Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций.– М.–Л., 1949, с.688.

2. Giovanni Monegato. Positivity of the weigtes of extended Gauss-Legendre quadrature rules. – Mathem. Comput., 1978, v. 32, N141, p. 243-245.

Ф.Ф.Майер

ПОДЧИНЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ОДНОЛИСТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В настоящей статье решается задача нахождения наилучшей мажоранты в некоторых классах аналитических функций и даются приложения этих результатов к исследованию однолистности интегральных представлений, являющихся решениями обратных краевых задач.

§ 1. Говорят (например, [1, с.356]), что регулярная в круге $E=\{\zeta : |\zeta|<1\}$ функция $S(\zeta)$ подчинена однолистной функции $S_0(\zeta)$, и пишут $S(\zeta)<S_0(\zeta)$, если $S(0)=S_0(0)$ и $S(E)<S_0(E)$. Назовем функцию $S_0(\zeta)$ мажорантой класса $\mathcal{Y}$ функций $S(\zeta)$, если $S(\zeta)<S_0(\zeta)$ для любой функции $S(\zeta)\in\mathcal{Y}$. Если $S_0(\zeta)$– мажоранта, и $S_0(\zeta)<\tilde{S}_0(\zeta)$ для всех мажорант $\tilde{S}_0(\zeta)$ класса $\mathcal{Y}$, то $S_0(\zeta)$ назовем наилучшей мажорантой класса $\mathcal{Y}$.

Очевидно, наилучшая мажоранта, если она существует, единственна с точностью до вращения плоскости ζ. Кроме того, если $S_0(\zeta)$ – мажоранта класса $\mathcal{Y}$ и $S_0(\zeta)\in\mathcal{Y}$, то $S_0(\zeta)$ – наилучшая мажоранта. Нахождение наилучших мажорант различных классов функций позволяет до конца решить ряд экстремальных задач на этих классах.

Основой для дальнейшего служит следующая

Лемма. Если $\zeta S'(\zeta) < \zeta R'(\zeta)$, где функция $\zeta R'(\zeta)$ однолистна и звездообразна в E, а функция $S(\zeta)$ имеет разложение $S(\zeta)=b_n\zeta^n+b_{n+1}\zeta^{n+1}+\ldots$, $n\geqslant 1$, $\zeta\in E$, то $S(\zeta)<\frac{1}{n}R(\zeta)$.

Для обоснования леммы нам потребуется

Т е о р е м а А [2]. Пусть функции $Q(\zeta)$ и $G(\zeta)$ однолистны в E, $Q_\rho(\zeta)=Q(\rho\zeta)$, $G_\rho(\zeta)=G(\rho\zeta)$, $0<\rho<1$, а непрерывная функция $\Psi(\mu,\eta)$ действует из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}$. Если $S(\zeta)=b_n\zeta^n+b_{n+1}\zeta^{n+1}+\ldots$, $n\geq 1$, регулярна в E и $\Psi(S(\zeta),\zeta S'(\zeta))\prec Q(\zeta)$, причем $\Psi(\mu,\eta)\notin Q_\rho(E)$ при $\mu=G_\rho(e^{i\theta})$, $\eta=me^{i\theta}G_\rho'(e^{i\theta})$, $m\geq n$, то $S(\zeta)\prec G(\zeta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Положим в теореме А $\Psi(\mu,\eta)\equiv\eta$, $Q(\zeta)=\zeta R'(\zeta)$, $G(\zeta)=\frac{1}{n}R(\zeta)$. Тогда для $\zeta=e^{i\theta}$

$$\Psi(\mu,\eta)=m\zeta G_\rho'(\zeta)=\frac{m}{n}\rho\zeta G'(\rho\zeta)=\frac{m}{n}Q_\rho(\zeta)\notin Q_\rho(E)$$

при $m\geq n$ в силу звездообразности функции $Q_\rho(\zeta)$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 1. Пусть задан класс $\mathcal{Y}_{n,k}(A)$ функций $S(\zeta)=b_n\zeta^n+b_{n+1}\zeta^{n+1}+\ldots$, $n\geq 1$, регулярных в E, непрерывно продолжимых на $|\zeta|=1$ и таких, что производная порядка k $(k\geq 0)$ функции $u(\theta)=\operatorname{Re}S(e^{i\theta})$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|u^{(k)}(\theta_1)-u^{(k)}(\theta_2)|\leq A|\theta_1-\theta_2|.$$

Тогда этот класс имеет наилучшую мажоранту $S_0(\zeta)$, причем

$$S_0(\zeta)=-\frac{2Ai}{\pi(in)^{k+1}}\int_0^{\zeta}\int_0^{\zeta_1}\cdots\int_0^{\zeta_k}\ln\frac{1+\zeta_{k+1}}{1-\zeta_{k+1}}\frac{d\zeta_{k+1}\cdots d\zeta_1}{\zeta_{k+1}\cdots\zeta_1}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 1 [3] и леммы 1 [4] с дополнительным k-кратным применением леммы.

Заметим, что из теоремы 1 как частные случаи вытекают отмеченные выше результаты статей [3, 4]. Действительно, в силу подчиненности $S(\zeta)\prec S_0(\zeta)$ справедливо неравенство

$$\max_{|\zeta|\leq r}\operatorname{Re}\left[e^{i\delta}S(\zeta)\right]\leq\max_{|\zeta|\leq r^n}\operatorname{Re}\left[e^{i\delta}S_0(\zeta)\right],$$

где δ - произвольное фиксированное вещественное число. Отсюда имеем точные оценки [3, 4]:

$$|S(\zeta)|\leq\frac{4A}{\pi n^{k+1}}M_k(r^n),$$

$$|\operatorname{Re} S(z)| \le \frac{4A}{\pi n^{k+1}} M_k(r^n), \quad |\operatorname{Im} S(z)| \le \frac{4A}{\pi n^{k+1}} m_k(r^n)$$

при k четном,

$$|\operatorname{Re} S(z)| \le \frac{4A}{\pi n^{k+1}} m_k(r^n), \quad |\operatorname{Im} S(z)| \le \frac{4A}{\pi n^{k+1}} M_k(r^n)$$

при k нечетном, где

$$M_k(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{2j+1}}{(2j+1)^{k+2}} \le \frac{\pi^2}{8} r, \quad m_k(r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{r^{2j+1}}{(2j+1)^{k+2}} \le r. \qquad (1)$$

Используя известные свойства подчиненных функций, из теоремы I можно получить и ряд других результатов. Например, из условия $S(z) < S_0(z)$ следует неравенство [5, с.92]

$$\int_0^{2\pi} \Phi[\operatorname{Re}(e^{i\delta} S(re^{i\theta}))]\,d\theta \le \int_0^{2\pi} \Phi[\operatorname{Re}(e^{i\delta} S_0(re^{i\theta}))]\,d\theta, \qquad (2)$$

где $\Phi(x)$ – выпуклая функция на $-\infty < x < +\infty$. Взяв $k=0$, $\delta=0$, $\Phi(x)=|x|^p$ и переходя к пределу при $r \to 1$, получим такое

Следствие I. Пусть задан класс 2π – периодических функций $u(\theta)$, удовлетворяющих условиям:

$$1^\circ.\ \int_0^{2\pi} u(\theta) e^{ij\theta} d\theta = 0, \ j=\overline{0,n-1}, \ n \ge 1; \qquad 2^\circ.\ |u(\theta_1)-u(\theta_2)| \le A|\theta_1-\theta_2|.$$

Тогда функционал $J_p[u(\theta)] = \left[\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^p d\theta\right]^{1/p}$ в этом классе функций достигает максимума, причем

$$\max J_p[u(\theta)] = J_p[\operatorname{Re} S_0(e^{i\theta})] = J_p[u_0^n(\theta)] = \frac{\pi A}{2n}\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)^{1/p}.$$

Здесь

$$u_0^n(\theta) = \operatorname{Re} S_0(e^{in\theta}) = A \cdot \begin{cases} \theta - \pi/2n, & 0 \le \theta \le \pi/n, \\ 3\pi/2n - \theta, & \pi/n \le \theta \le 2\pi/n. \end{cases}$$

При $n=1$, $p=2$ этот результат получен другим методом в работе [6], а при $p=2$ для случая $2\pi/n$ – периодических функций – в [7]. Кроме того, следствие улучшает оценку $J_2[u(\theta)]$ из статьи [8] для условия Липшица.

Наряду с классом $\mathcal{Y}_{n,k}(A)$ рассмотрим также класс $\widetilde{\mathcal{Y}}_{n,k}(A)$ функций $S(z)=b_n z^n+\ldots$, $n\geq 1$, для которых функция $u(\theta)=\mathrm{Re}\,S(e^{i\theta})$ имеет непрерывную $(k+1)$-ю производную $u^{(k+1)}(\theta)$, удовлетворяющую условию $u^{(k+1)}(\theta)\geq -A$. Справедлива

Т е о р е м а 2. Наилучшей мажорантой класса $\widetilde{\mathcal{Y}}_{n,k}(A)$ является функция

$$\widetilde{S}(z)=-\frac{2A}{(in)^{k+1}}\int_0^{z}\int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_{k-1}}\ln(1-z_k)\,\frac{dz_k\cdots dz_1}{z_k\cdots z_1}\;.$$

Заметим, что мажоранта $\widetilde{S}(z)$ не принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{Y}}_{n,k}(A)$, ибо для нее нарушается условие непрерывности функции $u^{(k+1)}(\theta)$. Однако существует последовательность функций $S(z)\in\widetilde{\mathcal{Y}}_{n,k}(A)$, сходящихся к функции $\widetilde{S}(z)$.

Из теоремы 2 вытекает, в частности, известная оценка [9]

$$|S(z)|\leq\frac{2A}{n^{k+1}}N_{k+1}(r^n),\quad N_{k+1}(r)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^j}{j^{k+1}}\leq\zeta(k+1)\,r\,,$$

где $\zeta(p)$ - дзета-функция Римана, а также следующее утверждение.

С л е д с т в и е 2. В классе 2π - периодических функций $u(\theta)$, удовлетворяющих условиям

$$1^\circ.\ \int_0^{2\pi}u(\theta)\,e^{ij\theta}d\theta=0\,,\ j=\overline{0,n-1}\,,\ n\geq 1\,;\qquad 2^\circ.\ u'(\theta)\geq -A\,,$$

для нормы пространства $\mathcal{L}_p[0,2\pi]$ справедлива точная оценка

$$\mathfrak{I}_p[u(\theta)]\leq\frac{\pi A}{n}\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)^{1/p}.$$

Знак равенства в этой оценке реализуется на некоторой последовательности функций $u(\theta)\in C^1[0,2\pi]$, сходящихся к функции

$$\widetilde{u}^n(\theta)=\mathrm{Re}\,\widetilde{S}(e^{in\theta})=A(\pi/n-\theta)\,,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi/n\,.$$

При $p\to\infty$ отсюда получаем $\sup\limits_u\|u\|_C=\|\widetilde{u}^n\|_C=\pi A/n$.

§ 2. Применим теоремы I - 2 к проблеме однолистной разрешимости обратных краевых задач (ОКЗ) для аналитических функций [10, гл.I; II, § 33]. Решением внутренней ОКЗ является функция

$$f(\zeta)=\int_0^{\zeta}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta\right\}d\zeta\ ,\quad \zeta\in E\ , \tag{3}$$

где вещественная периодическая функция $\rho(\theta)$ определяется по краевым условиям задачи.

Обозначим через $\omega_1(x)$ функцию $\omega_1(x)=\int_0^x \ln ctg\frac{\tau}{2}\,d\tau$.

Т е о р е м а 3. Пусть функция $\rho(\theta)$ $2\pi/N$ – периодична $(n\geqslant 1)$ и

$$|\rho'(\theta_1)-\rho'(\theta_2)|\leqslant A\,|\theta_1-\theta_2|\ . \tag{4}$$

Решение внутренней ОКЗ будет однолистным (почти выпуклым), если $A\leqslant A_1(n)=\pi n/2\,\omega_1(\theta_0)$, где θ_0 определяется из уравнения

$$\theta_0+\frac{1}{\omega_1(\theta_0)}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\omega_1(x)\,dx=\frac{\pi}{2}(n+1)\ . \tag{5}$$

Оценку на A нельзя улучшить без дополнительных ограничений на $\rho(\theta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $\rho(\theta)$ $2\pi/n$ – периодична, решение ОКЗ является n –симметричным. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать [7], что граничное вращение

$$a[f]=\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left|1+Re\,\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|d\theta\ ,\quad \zeta=re^{i\theta},$$

функции $f(\zeta)$ не превосходит $2\pi(n+1)$.

Обозначим $S(\zeta)=i\,\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$. Так как $\rho'(\theta)=Re\,S(e^{i\theta})$, то на основании теоремы I при $k=0$ заключаем, что точная область значений функции $S(\zeta)$ при условии (4) описывается функцией

$$S_0(\zeta)=-\frac{2A}{\pi n}\int_0^{\zeta}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{d\tau}{\tau}\ .$$

Поскольку функция $S_0(\zeta)$ является непрерывной в замкнутом круге $\overline{E}$, то в силу неравенства (2) при $\delta=-\pi/2$, $\Phi(x)=|1+x|$ получаем

$$a[f] \leq \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |1 + \operatorname{Im} S_0(re^{i\theta})|\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} |1 + \operatorname{Im} S_0(e^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |g(\theta)|\, d\theta\ .$$

Искомая постоянная $A_1(n)$ (при фиксированном n) определится из уравнения $\int_0^{2\pi} |g(\theta)|\, d\theta = 2\pi(n+1)$.

Вычисления показывают, что

$$\operatorname{Im} S_0(e^{i\theta}) = \frac{2A}{\pi n} \int_0^{\theta} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| dx\ .$$

Если $A \leq \pi n/4G$, где $G \approx 0{,}916$ – постоянная Каталана [12, с.543], то

$$g(\theta) = 1 + \frac{4A}{\pi n} \int_0^{\theta} \ln|\operatorname{tg} x|\, dx \geq 1 + \frac{4A}{\pi n} \int_0^{\pi/4} \ln \operatorname{tg} x\, dx = 1 - \frac{4A}{\pi n} G \geq 0\ .$$

Следовательно, $a[f] = 2\pi$, т.е. [13] функция $f(z)$ является выпуклой в $\bar{E}$. Будем считать, что $A > \pi n/4G$. Тогда

$$g(\theta) \begin{cases} \leq 0 & \text{при} \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0\ , \\ \geq 0 & \text{при} \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi + \theta_0\ , \end{cases}$$

где θ_0 и A связаны соотношением $\pi n = 2A\,\omega_1(\theta_0)$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$.

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |g(\theta)|\, d\theta = \left(-\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} + \int_{\pi-\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \right) g(\theta)\, d\theta = -4 \int_{\theta_0}^{\pi/2} g(\theta)\, d\theta + 2\pi = 2\pi(n+1)$$

или

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \frac{2A}{\pi n} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \omega_1(x)\, dx = -\frac{\pi}{2} n\ .$$

Отсюда уже нетрудно придти к уравнению (5).

Неулучшаемость утверждения теоремы следует из того, что для функции $f_0(z)$, определенной с помощью соотношения $iz f''(z)/f'(z) = S_0(\varepsilon z^n)$, $|\varepsilon| = 1$, выполняются все условия теоремы, однако существуют точки θ_1 и θ_2, $0<\theta_2-\theta_1<2\pi$, в которых $\int_{\theta_1}^{\theta_2}(1+\mathrm{Re}\, z f''(z)/f'(z))\,d\theta<-\pi$, $z=e^{i\theta}$, при $A>A_1(n)$, т.е. нарушается условие почти выпуклости [14] функции $f_0(z)$.

Исследуем асимптотическое поведение функции $A=A_1(n)$ при $n\to\infty$. Обозначим $\sigma=\sigma(\theta_0)=[\omega_1(\theta_0)]^{-1}$. Поскольку функция $\int_{\theta_0}^{\pi/2}\omega_1(x)\,dx$ ограничена, то из (5) следует, что

$$n=n(\theta_0)\to\infty \Longleftrightarrow \theta_0\to 0 \Longleftrightarrow \sigma(\theta_0)\to\infty .$$

Поэтому

$$\kappa=\lim_{\theta_0\to 0}\frac{\sigma(\theta_0)}{n(\theta_0)}=\lim_{\theta_0\to 0}\left\{\omega_1(\theta_0)\left[\frac{2}{\pi}\left(\theta_0+\frac{1}{\omega_1(\theta_0)}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\omega_1(x)\,dx\right)-1\right]\right\}^{-1}=$$

$$=\lim_{\theta_0\to 0}\left\{\frac{2}{\pi}\left[\theta_0\,\omega_1(\theta_0)+\int_{\theta_0}^{\pi/2}\omega_1(x)\,dx\right]-\omega_1(\theta_0)\right\}^{-1}=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\pi/2}\omega_1(x)\,dx\right]^{-1}=\frac{\pi}{2C_1(1)} .$$

Учитывая еще, что

$$b=\lim_{\theta_0\to 0}\left[\sigma(\theta_0)-\kappa\, n(\theta_0)\right]=$$

$$=\lim_{\theta_0\to 0}\left[\frac{1}{\omega_1(\theta_0)}-\frac{1}{C_1(1)\,\omega_1(\theta_0)}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\omega_1(x)\,dx-\frac{\theta_0}{C_1(1)}+\frac{\pi}{2C_1(1)}\right]=\frac{\pi}{2C_1(1)} ,$$

запишем выражение для асимптоты

$$\tilde{A}_1(n)=\frac{\pi}{2}\,n\,\sigma=\frac{\pi}{2}\,n\,(\kappa n+b)=\frac{\pi^2}{4C_1(1)}\,n(n+1) .$$

Постоянная $C_1(1)$ выражается через постоянную $M_1(1)$ из (1) или дзета-функцию Римана:

$$C_1(1)=2M_1(1)=\frac{7}{4}\,\zeta(3)\approx 2,1036 .$$

Действительно,

$$C_1(1)=-\frac{\pi n}{2A}\int_0^{\pi/2}\mathrm{Im}\, S_0(e^{i\theta})\,d\theta=\lim_{r\to 1}\int_0^{\pi/2}\left[\mathrm{Im}\int_0^{re^{i\theta}}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{d\tau}{\tau}\right]d\theta .$$

Используя уравнения Коши-Римана в полярных координатах, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\pi/2}\left[\operatorname{Im}\int_0^{re^{i\theta}}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{d\tau}{\tau}\right]d\theta=-\frac{1}{r}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\int_0^{re^{i\theta}}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{d\tau}{\tau}\right]d\theta=$$

$$=\frac{2}{r}\int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\theta\,d\theta=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k}}{(2k+1)^2}\ .$$

Отсюда

$$C_1(1)=2\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{r^{2k}dr}{(2k+1)^2}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}=2M_1(1)=\frac{7}{4}\zeta\ . \qquad (3)$$

Теорема 3 дает точное значение разделяющей постоянной [15] для условия Липшица (4) в классе однолистных (почти выпуклых) n -симметричных функций, равное $A_1(n)$. Ранее оценка снизу этой величины, близкая к окончательной при $n\to\infty$, была получена В.Н.Гайдуком [7]:

$$A_1(n)>\underline{A_1(n)}=2\pi^{-1}n\sqrt{3n(n+2)}\ .$$

Отметим, что

$$A_1(n)/\underline{A_1(n)}\sim\frac{\pi^3}{8\sqrt{3}\,C_1(1)}\approx 1{,}0637 \qquad \text{при} \quad n\to\infty\ .$$

В случае $n=1$ оценка снизу постоянной $A_1(n)$ в классе однолистных (почти выпуклых) функций улучшалась в работах [6]: $A_1(1)>6/\pi\approx 1{,}91$; [16]: $A_1(1)>\pi^2/8\,M_1(1)+\pi/4\,G\approx 2{,}03$. В силу теоремы 3 имеем $A_1(1)=2{,}28\ldots$.

В таблице 1 приведены первые значения величин $A_1(n)$ и $\tilde{A}_1(n)$.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5
$A_1(n)$	2.28	6.96	14.00	23.39	35.11
$\tilde{A}_1(n)$	2.34	7.03	14.07	23.46	35.18

Метод доказательства теоремы 3 позволяет обобщить ее на случай, когда условию Липшица удовлетворяет одна из производных функции $\rho(\theta)$ порядка выше первого. Пусть

$$\omega_k(x)=\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{k-1}}\ln\operatorname{ctg}\frac{x_k}{2}\,dx_k\ldots dx_1\ .$$

Имеет место

Т е о р е м а 4. n-симметричное решение внутренней ОКЗ будет однолистным (почти выпуклым), если при некотором k $(k \geq 1)$

$$|\rho^{(k)}(\theta_1)-\rho^{(k)}(\theta_2)| \leq A\,|\theta_1-\theta_2|,$$

причем $A \leq A_k(n)=\pi n^k/2\ \omega_k(\theta_0)$, а θ_0 – корень уравнения

$$\theta_0+\frac{1}{\omega_k(\theta_0)}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\omega_k(x)\,dx=\frac{\pi}{2}(n+1).$$

Данное утверждение является неулучшаемым.

Аналогично случаю $k=1$ можно показать, что функция $A_k(n)$ при $n\to\infty$ ведет себя как

$$\tilde{A}_k(n)=\frac{\pi^2}{4C_k(1)}\,n^k(n+1),\ \text{где}\ C_k(1)=\begin{cases}2m_k(1), & \text{если } k \text{ четно},\\ 2M_k(1), & \text{если } k \text{ нечетно},\end{cases}$$

а постоянные $m_k(1)$ и $M_k(1)$ задаются формулами (1).

Получим теперь точные значения разделяющих постоянных в односторонних ограничениях на функцию $\rho^{(k)}(\theta)$. Рассмотрим лишь случай $k=2$. Не останавливаясь на доказательстве, основанном на использовании теоремы 2 и сходном с доказательством теоремы 3, приведем следующий результат.

Т е о р е м а 5. Пусть

$$\Delta(\theta)=\theta-\left[\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1}\int_0^{\theta}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

n-симметричное решение внутренней ОКЗ однолистно (почти выпукло), если функция $\rho(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем

1) $\rho''(\theta)\leq M$, $M\leq M^+(n)=n/2\,\ln(2\sin\theta_0/2)$,

где θ_0 – корень уравнения $\Delta(\theta)=\pi(n+2)/2$, или

2) $\rho''(\theta)\geq -M$, $M\leq M^-(n)=n/2\,\ln(2\sin\theta_0/2)^{-1}$,

а θ_0 определяется из уравнения $\Delta(\theta)=-\pi n/2$.
Утверждение теоремы неулучшаемо.

С учетом того, что $n = n(\theta_0) \to \infty$ при $\theta_0 \to \pi/3$, нетрудно вывести асимптотическое поведение функций $M^+(n)$ и $M^-(n)$ при $n \to \infty$:

$$M^+(n) \sim \tilde{M}^+(n) = \frac{\pi}{4a(1)} n\left(n + \frac{4}{3}\right) \qquad (n \to \infty),$$

$$M^-(n) \sim \tilde{M}^-(n) = \frac{\pi}{4a(1)} n\left(n + \frac{2}{3}\right) \qquad (n \to \infty),$$

где $a(1) = -\int_0^{\pi/3} \ln(2\sin x/2)\,dx$. Постоянная $a(1)$ выражается через функцию Лобачевского [12, с.540,947] $L(x) = -\int_0^x \ln\cos x\,dx$:

$$a(1) = \frac{2\pi}{3}\ln 2 - L\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1{,}015\,.$$

Теорема 5 улучшает соответствующие утверждения из работы [9].

Таблица 2

n	1	2	3	4	5
$M^-(n)$	1.19	4.00	8.37	14.25	21.80
$\tilde{M}^-(n)$	1.29	4.13	8.51	14.44	21.92
$M^+(n)$	1.71	5.03	9.92	16.36	24.38
$\tilde{M}^+(n)$	1.80	5.16	10.06	16.51	24.50

З а м е ч а н и е. Аналогичные результаты имеют место и для n – симметричного решения внешней ОКЗ, имеющего вид

$$z = \mathcal{F}(\zeta) = \int_1^{\zeta} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta\right\} d\zeta + \mathcal{F}(1), \; |\zeta| > 1,$$

где $\varphi(\theta)$ – некоторая $2\pi/n$ – периодическая функция. Доказываются они сведением к условию однолистности (почти выпуклости) В.П.Микки [17] $\alpha[\mathcal{F}] \le 2\pi(n-1)$. Отметим, что формулировки этих результатов легко получаются из формулировок соответствующих утверждений для решения внутренней задачи, если в последних функцию $\rho(\theta)$ и постоянные $A_k(n)$, $M^{(\pm)}(n)$ заменить соответственно на функцию $\varphi(\theta)$ и постоянные $A_k(n-2)$, $M^{(\mp)}(n-2)$.

Задача нахождения разделяющих постоянных в классе однолистных (почти выпуклых) n -симметричных решений внешней ОКЗ, когда $\varphi'(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица, исследовалась в работе В.П.Микки [17]. Найденная им оценка снизу разделяющей постоянной уточняется постоянной $A_1(n-2)$.

Автор выражает глубокую признательность Л.А.Аксентьеву за полезные советы и внимание к работе.

Литература

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1966. - 628 с.

2. Miller S., Mocanu P. Differential subordinations and univalent functions. — Michigan Math. J., 1981, v. 28, N 2, p. 157-171.

3. Авхадиев Ф.Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений.- Мат.заметки, 1970, т.7, вып.5, с.581 - 592.

4. Авхадиев Ф.Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах.- В сб.: Тр.семинара по краевым задачам, вып.10. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973, с.3 - 10.

5. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции.- М.: Мир, 1980.- 304 с.

6. Авхадиев Ф.Г., Гайдук В.Н. Применение почти выпуклых функций к обратным краевым задачам.- Изв. вузов. Матем., 1968, № 6, с.3 - 10.

7. Гайдук В.Н. Некоторые условия однолистности решения обратной краевой задачи для n -симметричных функций.- В сб.: Тр. семинара по краевым задачам, вып.8. Казань; Изд-во Казанского ун-та, 1971, с. 55 - 58.

8. Пацевич Е.Л. Оценка для гармонических в круге функций и их применение к обратным краевым задачам.-В сб.: Тр.семинара по краевым задачам, вып.11. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1974, с. 144 - 148.

9. Нежметдинов И.Р. Геометрические свойства решений основных обратных краевых задач. Казань, 1978.-18 с.-

Рукопись представлена Казанск. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 22 декабря 1978 г., № 3889 - 78.

10. Т у м а ш е в Г.Г., Н у ж и н М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения.- Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1965. - 333 с.

11. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977. - 640 с.

12. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Физматгиз:1963,- 1100 с.

13. Paatero V. Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind.- Acad. Abh. Helsinki, 1931.

14. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions.— Michigan Math. J., 1952, v. 1, N2, p. 169 - 185.

15. А к с е н т ь е в Л.А. Об условиях разрешимости и условиях однолистности.- В сб.: Тр. семинара по обратным краевым задачам, вып.2. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1964, с. 12 - 20.

16. Н е ж м е т д и н о в И.Р. Геометрические свойства решений обратных краевых задач: Автореф. дис. ...канд.физ-мат. наук. Казань, 1979.- 14 с.

17. М и к к а В. П. Два достаточных условия однолистности аналитических функций.- Мат.заметки, 1976, т.19, вып.3, с. 331 - 346.

И.Р.Нежметдинов

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В КРУГЕ

Пусть функция $g(z)=g(re^{i\theta})=p(r,\theta)+i\,q(r,\theta)$ регулярна в круге $|z|<1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, $g(0)=0$. Обозначим через $p(\theta)$ и $q(\theta)$ граничные значения функций $p(r,\theta)$ и $q(r,\theta)$ соответственно. В статье Н.П.Корнейчука [1] были получены точные оценки нормы $\|p\|_C = \sup_\theta |p(\theta)|$ при условии, что модуль непрерывности $p(\theta)$ —