М. Г. Григорян, О безусловной и абсолютной сходимости рядов Хаара в метрике $L^p[0,1], 0<p<1$, *Сиб. матем. журн.*, 2021, том 62, номер 4, 747–757

DOI: 10.33048/smzh.2021.62.404

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2021. Том 62, № 4

УДК 517.51

О БЕЗУСЛОВНОЙ И АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ХААРА В МЕТРИКЕ $L^p[0,1], 0 < p < 1$

М. Г. Григорян

Аннотация. Доказано, что существует универсальный ряд Хаара вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$ с $a_k \searrow 0$ со свойством: для любого $0 < p < 1$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1)$ можно найти последовательность чисел $\{\delta_k : \delta_k = 1$ или $0,\ k = 0, 1, 2, \dots\}$, для которой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k h_k(x)$ абсолютно сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.404

Ключевые слова: система Хаара, безусловная и абсолютная сходимости, пространства $L^p[0,1), 0 < p < 1$.

§ 1. Введение

Пусть $E \subseteq [0,1)$ — измеримое множество, $L^p(E)$ — класс всех определенных на E измеримых функций $f(x)$ таких, что $\int\limits_E |f(x)|^p\,dx < \infty$, $p \in (0,\infty)$. Меру Лебега измеримого множества E обозначим через $|E|$.

Определение 1. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ($f_n \in L^p[0,1]$, $p \in (0,\infty)$, $n = 1, 2, \dots$.) называется *безусловно сходящимся к* $f(x)$ в метрике $L^p[0,1]$, $p \in (0,\infty)$, если для любой перестановки $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1]$ т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} f_{\sigma(k)}(x) - f(x) \right|^p dx = 0.$$

Определение 2. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ($f_n \in L^p[0,1)$, $p \in [0,\infty]$, $n = 1, 2, \dots$.) называется *абсолютно сходящимся к* $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$, $p \in (0,\infty)$, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$ и

$$\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right)^p dx < \infty.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 21T–1A303.

Заменив сходимость (в определениях 1 и 2) в метрике $L^p[0,1)$ сходимостью почти всюду, получаем определения безусловной и абсолютной сходимостей почти всюду.

Пусть $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — нормированная система Хаара [1] в $L^2[0,1)$. Система Хаара является одной из популярных систем функций, ее изучению посвящено много работ. Одно из главных свойств этой системы состоит в том, что она образует ортогональный базис в пространстве $L^1[0,1)$ и безусловный базис в пространствах $L^p[0,1)$, $1<p<\infty$.

В [2] доказано, что безусловная и абсолютная сходимости почти всюду рядов по системе Хаара (рядов Хаара $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$) эквивалентны. Точнее, верна

Теорема. *Для безусловной сходимости почти всюду на множестве* $E\subset[0,1)$ *с мерой* $|E|>0$ *ряда Хаара* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на множестве* E *была конечна сумма* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k h_k(x)|<\infty$.

Заметим, что картина совсем иная в случае сходимости в метрике $L^p[0,1)$, $p\in(0,2]$. В самом деле, нетрудно видеть, что ряд Фурье функции

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)h_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^k}\frac{1}{k2^{\frac{k}{2}}}h_{2^k+m}(x)\in L^2[0,1) \tag{1.1}$$

по системе Хаара сходится безусловно во всех метриках $L^p[0,1)$, $p\in(0,2]$, однако

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}|c_n(f)h_n(x)|\right)^p dx=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)^p=\infty \quad \forall p\in(0,2],$$

где $c_k(f):=\int\limits_0^1 f(t)h_k(t)\,dt$ — коэффициенты Фурье функции f по системе Хаара.

Отметим также, что в [3] доказано, что для любой измеримой почти всюду конечной на $[0,1)$ функции $f(x)$ существует ряд Хаара $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$, безусловно сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[0,1)$.

Естественны следующие вопросы.

Вопрос 1. *Существует ли такое измеримое множество* E *положительной меры, что можно представить функции из* $L^1(E)$ *в виде суммы рядов Хаара, безусловно сходящихся в метрике* $L^1(E)$*?*

Вопрос 2. *Можно ли представить функции из* $L^p[0,1)$, $0<p<1$, *в виде суммы рядов Хаара, безусловно сходящихся в метрике* $L^p[0,1)$*?*

Автору неизвестен ответ на вопрос 1 и в [4] удалось построить измеримое множество положительной меры E и для каждой функции $f(x)$ из $L^1(E)$ найти ряд Хаара, который безусловно сходится к $f(x)$ как в метрике $L^p(E)$, $0<p<1$, так и почти всюду на E. В данной работе доказано, что вопрос 2 имеет положительный ответ. Более того, верна

Теорема 1. *Для любого $0 < p < 1$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1)$ можно найти ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$, безусловно сходящийся к $f(x)$ в метрике$L^p[0,1)$, и для любой перестановки $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел*

$$\int\limits_0^1 \left|\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} h_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx \le \frac{2^{2-p}}{2^{1-p}-1} \int\limits_0^1 |f(x)|^p \, dx \quad \forall n = 1, 2, \dots .$$

Теорема 1 следует из следующего, более сильного утверждения.

Теорема 2. *Существует универсальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x)$ по системе Хаара вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x), \tag{1.2}$$

обладающий следующими свойствами:

1) $0 < a_{k+1} \le a_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ $(a_k \searrow 0)$;

2) *для любого $0 < p < 1$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1]$ можно найти последовательность чисел $\{\delta_k : \delta_k$ равно 1 или 0, $k = 0, 1, 2, \dots\}$, для которой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k h_k(x)$ абсолютно сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$, более того,*

$$\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k |h_k(x)|\right)^p dx \le \frac{2^{2-p}}{2^{1-p}-1} \int\limits_0^1 |f(x)|^p \, dx.$$

Из этой теоремы следует

Теорема 3. *Для любого $0 < p < 1$ и для каждой функции $f \in L^p[0,1)$ можно найти ряд Хаара $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h_{n_k}(x)$ с $a_k \searrow 0$, абсолютно сходящийся к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1]$ и почти всюду на $[0,1)$.*

Замечание 1. Теорема 3 неверна при $p = 1$.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что теорема 3 неверна для тригонометрической системы.

В связи с этим возникают следующие вопросы, ответы на которые нам не известны.

Вопрос 3. *Верна ли теорема 1 для тригонометрической системы и для системы Уолша?*

Вопрос 4. *Возможно ли в качестве ряда (1.2) выбрать ряд Фурье по системе Хаара некоторой функции $g \in L^1(T)$?*

В связи с вопросом 4 отметим, что в [5–11] получены некоторые результаты, связанные с существованием функций, ряды Фурье которых по тригонометрической системе и по системе Уолша универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах. В частности, построена универсальная функция $U \in L^1[0,1)$ со сходящимся по $L^1[0,1)$-норме рядом Фурье — Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, соответственно функция $g \in L^1[0,1)$ такая, что для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1)$, $p \in (0,1)$, можно найти последовательность знаков $\{\beta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ (соответственно $\{\varepsilon_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$), для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k c_k(U)\varphi_k(x)$ (соответственно ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon_k d_n(g)e^{2\pi nix}$) сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^p[0,1)$. Здесь $c_k(U)$ — коэффициенты Фурье по системе Уолша функции $U\in L^1[0,1)$, $d_n(g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 g(x)e^{-2\pi nix}\,dx$ — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi nix}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ функции $g\in L^1[0,1]$.

Возникает естественный

Вопрос 5. *Можно ли построить аналогичную универсальную функцию $U\in L^1[0,1)$ для системы Хаара?*

§ 2. Доказательство основных лемм

Напомним определение нормированной системы Хаара $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, в $L^2[0,1)$ (см. [1]). Система функций Хаара $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется на $\Delta_0^{(0)}=[0,1)$ следующим образом:

$$h_0(x)=h_0^{(0)}(x)=\chi_{[0,1)} \text{ для } x\in[0,1),$$

$$h_1(x)=h_0^{(1)}(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in[0,1/2),\\ -1 & \text{при } x\in[1/2,1),\end{cases}$$

где $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E, и при $n\geq 2$, $n=2^k+i$, $0<i\leq 2^k$, $k=1,2,\dots$,

$$h_n(x)=h_k^{(i)}(x)=\begin{cases}2^{\frac{k}{2}} & \text{при } x\in\left[\frac{i-1}{2^k},\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right),\\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{при } x\in\left[\frac{2i-1}{2^{k+1}},\frac{i}{2^k}\right),\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases} \tag{2.1}$$

Разобьем отрезок $[0,1)$ на 2^k равных частей: $\Delta_k^{(j)}=\left[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k}\right)$, $1\leq i\leq 2^k$, которые будем называть *двоичными отрезками* (*полуотрезками*).

Лемма 1. *Пусть даны числа $\gamma\neq 0$, $N_0>1$, $q>2$, $\delta\in(0,1)$ и двоичный отрезок $\Delta=\left[\frac{i-1}{2^\nu},\frac{i}{2^\nu}\right)$, $i\in[1,2^\nu]$. Тогда существует полином по системе Хаара вида*

$$Q(x)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k h_k(x)$$

такой, что

(1) $0\leq a_k<\delta$ и ненулевые коэффициенты в $\{a_k\}_{k=N_0}^{N}$ расположены в убывающем порядке,

(2) $\sum\limits_{k=N_0}^{N}a_k|h_k(x)|=0$ $\forall x\in[0,1]\setminus\Delta$,

(3) $\int\limits_\Delta|Q(x)-\gamma\chi_\Delta(x)|^p\,dx=\frac{|\gamma|^p|\Delta|}{2^{(1-p)q}}$ $\forall p\in(0,1)$;

(4) $\int\limits_\Delta\left(\sum\limits_{k=N_0}^{N}a_k|h_k(x)|\right)^p dx<\frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1}|\gamma|^p|\Delta|$ $\forall p\in(0,1)$.

Доказательство. Пусть $\{l_i\}$ — подпоследовательность натуральных чисел с

$$l_1\geq 2\log_2\frac{|\gamma|}{\delta}+1,\quad l_{i+1}-l_i>2\quad\forall i\in N. \tag{2.2}$$

Положим

$$Q_1(x) = 2^{-\frac{l_1}{2}}|\gamma| \sum_{s;(\Delta_{l_1}^{(s)} \subset \Delta)} h_{l_1}^{(s)}(x) \quad (\Delta_{l_1}^{(s)} \subset \Delta = E_0). \tag{2.3}$$

Полином Q_1 на интервале Δ принимает значения γ и $-\gamma$ (см. (2.1)). Через E_1 обозначим множество, на котором Q_1 равняется $-\gamma$. По индукции определим полиномы $Q_2, Q_3, \ldots, Q_q$ и множества $E_2, E_3, \ldots, E_q$ следующим образом:

$$Q_{i+1} = 2^{i-\frac{l_{i+1}}{2}}|\gamma| \sum_{s;(\Delta_{l_{i+1}}^{(s)} \subset E_i)} h_{l_{i+1}}^{(s)}(x) \quad (\Delta_{l_{i+1}}^{(s)} \subset E_i), \tag{2.4}$$

$$E_{i+1} = \{x \in E_i : Q_{i+1}(x) = -2^i\gamma\} \tag{2.5}$$

(здесь суммирование ведется по всем s, для которых $\Delta_{l_{i+1}}^{(s)} \subset E_i$). Нетрудно видеть, что

$$|Q_{i+1}(x)| = 2^{i-\frac{l_{i+1}}{2}}|\gamma| \sum_{s;(\Delta_{l_{i+1}}^{(s)} \subset E_i)} \left|h_{l_{1+i}}^{(s)}(x)\right| = \begin{cases} 2^i|\gamma|, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$|E_1| = \frac{|\Delta|}{2} \quad \text{и} \quad |E_{i+1}| = \frac{|E_i|}{2} \quad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, q-1 \tag{2.7}$$

и

$$\Delta = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \cdots \supset E_q. \tag{2.8}$$

Определим полином Q следующим образом:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{q} Q_i(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k h_k(x) \quad (\text{см. } (2.3), (2.4)), \tag{2.9}$$

где

$$a_k = \int_0^1 Q(x) h_k(x)\, dx.$$

Из (2.2) вытекает, что

$$2^{i-\frac{l_{i+1}}{2}}|\gamma| < 2^{i-1-\frac{l_i}{2}}|\gamma| < 2^{-\frac{l_1}{2}}|\gamma| < \delta.$$

Отсюда ввиду того, что для каждого i все ненулевые коэффициенты полинома $Q_i(x)$ равны $2^{i-1-\frac{l_i}{2}}|\gamma|$ (см. (2.1) и (2.3)–(2.5)), в силу (2.9) все ненулевые числа в $\{a_k\}_{k=N_0}^{N}$ расположены в убывающем порядке.

Из (2.1), (2.3)–(2.6) и (2.9) следует, что

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{на } \Delta \setminus E_q, \\ -(2^q - 1)\gamma & \text{на } E_q, \\ 0 & \text{вне } \Delta. \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_k |h_k(x)| = 0, \quad x \in [0,1] \setminus \Delta.$$

В силу (2.7) и (2.10) для всех $p \in (0,1)$ получим

$$\int_0^1 |Q(x) - \gamma\chi_\Delta(x)|^p\, dx = \frac{|\gamma|^p|\Delta|}{2^{(1-p)q}}.$$

Учитывая соотношения (2.4)–(2.8), имеем

$$\sum_{i=1}^{s}|Q_i(x)| = 2^s \quad \forall x\in E_s,\ s=1,2,\dots,q,$$

$$\sum_{i=s+1}^{q}|Q_i(x)| = 0 \quad \forall x\in E_s,\ s=1,2,\dots,q-1.$$

Отсюда для всех $p\in(0,1)$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta}\left(\sum_{k=N_0}^{N}a_k|h_k(x)|\right)^p dx &= \sum_{s=0}^{q-1}\int\limits_{E_s\setminus E_{s+1}}\left(\sum_{i=1}^{q}|Q_i(x)|\right)^p dx+\int\limits_{E_q}\left(\sum_{i=1}^{q}|Q_i(x)|\right)^p dx\\ &= \sum_{s=0}^{q-1}\int\limits_{E_s\setminus E_{s+1}}\left(\sum_{i=1}^{s}|Q_i(x)|\right)^p dx+\int\limits_{E_q}\left(\sum_{i=1}^{q}|Q_i(x)|\right)^p dx\\ &\le |\gamma|^p\sum_{s=0}^{q-1}2^{sp}\frac{|\Delta|}{2^s}+|\gamma|^p2^{sp}\frac{|\Delta|}{2^s}<\frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1}|\gamma|^p|\Delta|.\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть даны числа $k_0\in\mathbb{N}$, $0<\varepsilon$, $\delta<1$, $p_1,p_2\in(0,1)$ и полином $f(x)$ по системе Хаара. Тогда можно найти полином по системе Хаара вида*

$$Q(x)=\sum_{k=k_0+1}^{\overline{k}}a_kh_{n_k}(x),\quad n_k\nearrow,$$

удовлетворяющий условиям

(1) $\delta>a_k\ge a_{k+1}>0 \quad \forall k\in(k_0;\overline{k}]$,

(2) $\int_0^1|Q(x)-f(x)|^p\,dx\le\varepsilon \quad \forall p\in(p_1,p_2)$,

(3) $\int_0^1\left(\sum_{k=k_0+1}^{\overline{k}}a_k|h_{n_k}(x)|\,dx\right)^p dx\le\frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1}\int_0^1(|f(x)|)^p\,dx \quad \forall p\in(0,1)$.

Доказательство. Пусть

$$f(x)=\sum_{j=0}^{j_0}b_jh_j(x)=\sum_{\nu=1}^{\mu_0}\gamma_\nu\chi_{\Delta'_\nu}(x), \tag{2.11}$$

где

$$\Delta'_\nu=\left[\frac{i-1}{2^{\mu_0}},\frac{i}{2^{\mu_0}}\right),\ i\in[1;2^{\mu_0}],\quad [0,1)=\bigcup_{\nu=1}^{\mu_0}\Delta'_\nu.$$

Положим

$$q=\left[\frac{1}{1-p_2}\log_2(\varepsilon^{-1}\left(\left(\int_0^1|f(x)|\,dx\right)^{p_1}+\left(\int_0^1|f(x)|\,dx\right)^{p_2}\right)\right]+1 \tag{2.12}$$

(здесь $[\tau]$ — целая часть числа τ). Последовательным применением леммы 1 можно определить полиномы $\{Q_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\mu_0}$ вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} h_k(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu_0,\ m_0 = k_0 + 1, \tag{2.13}$$

которые для всех $\nu \in 1 \le \nu \le \mu_0$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| = 0, \quad x \notin \Delta_\nu^{/}, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \delta > a_{m_{\nu-2}}^{(\nu-1)} \ge \cdots \ge a_k^{(\nu-1)} \ge a_{k+1}^{(\nu-1)} \ge a_{m_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)} \\ > a_{m_{\nu-1}}^{(\nu)} \cdots \ge a_k^{(\nu)} \ge a_{k+1}^{(\nu)} \ge \cdots \ge a_{m_\nu-1}^{(\nu)} > 0, \quad 1 \le \nu \le \mu_0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x) - \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu^{/}}(x)|^p \, dx = \frac{|\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu^{/}|}{2^{(1-p)q}} \quad \forall p \in (0,1), \tag{2.16}$$

$$\int_{\Delta_\nu^{/}} \left(\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx \le \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} |\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu^{/}| \quad \forall p \in (0,1). \tag{2.17}$$

Положим

$$a_k = a_k^{(\nu)}, \quad k \in [m_{\nu-1}, m_\nu),\ 1 \le \nu \le \mu_0\ (\overline{k} = m_{\mu_0} - 1), \tag{2.18}$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} Q_\nu(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\overline{k}} a_k h_{n_k}(x) \quad (\overline{k} = m_{\mu_0} - 1). \tag{2.19}$$

Ясно (см. (2.15), (2.18)), что

$$\delta > a_k \ge a_{k+1} > 0, \quad k \in (k_0, \overline{k}].$$

Ввиду того, что для всех $p \in (p_1, p_2) \subset (0,1)$

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \le \left(\int_0^1 |f(x)| \, dx \right)^p \le \left(\int_0^1 |f(x)| \, dx \right)^{p_1} + \left(\int_0^1 |f(x)| \, dx \right)^{p_2}, \tag{2.20}$$

на основе (2.11)–(2.14), (2.16), (2.19) и (2.20) заключаем, что для всех $p \in (p_1, p_2)$ имеет место

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Q(x) - f(x)|^p \, dx &= \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^1 |Q_\nu(x) - \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu^{/}}(x)|^p \, dx = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \frac{|\gamma_\nu|^p |\Delta_\nu^{/}|}{2^{(1-p)q}} \\ &= \frac{1}{2^{(1-p)q}} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \le \frac{1}{2^{(1-p_2)q}} \left(\left(\int_0^1 |f(x)| \, dx \right)^{p_1} + \left(\int_0^1 |f(x)| \, dx \right)^{p_2} \right) \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.11), (2.14), (2.17) и (2.18), для всех $p \in (0,1)$ получаем

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=k_0+1}^{\overline{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \right)^p dx$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \int_{\Delta'_\nu} \left(\sum_{k=k_0+1}^{\overline{k}} a_k |h_{n_k}(x)| \right)^p dx = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \int_{\Delta'_\nu} \left(\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu - 1} a_k^{(\nu)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx$$
$$\leq \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \sum_{\nu=1}^{\mu_0} |\gamma_\nu|^p |\Delta'_\nu| = \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \int_0^1 (|f(x)|)^p \, dx.$$

Лемма 2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Обозначим через
$$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \tag{3.1}$$
последовательность всех полиномов по системе Хаара с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя лемму 2, можно найти последовательности полиномов
$$Q_j(x) = \sum_{k=N_j}^{M_j} a_{n_k}^{(j)} h_{n_k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$
которые для всех $j \geq 1$ удовлетворяют условиям
$$0 < a_{n_{k+1}}^{(j+1)} \leq a_{n_k}^{(j+1)} \leq a_{n_{i+1}}^{(j)} \leq a_{n_i}^{(j)} \leq \frac{1}{2+j},\ i \in (N_j,, M_j],\ k \in (N_{j+1},, M_{j+1}], \tag{3.3}$$
$$N_1 = 1, \quad N_{j+1} = M_j + 1,\ j = 1, 2, \dots, \tag{3.4}$$
$$\int_0^1 |Q_j(x) - f_j(x)|^p \, dx < 2^{-4j-1} \quad \forall p \in (2^{-j}, 1 - 2^{-j}), \tag{3.5}$$
$$\int_0^1 \left(\sum_{k=N_j}^{M_j} a_{n_k}^{(j)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \int_0^1 |f_j(x)|^p \, dx. \tag{3.6}$$

Рассмотрим ряд
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i(x), \tag{3.7}$$
где
$$a_i = a_{n_k}^{(j)} \quad \forall i \in [n_k, n_{k+1}),\ j = 1, 2, \dots. \tag{3.8}$$

Покажем, что ряд (3.7) удовлетворяет условиям теоремы 2. Из (3.3) и (3.8) вытекает, что $a_i \searrow 0$ $(a_i > 0,\ i = 1, 2, \dots)$. Пусть $p \in (0,1)$ и $f(x) \in L^p[0,1)$. Ясно, что $p \in \left(\frac{1}{j_0}, 1 - \frac{1}{j_0}\right)$ для некоторого $j_0 > 1$. Положим
$$\beta = 2^{-2} \min \left\{ 1, \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right\}. \tag{3.9}$$

Выберем функцию $f_{\nu_1}(x)$ $(\nu_1 > 2j_0 \ + \log_2 \beta)$ из последовательности (3.1) так, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)|^p \, dx < 2^{-2}\beta. \qquad (3.10).$$

Из (3.5), (3.6), (3.9), и (3.10) следует, что

$$\int_0^1 |f(x) - Q_{\nu_1}(x)|^p \, dx < 2^{-4\nu_1+1} + 2^{-4}\beta \le 2^{-4},$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=N_{\nu_1}}^{M_{\nu_1}} a_{n_k}^{(\nu_1)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \int_0^1 |f_{\nu_1}(x)|^p \, dx$$

$$\le \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \left(\frac{3}{2} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right). \qquad (3.11)$$

Предположим, что уже определены числа $j_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots \nu_{q-1}$ и выбраны полиномы $Q_{\nu_1}(x), \dots, Q_{\nu_{q-1}}(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 |f(x) - \sum_{n=1}^{s} Q_{\nu_n}(x)|^p \, dx < 2^{-4s}\beta \quad \forall s \in [1, q-1], \qquad (3.12)$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=N_{\nu_s}}^{M_{\nu_s}} a_{n_k}^{(\nu_s)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx \le \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} 2^{-2n}\beta \quad \forall s \in [2, q-1].$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) таким образом, что

$$\nu_q \ge \nu_{q-1} + \log_{\frac{1}{2}}(2^{-4(q+1)}\beta), \qquad (3.13)$$

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} Q_{\nu_j}(x) - f_{\nu_q}(x) \right|^p dx < 2^{-4(q+2)}\beta. \qquad (3.14)$$

Отсюда с учетом (3.12) получаем

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p \, dx < 2^{-4(q+2)}\beta + 2^{-4q}\beta \le 2^{-2q}\beta. \qquad (3.15)$$

В силу (3.4), (3.6) и (3.12)–(3.15) имеем

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=1}^{q} Q_{\nu_j}(x) \right|^p dx < 2^{-4(q+2)}\beta + 2^{-4\nu_q} < 4^{-4(q+1)}\beta, \qquad (3.16)$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=N_{\nu_q}}^{M_{\nu_q}} a_{n_k}^{(\nu_q)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx < \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} 2^{-2q}\beta. \qquad (3.17)$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m a_m h_m(x), \tag{3.18}$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n_k, \text{ где } m = \bigcup_{q=1}^{\infty} [N_{\nu_q}, , M_{\nu_q}], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3.19}$$

сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(0,1)$.

Из (3.9), (3.11), (3.17) и (3.19) для всех $N \in [N_{\nu_q}, , M_{\nu_q}]$ следует, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{m=0}^{N} \delta_m a_m h_m(x) - f(x) \right|^p dx \le \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} Q_{\nu_j}(x) \right|^p dx$$
$$+ \int_0^1 \left(\sum_{k=N_{\nu_q}}^{M_{\nu_q}} a_{n_k}^{(\nu_q)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx < 2^{-2q}\,\beta + \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} 2^{-2q}\beta.$$

Отсюда и из того, что $q \to \infty$ при $N \to \infty$, вытекает, что ряд (3.18) сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(0,1)$.

Учитывая соотношения (3.9), (3.11), (3.17) и (3.19), для всех $p \in (0,1)$ получаем

$$\int_0^1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m a_m |h_m(x)| \right)^p dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=N_{\nu_1}}^{M_{\nu_1}} a_{n_k}^{(\nu_1)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx$$
$$+ \sum_{q=2}^{\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=N_{\nu_q}}^{M_{\nu_q}} a_{n_k}^{(\nu_q)} |h_{n_k}(x)| \right)^p dx \le \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} \left(\frac{3}{2} \int_0^1 |f(x)|^p\,dx \right)$$
$$+ \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2^{1-p}}{2^{1-p}-1} 2^{-2q}\beta \le \frac{2^{2-p}}{2^{1-p}-1} \int_0^1 |f(x)|^p\,dx.$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haar A.* Zür Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Bd 69. S. 331–371.
2. *Никишин Е. М., Ульянов П. Л.* Об абсолютной и безусловной сходимости // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, № 3. С. 240–242.
3. *Арутюнян Ф. Г.* О рядах по системе Хаара // Докл. АН АрмССР. 1966. Т. 42. С. 134–140.
4. *Grigoryan M. G.* On the absolute convergence of Fourier–Haar series in the metric of $L^p(0,1)$, $0 < p < 1$ // J. Math. Sci. 2019. V. 243, N 6. P. 844–858.
5. *Sargsyan A. A, Grigoryan M. G.* Universal function for a weighted space $L^1_\mu[0,1]$ // Positivity. 2017. V. 21, N 3. P. 1425–1451.
6. *Grigoryan M. G.* On the universal and strong property related to Fourier–Walsh series // Banach J. Math. Anal. 2017. V. 11, N 3. P. 698–712.
7. *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p(0,1)$, $0 < p < 1$ // J. Funct. Anal. 2016. V. 270, N 8. P. 3111–3133.
8. *Grigoryan M. G., Galoyan L. N.* On the universal functions // J. Approx. Theory. 2018. V. 225. P. 191–208.

9. *Григорян М. Г.* Об универсальных рядах Фурье // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 2. С. 296–299.

10. *Григорян М. Г.* Функции универсальные относительно системы Уолша // Изв. НАН Арм. Математика. 2020. Т. 55, № 6. С. 51–67.

11. *Григорян М. Г.* Функции с универсальными рядами Фурье — Уолша // Мат. сб. 2020. Т. 211, № 6. С. 107–131.

Поступила в редакцию 5 ноября 2020 г.
После доработки 25 апреля 2021 г.
Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Григорян Мартин Геворгович
Ереванский государственный университет,
ул. А. Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
gmarting@ysu.am