



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Чикин, Двухслойная математическая модель ветровых течений в водоемах, имеющих большие площади мелководья,
Матем. моделирование, 2009, том 21, номер 12, 152–160

<https://www.mathnet.ru/mm2921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

20 мая 2025 г., 17:09:41



ДВУХСЛОЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВОДОЕМАХ, ИМЕЮЩИХ БОЛЬШИЕ ПЛОЩАДИ МЕЛКОВОДЬЯ

© 2009 г. А.Л. Чикин

Южный научный центр РАН, ЮГИНФО ЮФУ

С помощью двухслойной математической модели численно исследованы течения в водоемах, имеющих большие площади мелководья. Приведены результаты сравнения предлагаемой модели с моделями, основанными на уравнениях мелкой воды и на трехмерных уравнениях движения жидкости. Задача решается конечно-разностными методами.

THE TWO-LAYER MATHEMATICAL MODEL OF THE WIND CURRENTS IN THE BASIN WITH DIFFERENT LEVEL OF DEEP

A.L. Chikin

South Science Center RAS, South-Russian Regional Center of Informatization SFU

The two-layer mathematical model of currents in the basin with different level of deep is numerically studied. The results of a comparison suggested model with the models based on the shallow water equations and on the three-dimensional equations of movement of a liquid are given. The problem is solved by the finite difference methods.

Введение

Одним из основных этапов решения задач, связанных с моделированием гидрофизических процессов в водоемах, является расчет гидродинамических параметров течения. Определенный интерес представляют водоемы как с наличием обширных мелководных районов, так и областей с достаточно большой глубиной. Понятие «мелководье» не имеет четкого определения. В данной работе под мелководьем понимается район акватории водоема, глубина которого соразмерна с величиной перепада уровня воды при сгонно-нагонных явлениях.

При расчете параметров течения в мелководных водоемах используют, как правило, уравнения мелкой воды, а течения в глубоководных водоемах моделируются трехмерными уравнениями движения жидкости. Если же водоем имеет обширные мелководные районы и районы с достаточно большой глубиной, то применение уравнений мелкой воды не даст достоверной картины течений в глубоководье. В то же время, использование трехмерных уравнений во всем водоеме может потребовать, по крайней мере, по вертикали использования криволинейных сеток или предварительного преобразования исходной нерегулярной области в регулярную. Для более точного описания границы вводятся специальные координатные системы, хорошо согласуемые с границей, или строятся специальные адаптивные сетки, которые подстраиваются в процессе расчетов под область и решение.

Однако, если в одну область отнести все мелководье, а в другую всю глубоководную часть, то возможно применение и уравнений мелкой воды, и трехмерных уравнений движения жидкости без предварительного преобразования расчетной области. При этом можно использовать конечно-разностные методы с применением равномерных прямоугольных сеток, что, несомненно, упрощает решение поставленной задачи.

Постановка задачи

Исходная трехмерная область моделирования Ω – водная толща водоема – ограничена сверху экваториальной, а снизу – донной поверхностями. Для декомпозиции пространственной области моделирования Ω проведем горизонтальную секущую плоскость P , отстоящую от невозмущенной поверхности водоема P_0 на глубине, равной максимальной глубине мелководья (рис.1). Таким образом, плоскость P разделила исходную область на две подобласти: верхний слой Ω_1 (слой I) – все мелководье и верхняя часть глубоководного слоя, и глубоководный слой Ω_2 (слой II). Предполагается, что эффект осушения из-за сгона воды может присутствовать только в мелководных районах.

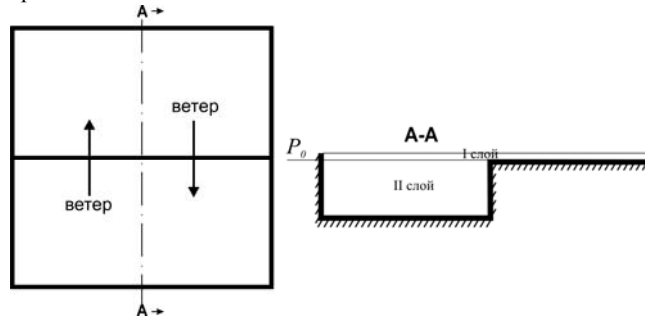


Рис.1. Схема водоема в модельной задаче.

Считается, что на движение воды в верхнем слое влияет ветер, а движение в нижнем слое инициируется как градиентами давления, так и движением верхнего слоя.

Систему координат выберем следующим образом. Плоскость XOY совместим с невозмущенной поверхностью водоема P_0 , ось OZ направим вверх. Считаем, что верхний слой достаточно мелкий (значения возможных возмущений уровня воды и глубины слоя близки), а u и v не зависят от z .

Движение воды в верхнем слое Ω_1 описывается уравнениями мелкой воды [1]:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} - \Omega v_s = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{xy} \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{sx}}{H} - \frac{\tau_{bx}}{H} + F_x(x, y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} + \Omega u_s = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v_{xy} \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{sy}}{H} - \frac{\tau_{by}}{H} + F_y(x, y), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H u_s}{\partial x} + \frac{\partial H v_s}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) $u_s = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u dz$, $v_s = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} v dz$, $H = h + \zeta$; $h = h(x, y)$ – глубина мелководного

слоя; $u_s = u_s(x, y, t)$, $v_s = v_s(x, y, t)$ – скорости в слое I; функции $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ описывают взаимодействие верхнего и нижнего слоев между собой; τ_{sx} , τ_{sy} – проекции на оси OX и OY силы трения ветра о поверхность водоема; τ_{bx} , τ_{by} – проекции на оси OX и OY силы трения жидкости о дно (или о глубоководный слой воды). Эти величины зависят от скорости ветра $\bar{W}_B = \{W_x; W_y\}$ и течения $\bar{W}_T = \{u_s; v_s\}$ и определяются так [4]:

$$\bar{\tau}_s = \gamma |\bar{W}_B| \bar{W}_B, \quad \bar{\tau}_b = \beta |\bar{W}_T| \bar{W}_T,$$

где $|\overline{W}_B| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$, $|\overline{W}_T| = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$, $\beta(x, y)$ – коэффициент трения верхнего слоя жидкости о дно (или о глубоководный слой); γ – коэффициент трения ветра о слой I.

Движение воды в нижнем слое Ω_2 описывается системой, состоящей из уравнений количества движения и уравнения неразрывности среды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \Omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

К системе уравнений (4)-(6) добавляется уравнение гидростатического давления

$$p = g\rho(\zeta - z) + p_a. \quad (7)$$

В (4)–(7) $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ – компоненты вектора скорости; x, y, z, t – пространственные переменные и время соответственно; $\zeta = \zeta(x, y, t)$ – возмущение уровня воды; $p_a = p_a(x, y)$ – атмосферное давление; Ω – коэффициент Кориолиса; v_{xy}, v_z – коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости соответственно; ρ – плотность воды; $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести.

Граничные условия задаются следующим образом:

на твердой границе $\partial\Omega_b$ ставятся условия скольжения

$$\mathbf{V}_n|_{\partial\Omega_b} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_\tau}{\partial \bar{n}}|_{\partial\Omega_b} = 0, \quad (8)$$

где \mathbf{V}_n – нормальная составляющая вектора скорости, \mathbf{V}_τ – касательная составляющая вектора скорости;

в местах втекания или вытекания воды $\partial\Omega_r$ задаются соответствующие значения скоростей

$$u|_{\partial\Omega_r} = u_1, \quad v|_{\partial\Omega_r} = v_1. \quad (9)$$

На границе между слоями $\partial\Omega_l$ ставится условие равенства скоростей

$$u|_{\partial\Omega_l} = u_s, \quad v|_{\partial\Omega_l} = v_s.$$

Функции $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ задаются следующим образом:

$$F_x(x, y) = \frac{uw}{H}|_{\partial\Omega_l}, \quad F_y(x, y) = \frac{vw}{H}|_{\partial\Omega_l}.$$

В качестве начальных данных можно задавать какое-либо известное распределение скоростей $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$ или считать эти скорости нулевыми.

Численная реализация модели

Задача решается конечно-разностными методами. Численно установлено, что при больших шагах по времени вычислительная неустойчивость всего алгоритма наблюдается при расчете гидродинамики в верхнем, мелководном, слое I. В силу взаимной зависимости перепада уровня

и компонентов скорости эта неустойчивость проявляется в увеличении перепада уровня, что приводит к увеличению скорости, которая еще больше увеличивает перепад уровня. Для ослабления этого эффекта использовались полностью неявные схемы, хотя, как показали расчеты, даже полностью неявные схемы не делают алгоритм вычисления гидродинамических параметров абсолютно устойчивым.

Все уравнения движения аппроксимировались неявными схемами. Уравнение неразрывности для мелководного слоя I аппроксимировалось следующим образом.

Учитывая, что $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial(\zeta(x, y, t) + h(x, y))}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$, при вычислении перепада уровня уравнение неразрывности записывается в недивергентной форме в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Конечно-разностная противопотоковая неявная схема для уравнения (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^n}{\tau} + \frac{u_{s,i,j}^n + |u_{s,i,j}^n|}{2} \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i-1,j}^{n+1}}{h_1} + \frac{u_{s,i,j}^n - |u_{s,i,j}^n|}{2} \frac{H_{i+1,j}^{n+1} - H_{i,j}^{n+1}}{h_1} + \\ & + \frac{v_{s,i,j}^n + |v_{s,i,j}^n|}{2} \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j-1}^{n+1}}{h_2} + \frac{v_{s,i,j}^n - |v_{s,i,j}^n|}{2} \frac{H_{i,j+1}^{n+1} - H_{i,j}^{n+1}}{h_2} + \\ & + H_{i,j}^{n+1} \frac{(\operatorname{div}^n \mathbf{U} + |\operatorname{div}^n \mathbf{U}|)_{i,j}}{2} - H_{i,j}^n \frac{(\operatorname{div}^n \mathbf{U} - |\operatorname{div}^n \mathbf{U}|)_{i,j}}{2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Учет в уравнении (11) разностного аналога выражения $H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$, который выносится на $(n+1)$ -й слой, если $\operatorname{div} \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} > 0$, и берется с n -го слоя в противном случае, делает выполнение условия неразрывности как бы «более строгим», а разнесение его по слоям усиливает диагональное преобладание в получающейся матрице системы уравнений.

Зная величину $H_{i,j}^n = \zeta_{i,j}^n + h_{i,j}$, легко найти перепад уровня $\zeta_{i,j}^n$.

Уравнение (11) перепишем в виде

$$m_{i,j-1} H_{i,j-1}^{n+1} + m_{i-1,j} H_{i-1,j}^{n+1} + m_{i,j} H_{i,j}^{n+1} + m_{i+1,j} H_{i+1,j}^{n+1} + m_{i,j+1} H_{i,j+1}^{n+1} = n_{i,j} H_{i,j}^n, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} m_{i,j-1} &= -\tau \frac{v_{i,j}^n + |v_{i,j}^n|}{2h_2} \leq 0; & m_{i-1,j} &= -\tau \frac{u_{i,j}^n + |u_{i,j}^n|}{2h_1} \leq 0; & m_{i,j} &= 1 + \tau \left(\frac{|u_{i,j}^n|}{h_1} + \frac{|v_{i,j}^n|}{h_2} + d_{i,j}^+ \right); \\ m_{i+1,j} &= \tau \frac{u_{i,j}^n - |u_{i,j}^n|}{2h_1} \leq 0; & m_{i,j+1} &= \tau \frac{v_{i,j}^n - |v_{i,j}^n|}{2h_2} \leq 0; & n_{i,j} &= 1 + \tau d_{i,j}^-. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме того, выполняются неравенства

$$d_{i,j}^+ = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_1} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_2} + \left| \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_1} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_2} \right| \geq 0, \quad (14)$$

$$d_{i,j}^- = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_1} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_2} - \left| \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_1} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_2} \right| \leq 0.$$

Уравнение (12) можно записать в операторном виде

$$M \cdot H^{n+1} = N \cdot H^n, \quad (15)$$

при этом матрицы M и N могут быть представлены как

$$M = E + \tau(P + D^+), \quad N = E + \tau D^-.$$

Матрица P содержит противопотоковые слагаемые из (11), и поэтому является М-матрицей, то есть она монотонна и имеет неположительные внедиагональные элементы [2]. Матрицы D^+ и D^- являются диагональными матрицами, содержащими только неположительные и неотрицательные значения соответственно.

Известно [3], что для устойчивости схемы (15) достаточно выполнение условия

$$\|M^{-1} \cdot N\| \leq 1.$$

Существует известная [5]

Теорема. Пусть $A = C - R$, где C невырожденная, а $B = C^{-1}R$ неотрицательная (поэлементно) матрицы. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- (a) $\rho(B) < 1$;
- (b) $I - B$ монотонна;
- (c) A невырожденная и $G = A^{-1}R \geq 0$;
- (d) A невырожденная и $\rho(B) = \rho(G) / [1 + \rho(G)]$, где $G = A^{-1}R$.

Так как матрица $E + \tau D^+$ положительная диагональная, а матрица P является М-матрицей, то усиление диагонального преобладания приводит к тому, что матрица $M = E + \tau(P + D^+) = (E + D^+) + \tau P$ также является М-матрицей [2].

Матрица $N = E + \tau D^-$ является положительной диагональной матрицей в том случае, если $1 - \tau \cdot \max_k |d_{kk}^-| > 0$. Это условие означает выполнение безусловной устойчивости неявной схемы при равенстве нулю дивергенции во всей области расчета, то есть $|d_{kk}^-| = 0$ для любого k . В этом случае τ может принимать сколь угодно большое значение. В том случае, если хотя бы одно $|d_{kk}^-| \neq 0$, получаем

$$0 < \tau < \frac{1}{\max_k |d_{kk}^-|}. \quad (16)$$

Матрица $A = M - N = \tau(P + D^+ - D^-)$ является невырожденной М-матрицей как сумма М-матрицы P и положительной диагональной матрицы $D^+ - D^-$, а следовательно, и монотонной, то есть $A^{-1} \geq 0$ (поэлементно). Следовательно, выполняется неравенство $A^{-1}N \geq 0$, а это приводит к выполнению условия (c) в теореме. Тогда в силу эквивалентности условий (a), (c) и (d) получаем

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)} < 1, \quad \text{откуда} \quad \rho(A^{-1}N) = \frac{\rho(M^{-1}N)}{1 - \rho(M^{-1}N)} < 1.$$

Так как $\rho(M^{-1}N) \leq \|M^{-1}N\|_\infty$ и функция $y = \frac{x}{1-x}$ на интервале $(0; 1)$ является возрастающей, то получаем $0 < \rho(A^{-1}N) \leq \frac{\|M^{-1}N\|_\infty}{1 - \|M^{-1}N\|_\infty}$. Отсюда $\frac{\|M^{-1}N\|_\infty}{1 - \|M^{-1}N\|_\infty} > 0$, а следовательно, $\|M^{-1}N\|_\infty < 1$.

Таким образом, достаточным условием устойчивости схемы (15) является условие (16).

Применение описанной выше аппроксимации уравнения неразрывности в системе уравнений мелкой воды позволило несколько увеличить шаг по времени (примерно в 1.3 раза) при расчете гидродинамики.

Алгоритм вычисления параметров течения воды на $(n+1)$ -м временном слое основан на том принципе, что каждое уравнение является «определяющим» для своего неизвестного. Все остальные переменные считаются известными и берутся с n -го слоя.

Первый шаг: перепад уровня на $(n+1)$ -м временном слое вычисляется по неявной противотоковой схеме (11)

Второй шаг: на слое I значения компонентов скорости u_s и v_s находятся из разностных аналогов уравнений (1) и (2). При конечно-разностной аппроксимации уравнений количества движения используются неявные противотоковые схемы:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{s_{i,j}}^{n+1} - u_{s_{i,j}}^n}{\tau} + \frac{u_{s_{i,j}}^n + |u_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{u_{s_{i,j}}^{n+1} - u_{s_{i-1,j}}^{n+1}}{h_1} + \frac{u_{s_{i,j}}^n - |u_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{u_{s_{i+1,j}}^{n+1} - u_{s_{i,j}}^{n+1}}{h_1} + \\ & + \frac{v_{s_{i,j}}^n + |v_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{u_{s_{i,j}}^{n+1} - u_{s_{i,j-1}}^{n+1}}{h_2} + \frac{v_{s_{i,j}}^n - |v_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{u_{s_{i,j+1}}^{n+1} - u_{s_{i,j}}^{n+1}}{h_2} - \Omega \tilde{v}_{s_{i,j}} = \\ & = -g \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{h_1} + v_{xy} \left(\frac{u_{s_{i+1,j}}^{n+1} - 2u_{s_{i,j}}^{n+1} + u_{s_{i-1,j}}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{u_{s_{i,j+1}}^{n+1} - 2u_{s_{i,j}}^{n+1} + u_{s_{i,j-1}}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\ & + \left(\frac{\tau_{sx} - \tau_{bx}}{H} \right)_{i,j}^n + \frac{u_{s_{i,j}}^{n+1} w_{i,j,k_0-1}^n}{H}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\tilde{v}_{s_{i,j}} = \frac{1}{4} (v_{s_{i,j}}^n + v_{s_{i-1,j}}^n + v_{s_{i-1,j-1}}^n + v_{s_{i,j-1}}^n).$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{s_{i,j}}^{n+1} - v_{s_{i,j}}^n}{\tau} + \frac{v_{s_{i,j}}^n + |v_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{v_{s_{i,j}}^{n+1} - v_{s_{i-1,j}}^{n+1}}{h_1} + \frac{v_{s_{i,j}}^n - |v_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{v_{s_{i+1,j}}^{n+1} - v_{s_{i,j}}^{n+1}}{h_1} + \\ & + \frac{v_{s_{i,j}}^n + |v_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{v_{s_{i,j}}^{n+1} - v_{s_{i,j-1}}^{n+1}}{h_2} + \frac{v_{s_{i,j}}^n - |v_{s_{i,j}}^n|}{2} \frac{v_{s_{i,j+1}}^{n+1} - v_{s_{i,j}}^{n+1}}{h_2} + \Omega \tilde{u}_{s_{i,j}} = \\ & = -g \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{h_2} + v_{xy} \left(\frac{v_{s_{i+1,j}}^{n+1} - 2v_{s_{i,j}}^{n+1} + v_{s_{i-1,j}}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{v_{s_{i,j+1}}^{n+1} - 2v_{s_{i,j}}^{n+1} + v_{s_{i,j-1}}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\ & + \left(\frac{\tau_{sy} - \tau_{by}}{H} \right)_{i,j}^n + \frac{v_{s_{i,j}}^{n+1} w_{i,j,k_0-1}^n}{H}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{u}_{s_{i,j}} = \frac{1}{4}(u_{s_{i,j}}^n + u_{s_{i+1,j}}^n + u_{s_{i,j+1}}^n + u_{s_{i+1,j+1}}^n).$$

Третий шаг: вычисляется давление по всей области из (7):

$$p_{i,j,k}^{n+1} = p_{atm} + g\rho(\zeta_{i,j}^{n+1} + H_0(i,j) - kh_3). \quad (19)$$

Четвертый шаг: вычисляются значения горизонтальных компонентов скорости в слое II. При конечно-разностной аппроксимации уравнений (4)-(5) используются неявные «противопотоковые» схемы:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\tau} + \frac{u_{i,j,k}^n + |u_{i,j,k}^n|}{2} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1}}{h_1} + \frac{u_{i,j,k}^n - |u_{i,j,k}^n|}{2} \frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^{n+1}}{h_1} + \\ & + \frac{v_{i,j,k}^n + |v_{i,j,k}^n|}{2} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j-1,k}^{n+1}}{h_2} + \frac{v_{i,j,k}^n - |v_{i,j,k}^n|}{2} \frac{u_{i,j+1,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^{n+1}}{h_2} + \\ & + \frac{w_{i,j,k}^n + |w_{i,j,k}^n|}{2} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k-1}^{n+1}}{h_3} + \frac{w_{i,j,k}^n - |w_{i,j,k}^n|}{2} \frac{u_{i,j,k+1}^{n+1} - u_{i,j,k}^{n+1}}{h_3} - \Omega \tilde{v}_{i,j,k} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n}{h_1} + v_{xy} \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i-1,j,k}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j-1,k}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\ & + \frac{v_{i,j,k+1} u_{i,j,k+1}^{n+1} - (v_{i,j,k+1} + v_{i,j,k}) u_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j,k} u_{i,j,k-1}^{n+1}}{h_3^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j,k} &= \frac{1}{4}(v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n + v_{i,j-1,k}^n); \\ & \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\tau} + \frac{v_{i,j,k}^n + |v_{i,j,k}^n|}{2} \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i-1,j,k}^{n+1}}{h_1} + \frac{v_{i,j,k}^n - |v_{i,j,k}^n|}{2} \frac{v_{i+1,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^{n+1}}{h_1} + \\ & + \frac{v_{i,j,k}^n + |v_{i,j,k}^n|}{2} \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1}}{h_2} + \frac{v_{i,j,k}^n - |v_{i,j,k}^n|}{2} \frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^{n+1}}{h_2} + \\ & + \frac{w_{i,j,k}^n + |w_{i,j,k}^n|}{2} \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k-1}^{n+1}}{h_3} + \frac{w_{i,j,k}^n - |w_{i,j,k}^n|}{2} \frac{v_{i,j,k+1}^{n+1} - v_{i,j,k}^{n+1}}{h_3} + \Omega \tilde{u}_{i,j,k} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j,k}^n - p_{i,j-1,k}^n}{h_2} + v_{xy} \left(\frac{v_{i+1,j,k}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i-1,j,k}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j-1,k}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \\ & + \frac{v_{i,j,k+1} v_{i,j,k+1}^{n+1} - (v_{i,j,k+1} + v_{i,j,k}) v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j,k} v_{i,j,k-1}^{n+1}}{h_3^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{u}_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n + u_{i+1,j+1,k}^n).$$

Пятый шаг: вычисляется вертикальный компонент скорости w из разностного аналога уравнения неразрывности (6):

$$\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1}}{2h_1} + \frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1}}{2h_2} + \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1}}{h_3} = 0. \quad (22)$$

Затем цикл 1) – 5) повторяется на новом временном слое, пока не будет выполняться условие окончания счета. Таким условием может быть либо определенный промежуток времени (в часах, сутках и т.д.), в течение которого надо проводить расчет, либо расчет до получения установившегося решения, когда все параметры во времени перестают изменяться.

Решение модельной задачи

В качестве модельной задачи был выбран водоем прямоугольной формы с выступом, имитирующим мелководную область (рис.1). Течение инициировалось действием ветра на обе половины поверхности водоема, но в противоположных направлениях. Таким образом, в водоеме образовывалось циркуляционное течение.

Движение воды моделировалось с помощью полностью трехмерной модели, двумерной модели, основанной на уравнениях мелкой воды и предлагаемой двухслойной модели. Все задачи решались конечно-разностными методами на равномерных прямоугольных сетках. Число узлов по горизонтали было равно 200 в каждом направлении. Число узлов по вертикали было различным для каждой из моделей.

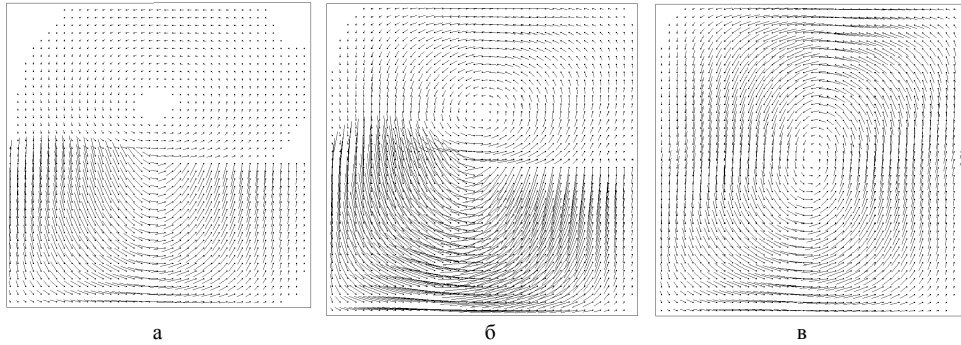


Рис.2. Картина течения на поверхности, полученная с помощью трехмерной модели (а), двумерной модели (б), двухслойной модели (в).

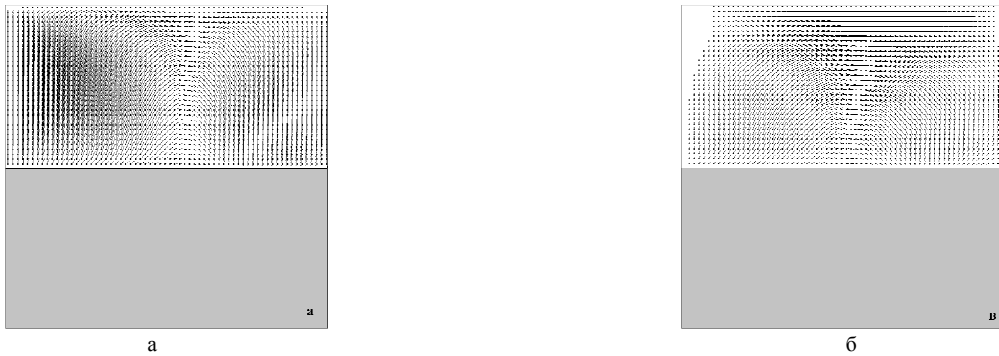


Рис.3. Картина течения в придонном слое, полученная с помощью трехмерной модели (а), двухслойной модели (б).

Численное исследование показало, что все три модели достаточно подобны между собой. На рис.2а показана картина течения на поверхности водоема, полученная с помощью трехмер-

ной модели, на рис.2б – полученная с помощью двумерной модели, на рис.2в – полученная с помощью двухслойной модели. На рис.3а и рис.3б показаны картины течений в придонном слое, полученные с помощью трехмерной и двухслойной моделей соответственно. Трехмерная модель позволяет определить поле скоростей на любом горизонте от поверхности до дна. Двумерная модель, основанная на уравнениях мелкой воды, считает гораздо быстрее других моделей, но дает картину течений только на поверхности водоема. Двухслойная модель описывает течения как на поверхности водоема, содержащего глубоководные и мелководные районы, так и на всех горизонтах до самого дна.

Если двумерную модель взять за точку отсчета трудозатрат, то двухслойная модель содержит неизвестных в 8–15 раз больше (в зависимости от шага по вертикали) и требует большее время счета в такое же количество раз, чем двумерная модель. Число неизвестных в полностью трехмерной модели может быть в 30–50 раз больше, чем в двумерной, и в 5–10 раз больше, чем в двухслойной модели. Соответственно, время счета увеличивалось в такое же количество раз.

Выводы

Предложенная двухслойная математическая модель достаточно адекватно описывает течение в водоемах, имеющих обширные районы мелководья. По сравнению с трехмерной моделью, основанной на использовании равномерной прямоугольной сетки, данная модель гораздо экономичней. Кроме того, при использовании предлагаемой модели значительно упрощается процедура переопределения ячеек в случае осушения или затопления при сгонно-нагонном явлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. – Л.: Гидрометеиздат, 1977, 206 с.
2. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000, 345 с.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989, 608 с.
4. *Филиппов Ю.Г.* Об одном способе расчета морских течений // Тр. ГОИН, 1970, вып.103, с.87-94.
5. *Axelsson O.* Iterative solution Methods. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 654 p.

Поступила в редакцию 17.11.08.