Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. I. Nosich, V. P. Shestopalov, Electromagnetic analogue of Helmholtz resonator,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1977, Volume 234, Number 1, 53–56

https://www.mathnet.ru/eng/dan40967

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 9, 2025, 17:39:10

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 234, № 1

УДК 533.951 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

А. И. НОСИЧ, В. П. ШЕСТОПАЛОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ АНАЛОГ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 28 I 1977)

В акустике хорошо известно, что для жесткой сферы с малым отверстием в длинноволновой области существует резонансная частота [1–3], на которой амплитуда колебаний внутри полости, а также полный и обратный поперечники рассеяния резко возрастают. В таком режиме рассеяния сфера с отверстием называется резонатором Гельмгольца [1].

Аналог резонатора Гельмгольца можно осуществить и в электродинамике, например, в виде металлического цилиндра с продольной щелью.

В данном сообщении строгим методом [4, 5] показано, что при дифракции плоской H-поляризованной электромагнитной волны на круговом цилиндре со щелью поперечники рассеяния для определенных значений частоты в длинноволновой области ведут себя так же, как и в случае обычного резонатора Гельмгольца [3].

Пусть плоская волна падает на цилиндр радиуса a с бесконечной продольной щелью углового размера 2θ, ориентированной в направлении φ_0 (рис. 1). Рассеянное цилиндром поле, которое должно удовлетворять уравнению Гельмгольца, граничным условиям Неймана, условиям излучения и конечности энергии в любом объеме пространства, можно представить в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности цилиндра с плотностью тока $\mu(\varphi)$:

$$H_z(r,\varphi)=\frac{i}{4}\int\limits_L \mu(\varphi_s)\frac{\partial}{\partial\nu}H_0^{(1)}(k|p-p_s|)\,dl_s, \qquad (1)$$

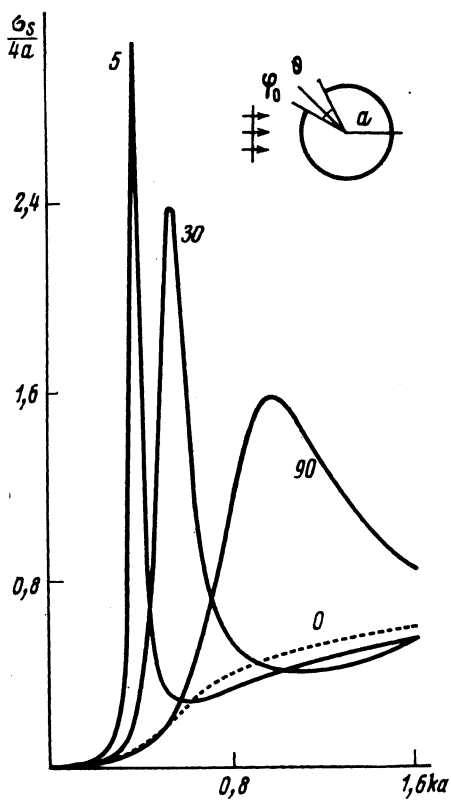

Рис. 1. Зависимость полного поперечника рассеяния цилиндра со щелью от частоты. $\varphi_0=180°$. Числа у кривых — значения θ в градусах

где $k=\omega/c$; $p=\{r,\ \varphi\}$, $p_s=\{a,\ \varphi_s\}\in L$, L — контур поперечного сечения цилиндра; dl_s — элемент дуги контура L; ν — нормаль к контуру; $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля 1-го рода.

Пользуясь разложением функции $\mu(\varphi)$ в ряд Фурье и подчиняя поле (1) граничным условиям, приходим к системе парных сумматорных функциональных уравнений первого рода с ядром в виде тригонометрических

функций относительно фурье-коэффициентов плотности тока μ_m

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m J_m'(ka) H_m^{(1)\prime}(ka) e^{im\varphi} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m'(ka) e^{im\varphi}, \quad \theta<|\varphi-\varphi_0|<\pi,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m e^{im\varphi}=0, \quad |\varphi-\varphi_0|<\theta. \tag{2}$$

Как известно, функциональные уравнения первого рода вида (2) мало пригодны для аналитического или численного отыскания неизвестных μ_m. Однако уравнения (2) можно регуляризовать. Для этого необходимо линейный оператор, определяемый левыми частями уравнений (2), разделить на главную и вполне непрерывную части, а затем обратить главную часть с помощью строгого метода задачи сопряжения ([4]). Это приводит к эквивалентной (2) бесконечной системе линейных алгебраических уравнений 2-го рода

$$\mu_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn}\mu_n + B_m, \quad m=0, \pm 1, \ldots, \tag{3}$$

где

$$A_{m0}=i\pi(ka)^2 J_0'(ka) H_0^{(1)\prime}(ka) T_{m0}, \quad A_{mn}=|n|\delta_n T_{mn};$$

$$B_m=-i\pi(ka)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n'(ka) T_{mn}; \quad \delta_n=1+\frac{i\pi(ka)^2}{|n|} J_n'(ka) H_n^{(1)\prime}(ka);$$

$$T_{mn}=(-1)^{m+n} e^{i(n-m)\varphi_0} \begin{cases} -W_n(-u), & m=0, \\ \dfrac{1}{m} V_{m-1}^{n-1}(-u), & m\neq 0, \end{cases}$$

а функции $W_n(-u)$, $V_{m-1}^{n-1}(-u)$ определены в ([4]), причем $u=\cos\theta$.

Матричный оператор системы (3) является фредгольмовым ([4]), поэтому при произвольных параметрах задачи коэффициенты μ_m можно искать методом редукции, без дополнительного обоснования последнего.

Кроме того, в интересующей нас области $ka \ll 1$ система (2) разрешима методом последовательных приближений, что вытекает из оценки канонической нормы ее матрицы

$$q=\max_{m\neq 0} \sum_{n\neq 0} |A_{mn}| < C(ka)^2[(1-u)+\sqrt{1-u^2}].$$

Считая $q<1$, в нулевом приближении для фурье-коэффициентов функции $\mu(\varphi)$ получим

$$\mu_m=(-1)^m e^{-im\varphi_0} \frac{(ka)^2}{m} V_{m-1}^{-1}(-u)\mu_0[1+O(ka)],$$

$$\mu_0=\frac{-i\pi(ka)^2(ka+i\cos\varphi_0 \ln^{-1}\sin{}^1/_2\theta)}{\ln^{-1}\sin{}^1/_2\theta+2(ka)^2+i\cdot{}^1/_2\pi(ka)^4}[1+O(ka)]. \tag{4}$$

Вычисление плотности поверхностного тока $\mu(\varphi)$ с использованием результатов анализа свободных колебаний в цилиндре со щелью ([6]) показывает, что в области $ka \ll 1$, $|\ln^{-1}\theta| \ll 1$

$$\mu(\varphi)=\frac{2(ka)^2}{i\pi a}\left\{\mu_0+i\frac{\pi}{2}ka+O[(ka)^2]\right\}S(\varphi-\varphi_0), \tag{5}$$

где

$$S(\varphi)=\begin{cases} 0, & |\varphi|<\theta, \\ \ln\dfrac{\sin{}^1/_2|\varphi|+\left[\dfrac{(\cos\theta-\cos\varphi)}{2}\right]^{1/2}}{\sin{}^1/_2\theta}, & \theta<|\varphi|<\pi. \end{cases}$$

Ток (5), наводимый на цилиндре со щелью плоской волной, мал на всех частотах, кроме резонансной

$$k_0a=(-\ln\sin{}^1/_2\theta)^{-1/2}+O(\ln^{-3/2}\sin{}^1/_2\theta), \tag{6}$$

на которой он возрастает до величины порядка $O[(k_0a)^{-1}]$, $k_0a\ll 1$. Это приводит к резкому возрастанию определяемых им энергетических характеристик рассеиваемого поля — полного σ_s и обратного σ_b поперечников рассеяния, определяемых выражениями

$$\sigma_s=\frac{4}{k}\operatorname{Re}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mu_m i^m J_m'(ka),\quad \sigma_b=\frac{4}{k}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mu_m(-i)^m J_m'(ka)\right|^2. \tag{7}$$

Частотные зависимости полного поперечника рассеяния, рассчитанные решением системы (3) на ЭВМ методом редукции, показаны на рис. 1. Они имеют четко выраженный резонансный характер. При этом из (4), (7) вытекает, что на резонансной частоте (6)

$$\sigma_b\simeq\sigma_s=\frac{4}{k_0}\{1+O[(k_0a)^2]\}. \tag{8}$$

Таким образом, достаточно на металлическом цилиндре малых по сравнению с длиной волны поперечных размеров прорезать щель резонансной ширины (в соответствии с (6)), чтобы его эффективные электродинамические размеры значительно возросли. Например, при ширине щели в $2\theta=10°$ в резонансе от цилиндра со щелью отражается по направлению к источнику в 30 раз большая энергия, чем от сплошного цилиндра тех же размеров. Иначе говоря, если сплошной цилиндр практически «невидим» в этом диапазоне длин волн, то цилиндр такого же диаметра, но со щелью, является очень существенным препятствием для H-поляризованного электромагнитного поля.

Отметим, что, согласно (5), (6), резонансная частота сильно зависит от ширины щели θ и стремится к нулю при $\theta\to 0$, но мало зависит от угла ориентации щели φ_0. Слабо зависят от φ_0 и максимальные значения поперечников рассеяния при резонансе (8). (Эта зависимость входит в член, пропорциональный $O[(k_0a)^2]$.) Перечисленные особенности объясняются, очевидно, длинноволновым характером рассматриваемого явления. По той же причине рассеяние падающего поля происходит почти изотропно. Что же касается поля в ближней зоне и внутри цилиндра, то в резонансе оно имеет вид, показанный на рис. 2. Электрическое поле (параллельное линиям H_z=const) оказывается сосредоточенным на щели, а магнитное поле максимально внутри цилиндра подобно тому, как в акустическом резонаторе Гельмгольца на отверстии максимальна кинетическая энергия звуковых колебаний, а в полости — потенциальная энергия сжатия. В самом деле, можно показать, что в данном случае единственная отличная от нуля компонента магнитного поля H_z играет роль потенциальной функции для электрического поля. Кроме того, поля имеют относительный сдвиг по фазе на $\pi/2$.

Тот факт, что в резонансе электрическое и магнитное поля последовательно сосредоточиваются в различных и ограниченных областях, позволет рассматривать цилиндр со щелью в виде высокодобротного контура

с сосредоточенными параметрами. Роль емкости при этом играют края щели, а индуктивности — стенки цилиндра.

Анализ линий равной фазы и линий среднего за период потока энергии вблизи цилиндра со щелью (рис. 3) показывает, что на резонансной частоте фазовый фронт падающей волны сильно искажается, появляются узлы фаз, в окрестности которых происходит циркуляция энергии по

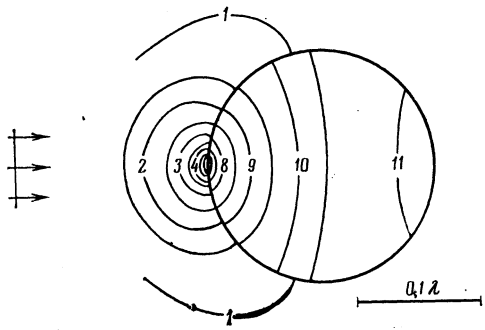

Рис. 2

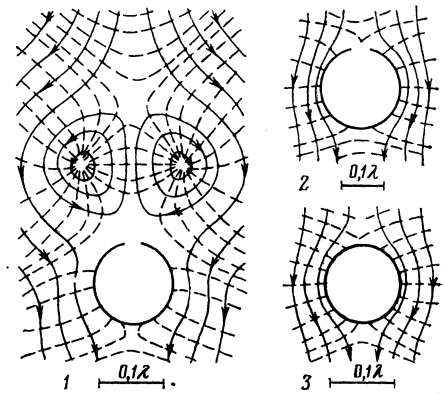

Рис. 3

Рис. 2. Структура резонансного поля. Линии H_z=const при $\varphi_0=180°$, $\theta=5°$, $ka=0{,}375$

Рис. 3. Линии равных фаз (штриховые) и линии среднего потока энергии вблизи цилиндра со щелью в резонансном и нерезонансном случае. *1* — $ka=0{,}375$, $\theta=5°$; *2* — $ka=0{,}6$, $\theta=5°$; *3* — $ka=0{,}375$, $\theta=0$

замкнутым траекториям. Средний за период приток энергии внутрь цилиндра равен нулю, так как в режиме стационарных колебаний энергия лишь последовательно запасается то в виде электрического поля около щели, то в виде магнитного поля внутри цилиндра.

Рассматриваемое явление отчетливо различимо даже для очень широких щелей (рис. 1); при этом, однако, оно теряет длинноволновый характер. Например, при $\theta=90°$, $k_0a\simeq1$, резонансное рассеяние можно объяснить тем, что на длине дуги поперечного сечения полуцилиндра укладывается примерно половина длины падающей волны.

В заключение заметим, что описанный резонансный режим цилиндра со щелью тем более интересен, что для классической структуры в виде сферы с отверстием электродинамического аналога резонанса Гельмгольца не существует. Это является следствием векторной природы электромагнитных колебаний.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
19 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Helmholtz*, Crelle, v. 57, 1 (1860). [2] *Lord Rayleigh*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 92, 265 (1915). [3] *J. W. Miles*. J. Acoust. Soc. Am., v. 50, 3 (Part 2), 892 (1971). [4] *В. П. Шестопалов*, Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения радиоволн, Харьков, изд. ХГУ, 1971. [5] *В. Н. Кошпарёнок, Г. Г. Половников, В. П. Шестопалов*, ЖТФ, т. 42, 10, 2039 (1972). [6] *Э. И. Велиев, А. И. Носич, В. П. Шестопалов*, Докл. АН УССР, сер. А, 10, 928 (1976).