, то нетрудно заметить, что тем же свойством обладают и все матрицы $(u_1(t))^2 A_{ij}(t)$. $\square$

Замечание. Напомним, что уравнения Пенлеве III и V допускают описание в терминах изомонодромных деформаций, удовлетворяющих теореме 3 (см. подробности в [10, гл. 5, § 4, 5]): для $\mathrm{P}_{\mathrm{III}}$ имеем $m = n = 2$, а для P_{V} имеем $m = 1$, $n = 3$. Если $t^* \in \Theta$ и $E|_{\overline{\mathbb{C}}\times\{t^*\}} \cong \mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k)$, то справедлива оценка $2k \leq m + n - 2$ [5] (когда монодромия связности неприводима). Таким образом, $2k \leq 2$ и, следовательно, $k = 1$ в обоих случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А.А.* О tau-функции уравнения изомонодромных деформаций Шлезингера // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 2. С. 184–191.
2. *Bolibruch A.A.* On orders of movable poles of the Schlesinger equation // J. Dyn. Control Syst. 2000. V. 6, N 1. P. 57–73.
3. *Bolibruch A.A.* On isomonodromic deformations of Fuchsian systems // J. Dyn. Control Syst. 1997. V. 3, N 4. P. 589–604.
4. *Болибрух А.А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.
5. *Bolibruch A.A., Malek S., Mitschi C.* On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities // Expo. Math. 2006. V. 24, N 3. P. 235–272.
6. *Вьюгин И.В., Гонцов Р.Р.* О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 12. С. 43–64.
7. *Gontsov R.R., Vyugin I.V.* Apparent singularities of Fuchsian equations and the Painlevé property for Garnier systems // J. Geom. Phys. 2011. V. 61, N 12. P. 2419–2435.
8. *Deligne P.* Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin: Springer, 1970. (Lect. Notes Math.; V. 163).
9. *Ilyashenko Yu., Yakovenko S.* Lectures on analytic differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. (Grad. Stud. Math.; V. 86).
10. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
11. *Levelt A.* Hypergeometric functions. II // Nederl. Acad. Wet. Proc. A. 1961. V. 64. P. 373–385.
12. *Malgrange B.* Sur les déformations isomonodromiques. II: Singularités irrégulières // Mathématique et physique: Sémin. Ec. Norm. Supér., Paris, 1979–1982. Boston: Birkhäuser, 1983. P. 427–438. (Progr. Math.; V. 37).
13. *Malgrange B.* Connexions méromorphes. II: Le réseau canonique // Invent. math. 1996. V. 124. P. 367–387.
14. *Palmer J.* Zeros of the Jimbo, Miwa, Ueno tau function // J. Math. Phys. 1999. V. 40, N 12. P. 6638–6681.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
16. *Schlesinger L.* Über die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte // J. reine angew. Math. 1905. Bd. 129. S. 287–294.
17. *Schlesinger L.* Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten // J. reine angew. Math. 1912. Bd. 141. S. 96–145.